Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

SORBONNE UNIVERSITÉ

Longueurs, périmètres et aires

DU second degré

Enseigner les Mathématiques

Année 2025-2026

Plan de la séance 2

1) Travail sur la grandeur « longueur » (Longueurs et périmètres)

2) Travail sur la grandeur « aire »

3) Travail sur les deux notions périmètre et aire simultanément

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Quelques conseils pour les progressions

- **Séparer d'abord le travail sur les deux grandeurs longueurs et aires en classe de 6ème**
- **Placer la comparaison aires-périmètres en fin de 6ème**
- **On peut étudier la longueur d'un cercle dans un moment à part, par exemple comme application de la proportionnalité**

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Travail sur la grandeur « Longueur » : longueurs et périmètres

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Longueurs et périmètres

Questions fondamentales :

- **Quel est le chemin le plus court pour relier A à B ?**

Ce chemin peut être une courbe fermée ou le contour d’une ligne polygonale.

- **Comment mesurer la distance de A à B ?**

Cette distance peut être un périmètre.

Problèmes de frontières, de clôtures, d’entourages, de bordures …

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Longueurs et périmètres

Chapitre sur les longueurs structuré en quatre grandes parties :

1. **Comparer des longueurs**
2. **Partager des longueurs**
3. **Mesurer des longueurs**
4. **Calculer des longueurs**

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

1. Comparer des longueurs

Deux lignes sont de même longueur si on est capable de les superposer.

Si les deux lignes sont droites

a) **Comparaison directe si on peut bouger au moins un des supports de ligne (Ex : Longueur de deux crayons …)**
b) **Comparaison indirecte (outil : ficelle qu'on tend, bande papier, compas)**

Si les deux lignes sont brisées ou polygonales

On reporte bout à bout sur une demi-droite la longueur des différents segments

Si les deux lignes sont courbes

Deux méthodes : utilisation d'une ficelle ou approximation de la courbe par une ligne brisée ou polygonale (méthode d'Archimède)

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

1. Comparer des longueurs

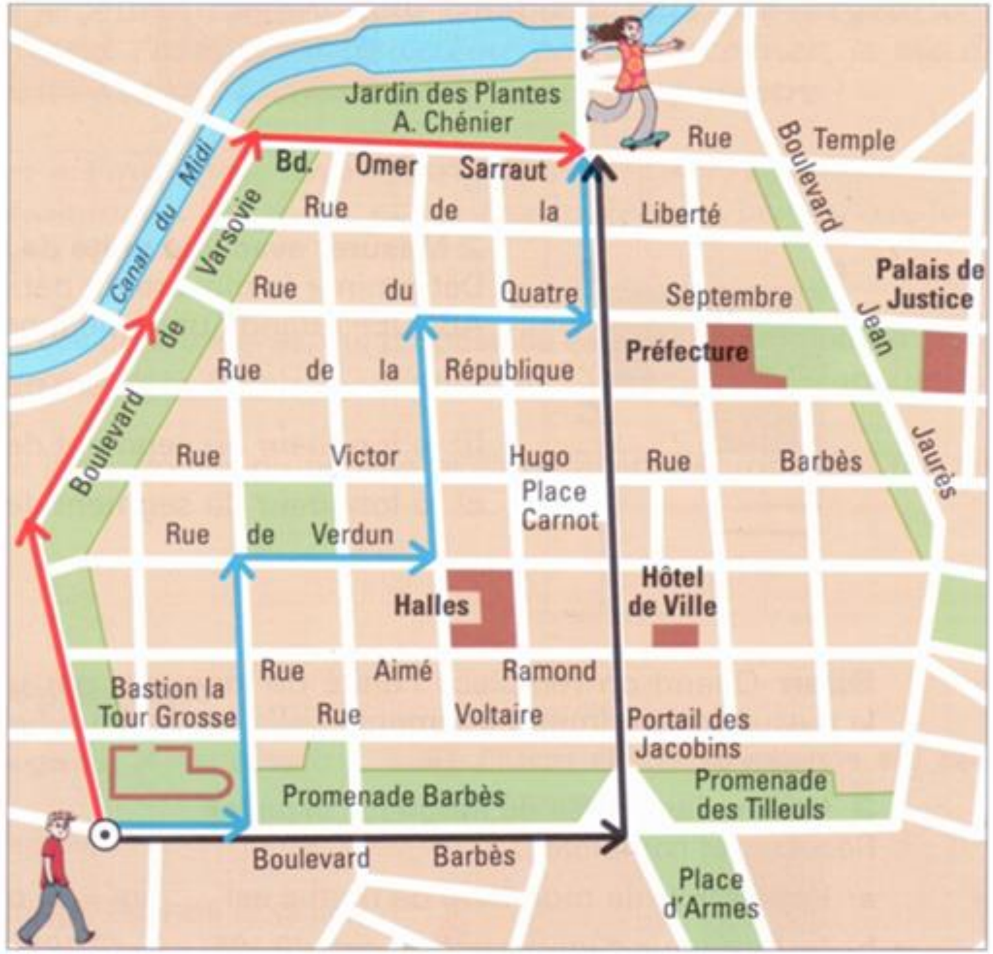
Un exemple de comparaison indirecte de lignes brisées à l'aide du compas

Noé (en bas à gauche) doit rejoindre Léa (en haut). En observant son plan, il hésite entre trois itinéraires :

- le 1[er] : passer par le boulevard Varsovie
- le 2[nd] : zigzaguer dans la ville en passant près des Halles.
- le 3[ème] : longer le boulevard Barbès puis remonter.

a Repasser en rouge le 1[er] itinéraire, en bleu le 2[nd] et en vert le dernier.

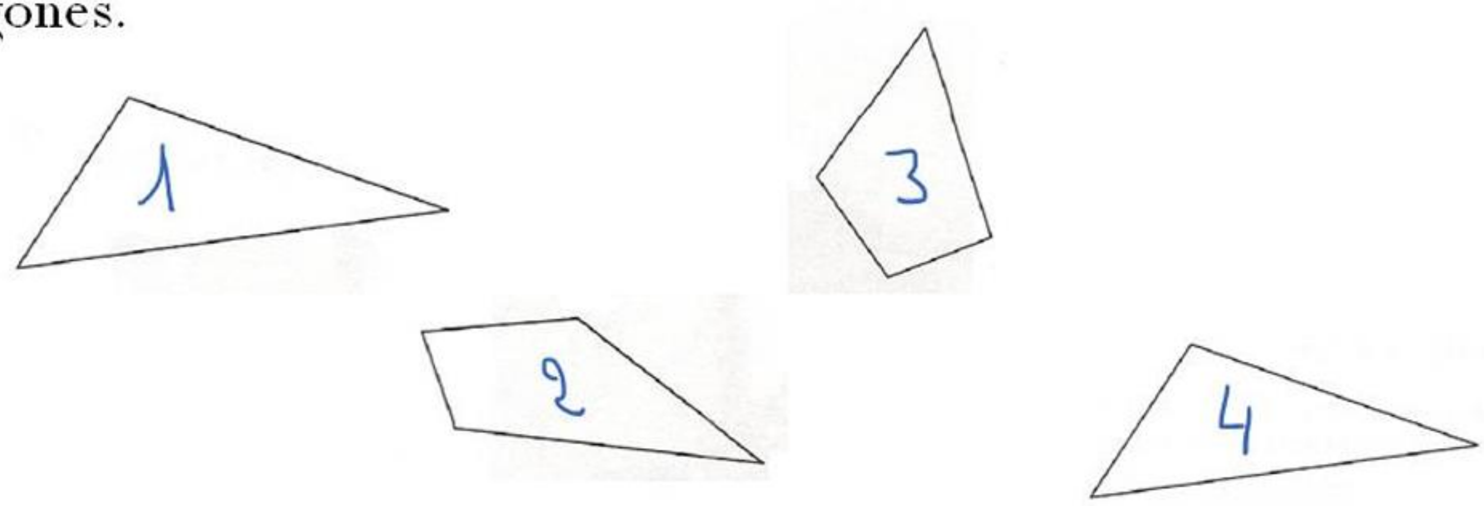
b A l'aide une règle non graduée (sans mesurer) et d'un compas trouver une technique pour trouver le chemin le plus court.



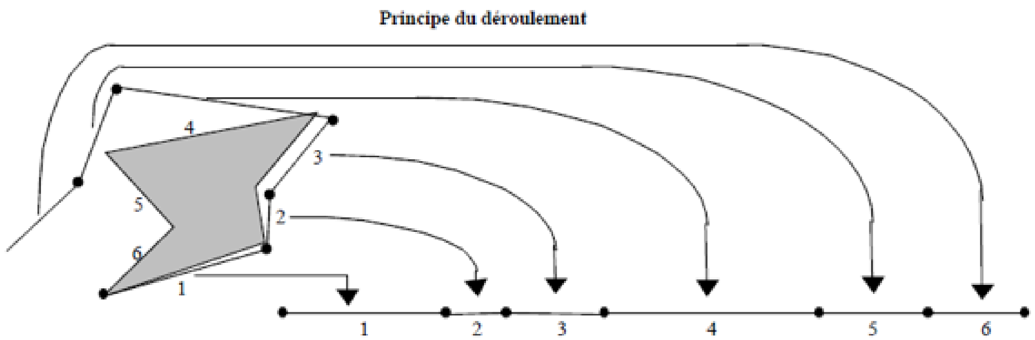
1. Comparer des longueurs

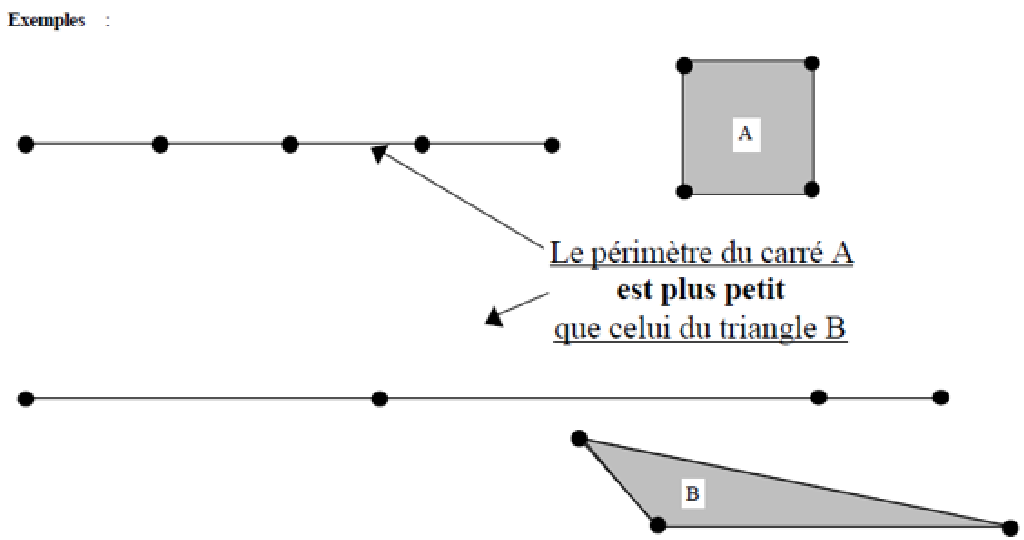
Un exemple de comparaison indirecte de périmètres à l'aide du compas

A l'aide du compas uniquement, comparer les périmètres des quatre polygones.



1. Comparer des longueurs



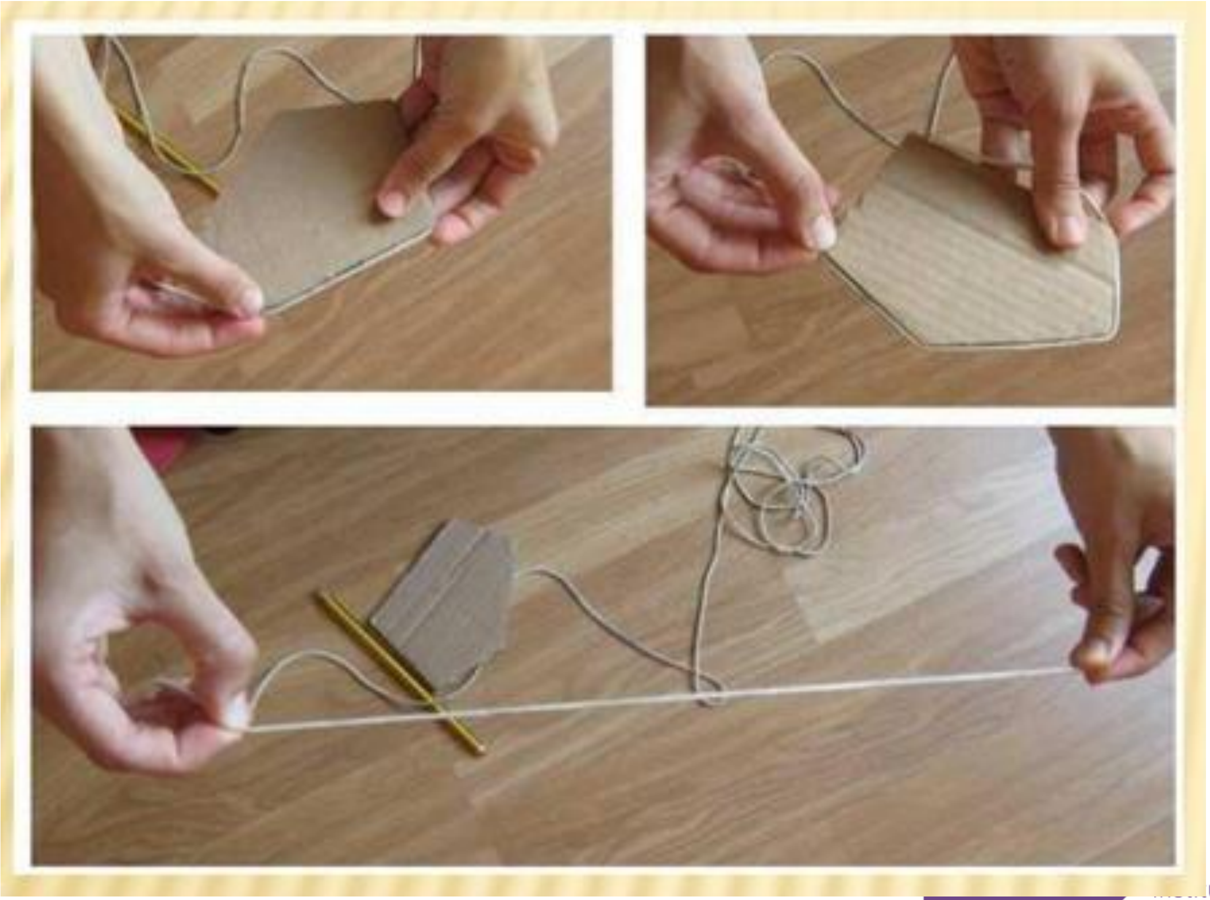


Source : aires et périmètre en classe-relais

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

1. Comparer des longueurs

Un exemple de comparaison indirecte à l'aide d'une ficelle



1. Comparer des longueurs

Cas particulier : les points équidistants

Lieux géométriques, justification de la construction du triangle équilatéral …

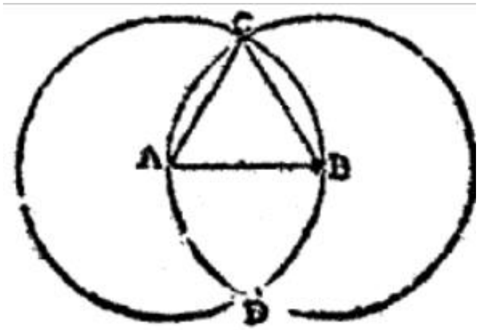


Figure issue des « Eléments » d'Euclide

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

2. Partager des longueurs

Comment doubler, tripler … une longueur ?

Report sur une demi-droite de la longueur autant de fois que l'on désire

Comment partager une longueur en deux, en trois …?

-Pour le partage en 2 : bande de papier pliée en deux ou tracé de la médiatrice du segment à l'aide d'un compas

-Pour le partage en 3 ou plus :

Notion de droite graduée, passage à la mesure et travail sur les nombres et sur la division

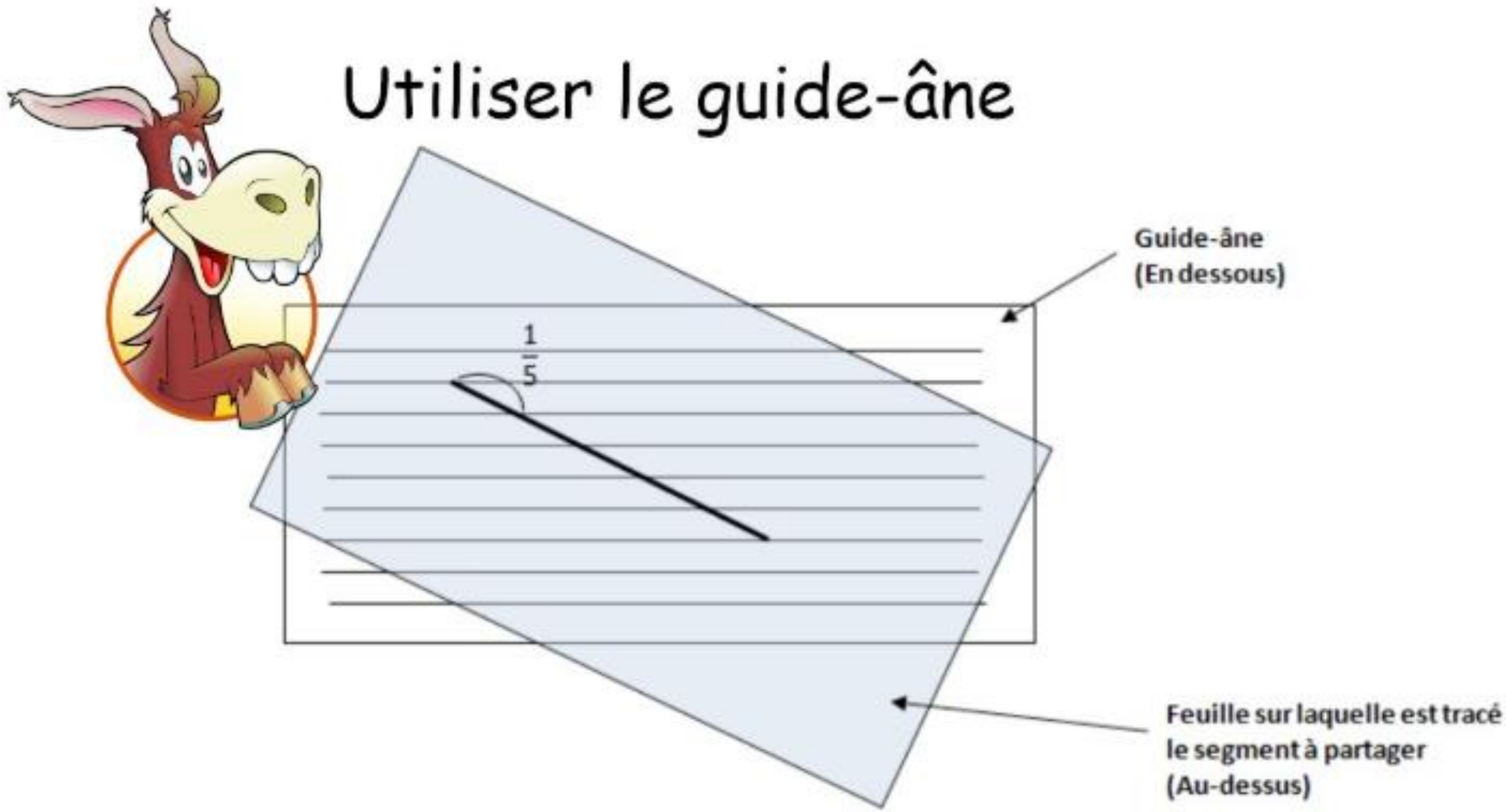
Ou utilisation d'une famille de droites parallèles équidistantes, justifiée par le théorème de Thalès au cycle 4 (cf. guide-âne)

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

2. Partager des longueurs : le guide-âne

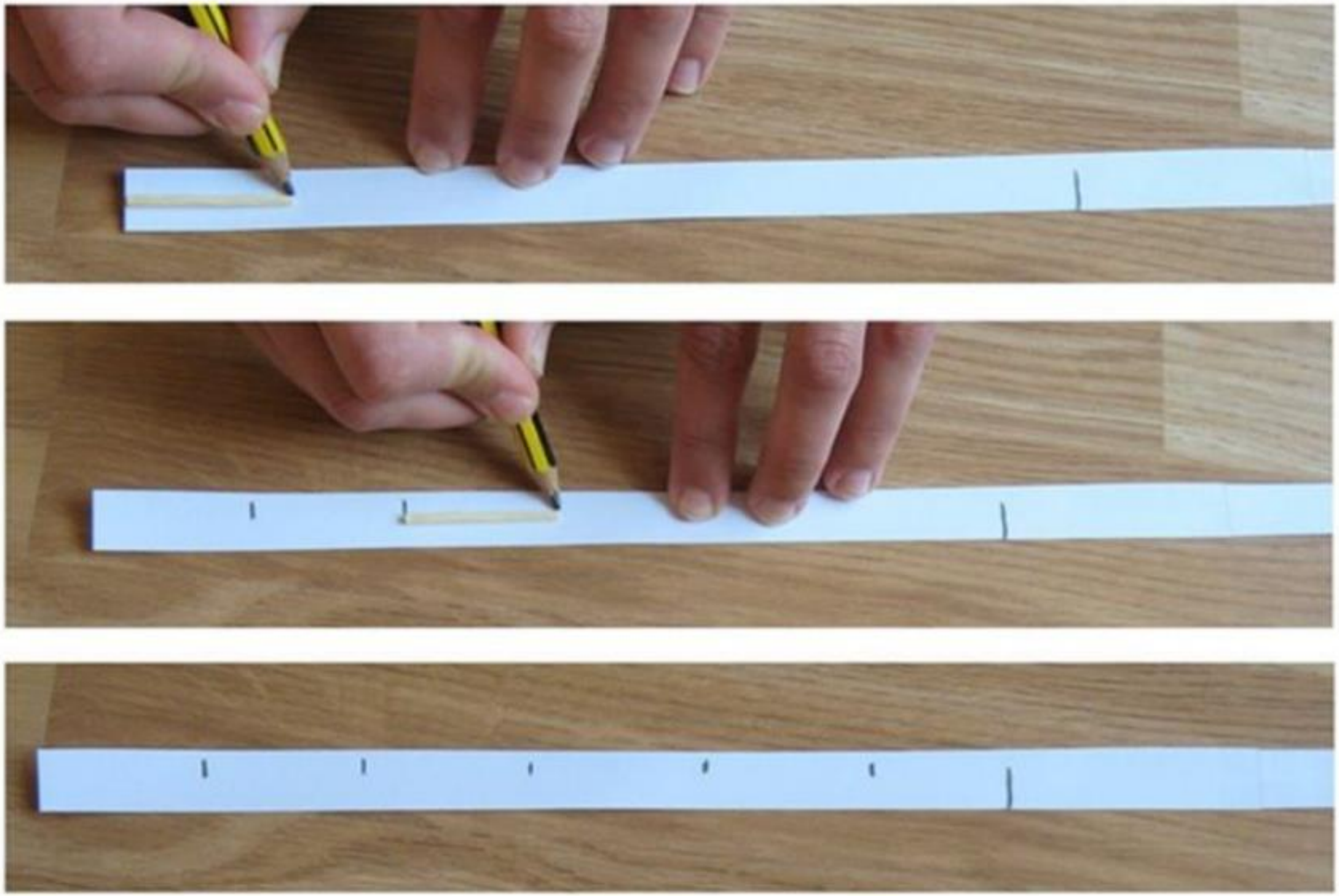
Vidéo : [Comment utiliser le guide-âne ?]



Source : Juliette Hernando

2. Partager des longueurs : les graduations

Amener la notion de mesure : construction d'une graduation



at

3. Mesurer des longueurs

Mesurer une longueur, c'est choisir une longueur unité et être capable de dire combien de fois cette grandeur unité est contenue dans la longueur à mesurer.

a) Choix de la longueur unité

Unités arbitraires : intérêt du système métrique

Travail sur les conversions

b) Méthodes de mesure

Règle graduée, problèmes d'échelle, proportionnalité

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

4. Calculer des longueurs

Comment calculer cette longueur, ce périmètre ?

a) Segment, périmètres et lignes brisées

Utilisation de codages, d’additions et de soustractions

Utilisation de formules (périmètre d’un carré, d’un rectangle …)

b) La longueur d’un cercle

Proportionnalité, découverte du nombre Pi

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

Longueur d’un cercle

Faire découvrir par la mesure et le calcul que la longueur d'un cercle vaut environ 3 fois la longueur de son diamètre.

Source : « Grandeurs et mesures au collège» Académie de Guyane

Longueur d'un cercle

1) A l'aide d'un fil et d'un mètre, tu vas, à la maison, mesurer la longueur de différents objets circulaires. Complète le tableau ci-dessous, rajoute d'autres objets.

Objet	Longueur en cm	Diamètre en cm	
Pièce de 50 centimes			
Grande assiette ronde			
Petite assiette ronde			
Rouleau de Scotch			
Boite de conserve			
Roue d'un vélo			

Source : « Grandeurs et mesures au collège» Académie de Guyane

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

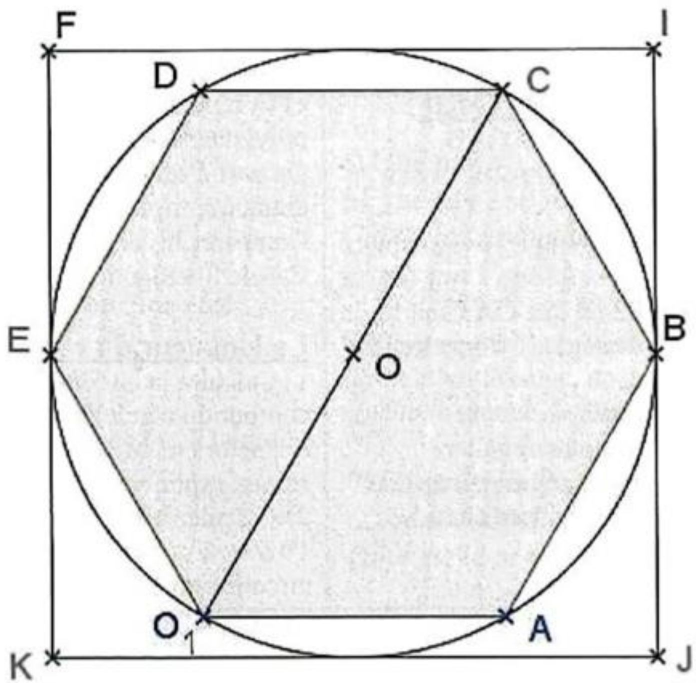
Longueur d’un cercle

	Objet	Longueur en cm	Diamètre en cm	Quotient
2	grande assiette ronde	87,9	28	≈ 3,14
3	petite assiette ronde	62,8	20	3,14
4	rouleau de Scotch	14,1	4,5	≈ 3,13
5	sous-tasse ronde	28,2	9	≈ 3,13
6	boite de conserve	31,4	10	3,14
7	roue d'un vélo	204,1	65	3,14

Source : « Grandeurs et mesures au collège» Académie de Guyane

Autre approche : encadrer le périmètre

Méthode d'Archimède : encadrement du périmètre du cercle par des périmètres de polygones réguliers



Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

Autre approche : encadrer le périmètre

a) Le périmètre d'un cercle est compris entre le périmètre d'un hexagone régulier et d'un carré. Justifier pourquoi à l'aide du dessin ci-dessus.

b) Sachant que le cercle est de diamètre 1 m, donner le périmètre de l'hexagone régulier et du carré.
Périmètre de l'hexagone régulier =
Périmètre du carré =
Que peut-on en déduire à propos du périmètre du cercle de diamètre 1 m ?

c) Compléter le tableau ci-dessous

diamètre	2 m	5 m	10 m	20 m	50 m	100 m
Périmètre de l'hexagone régulier						

Exprimer le périmètre d'un hexagone régulier en fonction du diamètre du cercle qui le contient.

d) Compléter le tableau ci-dessous

diamètre	2 m	5 m	10 m	20 m	50 m	100 m
Périmètre du carré						

Exprimer le périmètre du carré en fonction du diamètre du cercle qu'il contient.

e) Que peut-on en déduire sur le périmètre du cercle en fonction de son diamètre ?

f) Coefficient de proportionnalité :

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs » IREM de Poitiers

INSPE
Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Prolongement du travail sur les longueurs et les périmètres au cycle 4 et au lycée

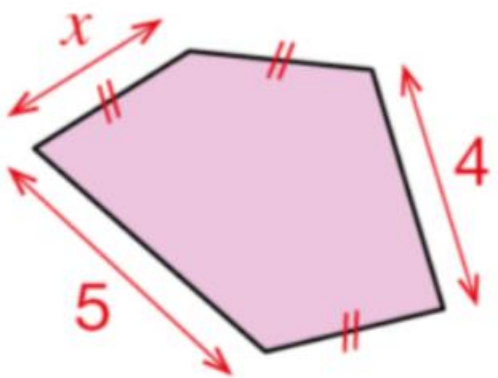
Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Périmètre et calcul littéral

1. Exprimer le périmètre P de ce polygone en fonction de x :

a. sous la forme d'une somme ;

b. sous la forme d'un produit.



2. Calculer ce périmètre pour :

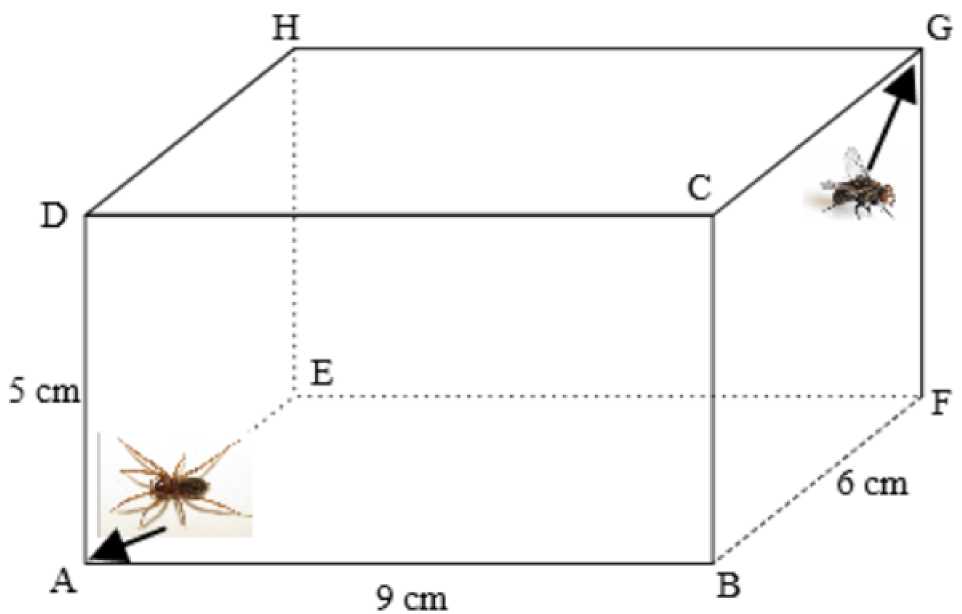
- $x = 2$
- $x = 3{,}5$

Source : Manuel transmath cycle 4

Optimisation de trajets

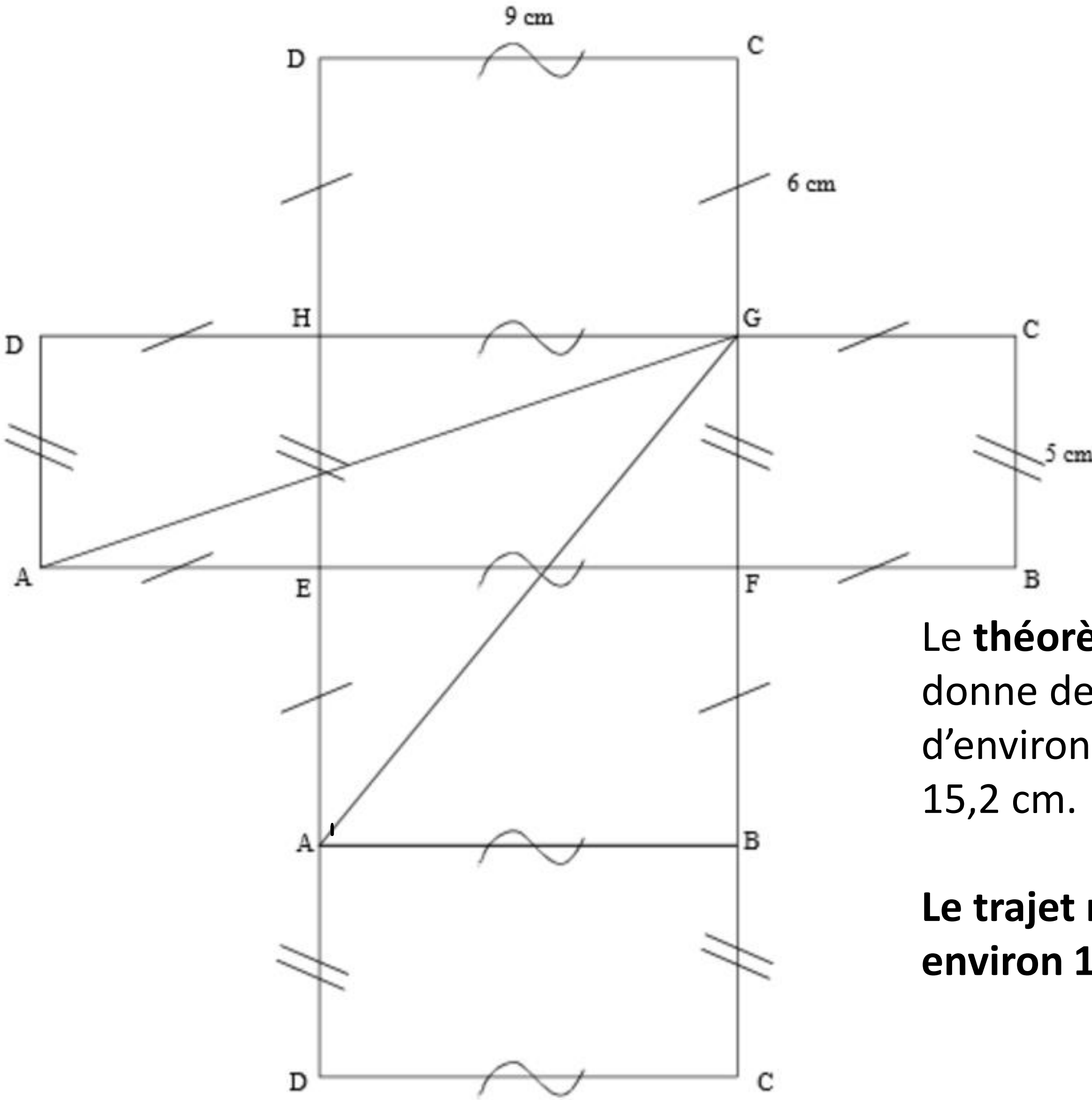
<u>Problème :</u> la mouche et l'araignée

Une araignée et une mouche sont enfermées dans une boîte fermée qui est représentée par un pavé droit ABCDEFGH tel que AD = 5 cm, AB = 9 cm et BF = 6 cm.
L'araignée se trouve en A et la mouche se trouve en G, engluée dans une toile d'araignée.
L'araignée veut attraper la mouche (qui ne peut pas bouger !) en empruntant le chemin le plus court.
Trouver ce chemin et en calculer une valeur approchée au mm près.



<u>Remarque :</u> une araignée ne sait pas voler et ne peut donc se déplacer que sur les parois de la boîte (sur les faces et les arêtes du pavé droit)

Optimisation de trajets (éléments de correction)



Le **théorème de Pythagore** nous donne deux longueurs AG de trajet d'environ 14,2 cm et A'G d'environ 15,2 cm.

Le trajet minimal mesure donc environ 14,2 cm.

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Optimisation de trajets (Analyse de la tâche)

Connaissances en jeu :

- Patron d'un pavé droit

- Théorème de Pythagore qui n'est pas du tout indiqué (en didactique : connaissance de type « disponible »)

Changements de cadre :

Passer de la géométrie 3D (pavé droit) à la géométrie 2D (travail sur le patron du pavé droit), puis à la géométrie 1D (calcul de longueur).

Passage du cadre géométrique au cadre numérique.

Optimisation de trajets (Analyse de la tâche)

Difficultés rencontrées par les élèves :

- A charge pour l'élève de trouver qu'il faut travailler uniquement sur les parois de la boîte.
- Savoir tracer le patron d'un pavé droit.

-Trouver les deux positions du point G sur le patron du pavé droit.

- Trouver les triangles rectangles et avoir l'idée d'utiliser le théorème de Pythagore.

Procédures possibles :

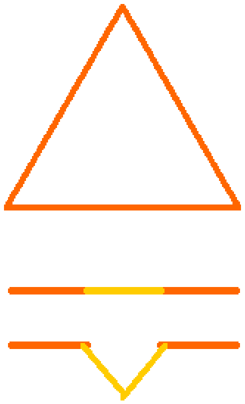
- Trouver des chemins le long des arêtes ou le long de diagonales des rectangles qui constituent les faces : ce sont des chemins possibles, mais pas les plus courts.
- Mesurer le chemin avec sa règle et donner une valeur approchée sans utiliser le théorème de Pythagore.

Le flocon de von Koch : un périmètre infini

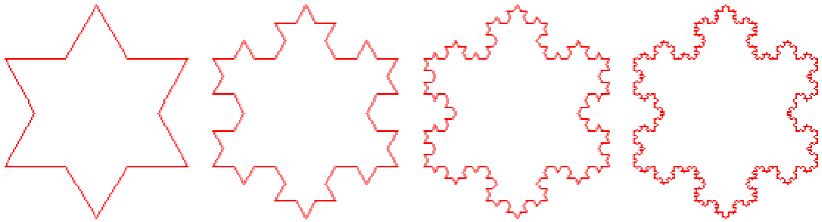
COURBE DE KOCH – FLOCON DE NEIGE (1904)

Deux principes de construction

- Une figure initiale: un triangle équilatéral.
- Une règle de transformation:
  Remplacez le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base.
- Répétez cette opération sur la figure obtenue; Et, ceci, autant de fois que vous le voulez.



Étapes de construction



- Cette courbe converge uniformément vers une courbe continue sans point double. Elle n'admet de tangente en aucun point. Une partie quelconque de la courbe est semblable à la courbe entière.

Pour être précis:

- La courbe de Koch correspond à la transformation **d'un seul segment.**
  Le flocon de neige est la figure formée sur un **triangle équilatéral** initial.

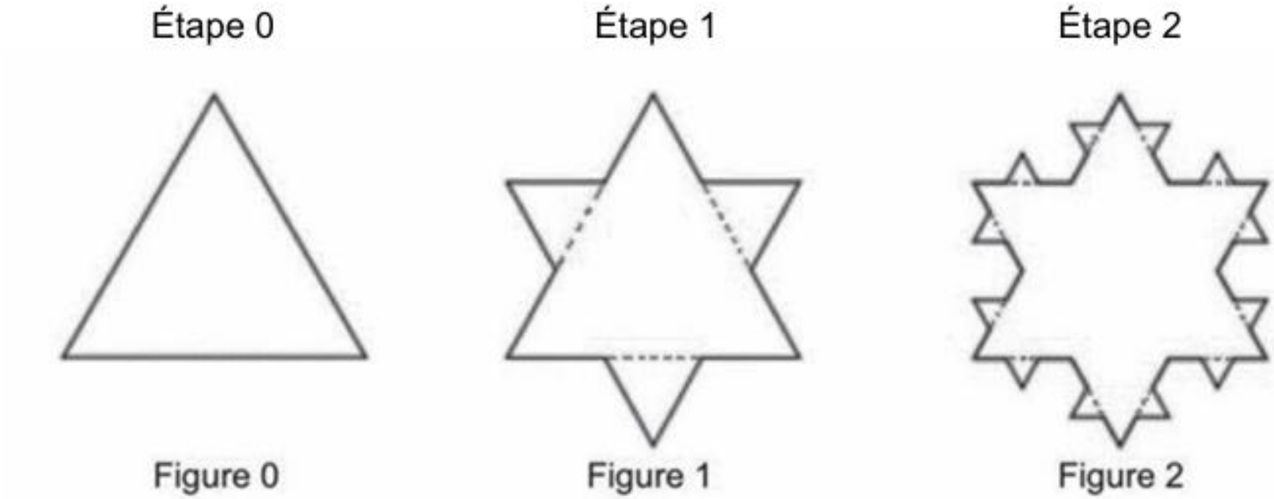
Anglais: Koch Snowflake

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Le flocon de von Koch : un périmètre infini

C'est un exemple de fractale qui a un périmètre infini (mais une aire finie !)

On donne les trois premières étapes de construction :



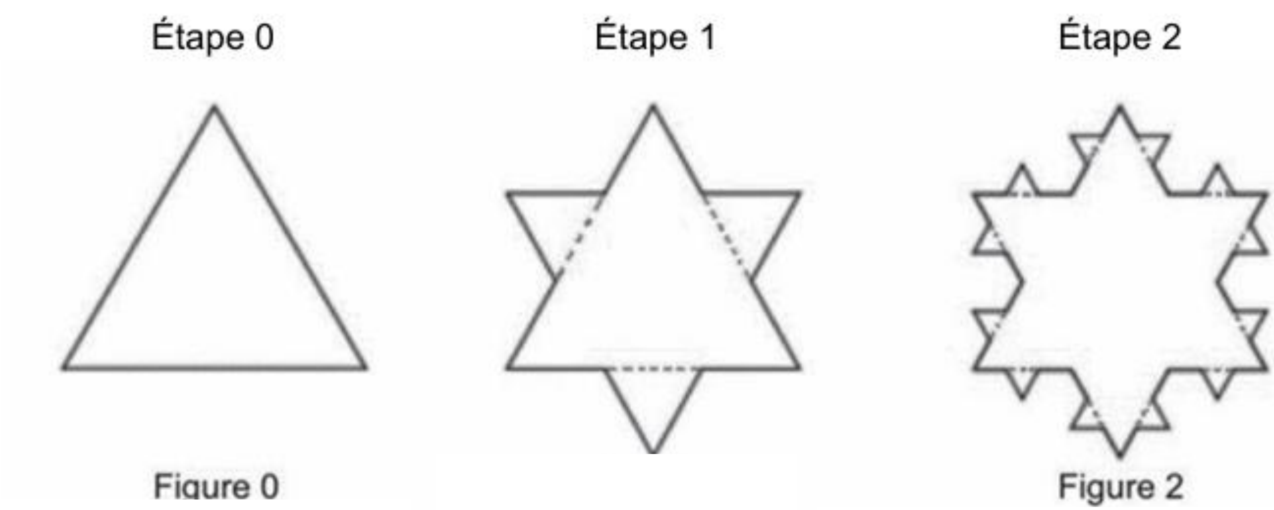
On suppose que le côté du triangle équilatéral de la figure 0 mesure 1 cm.
Exprimer le nombre de côté N_n , puis la longueur d'un côté L_n et enfin, le périmètre P_n de la figure obtenue à l'étape n (n entier positif) en fonction de n.

Source : CRPE 2020 Groupe 7

Le flocon de von Koch : un périmètre infini

C'est un exemple de fractale qui a un périmètre infini (mais une aire finie !)

On donne les trois premières étapes de construction :



quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $N_n = 3 \times 4^n$

$L_n = \frac{1}{3^n}$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P_n &= N_n \times L_n \\ &= 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} \\ &= 4^n \times \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{4^n}{3^{n-1}}$.

Conclusion : Le périmètre est une suite géométrique divergente.

Source : CRPE 2020 Groupe 7

Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Académie de Paris

Travail de la grandeur « Aire »

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

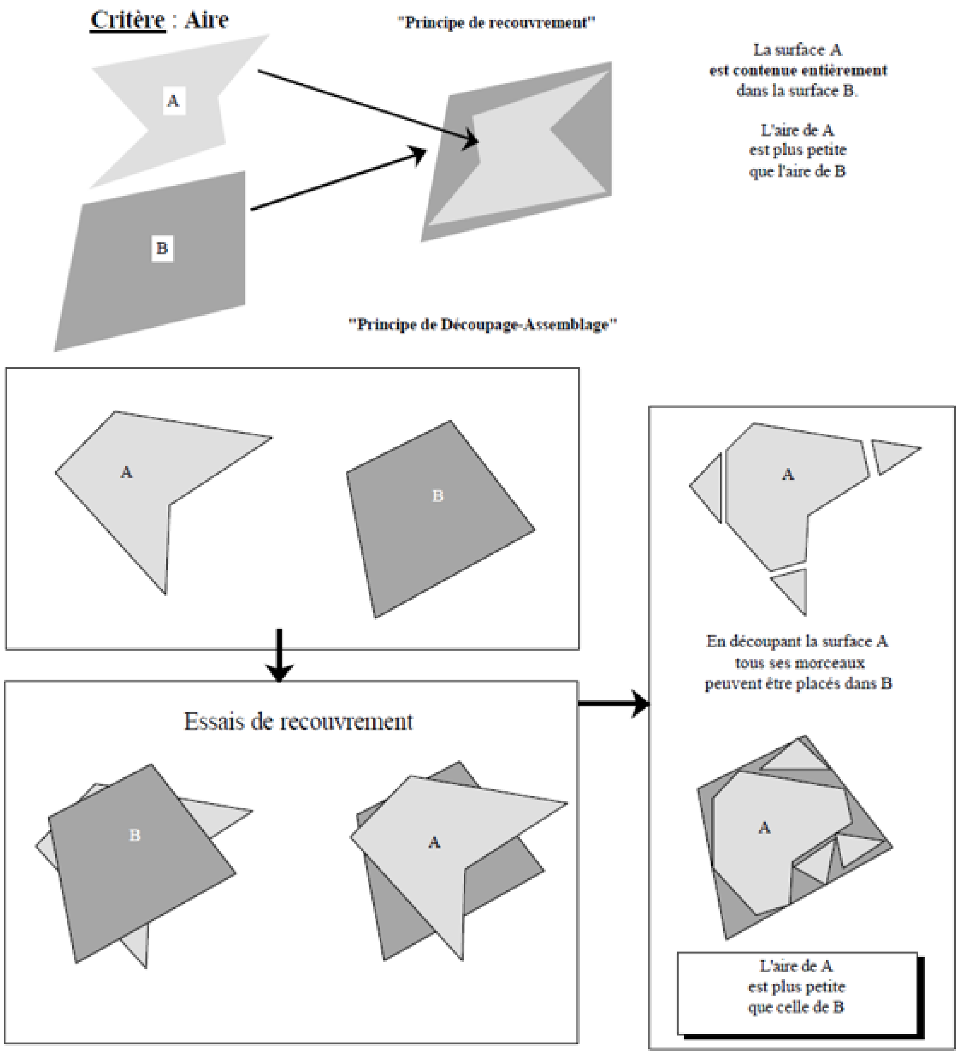
Les Aires

Chapitre sur les aires structuré en trois grandes questions :

1. **Comment comparer des aires ?**
2. **Comment mesurer une aire ?**
3. **Comment calculer une aire ?**

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les aires » IREM de Poitiers

1. Comment comparer des aires ?



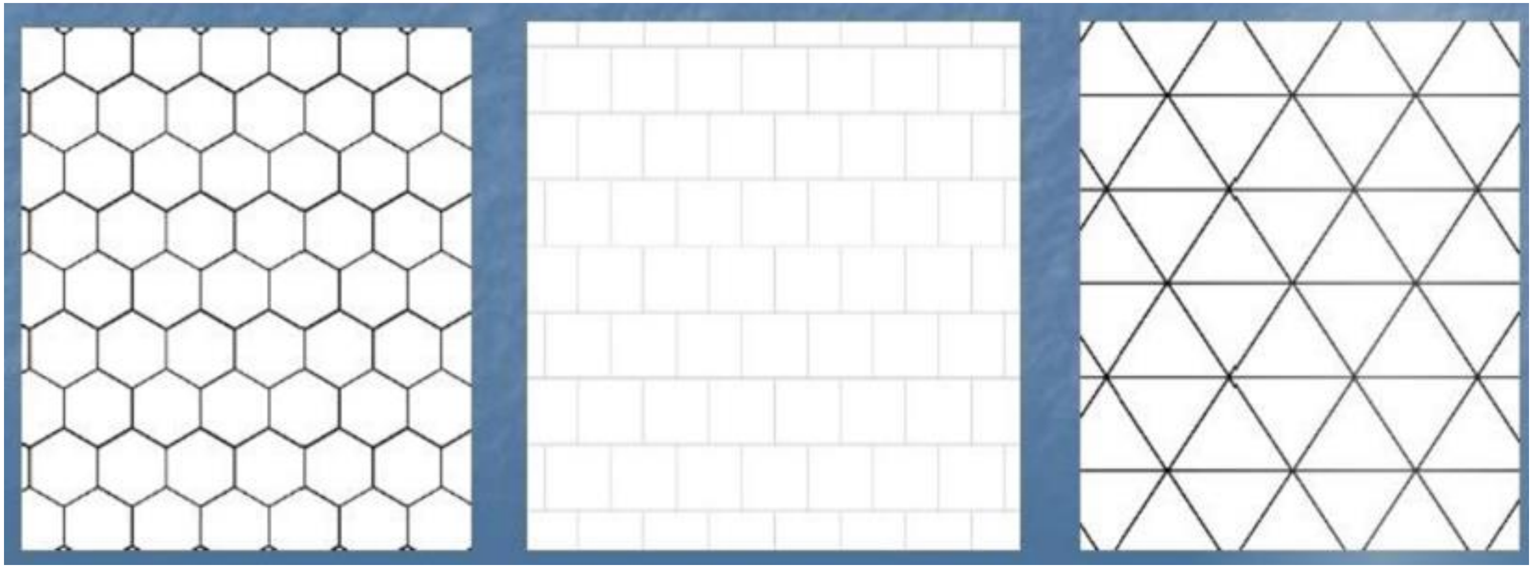
Recouvrements, découpages, assemblages

Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

2.Comment mesurer une aire ?

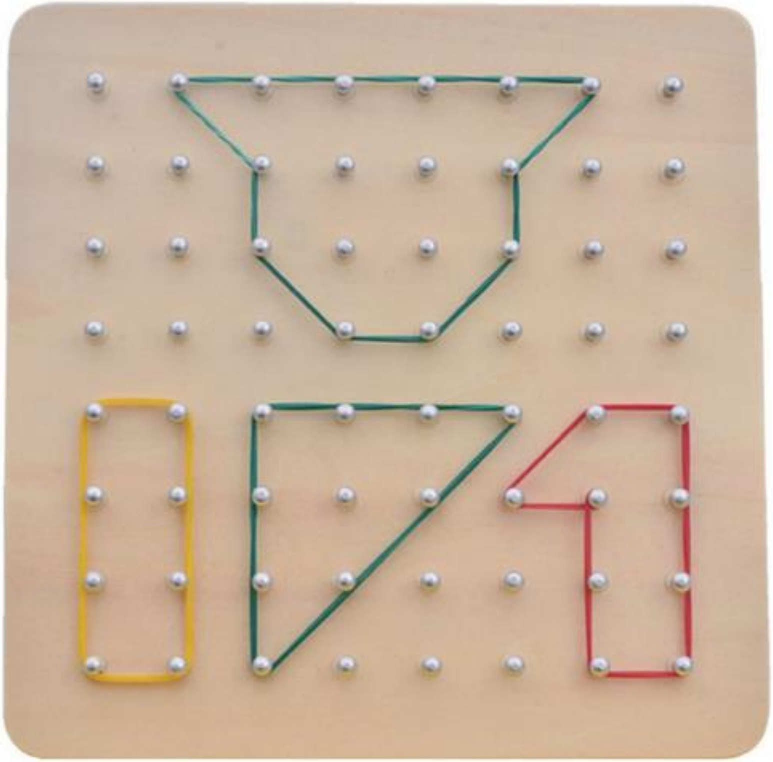
Utilisation de quadrillages et maillages : veiller à varier la forme d'une unité, l'unité « carrée » étant un choix

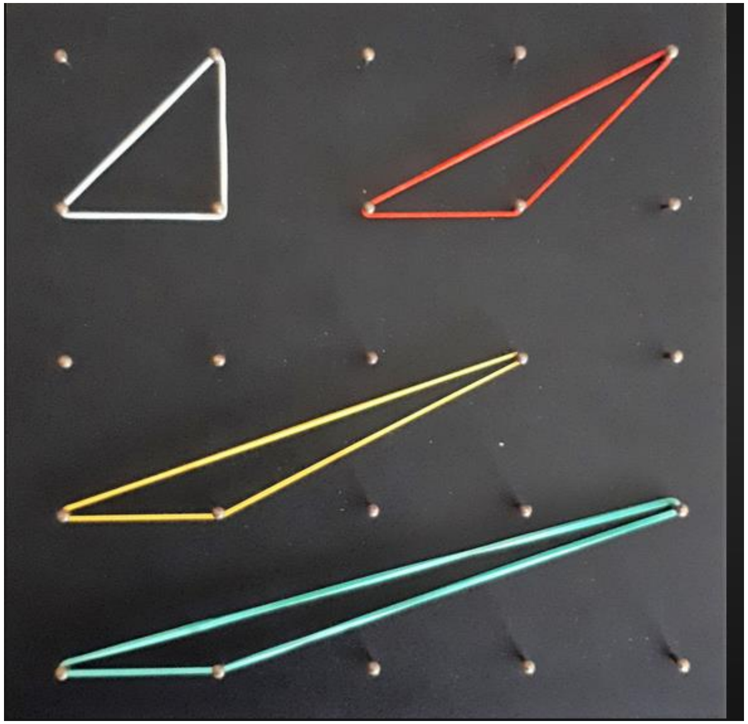


Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

2.Comment mesurer une aire ?

Utilisation de planches à clous pour le travail des aires

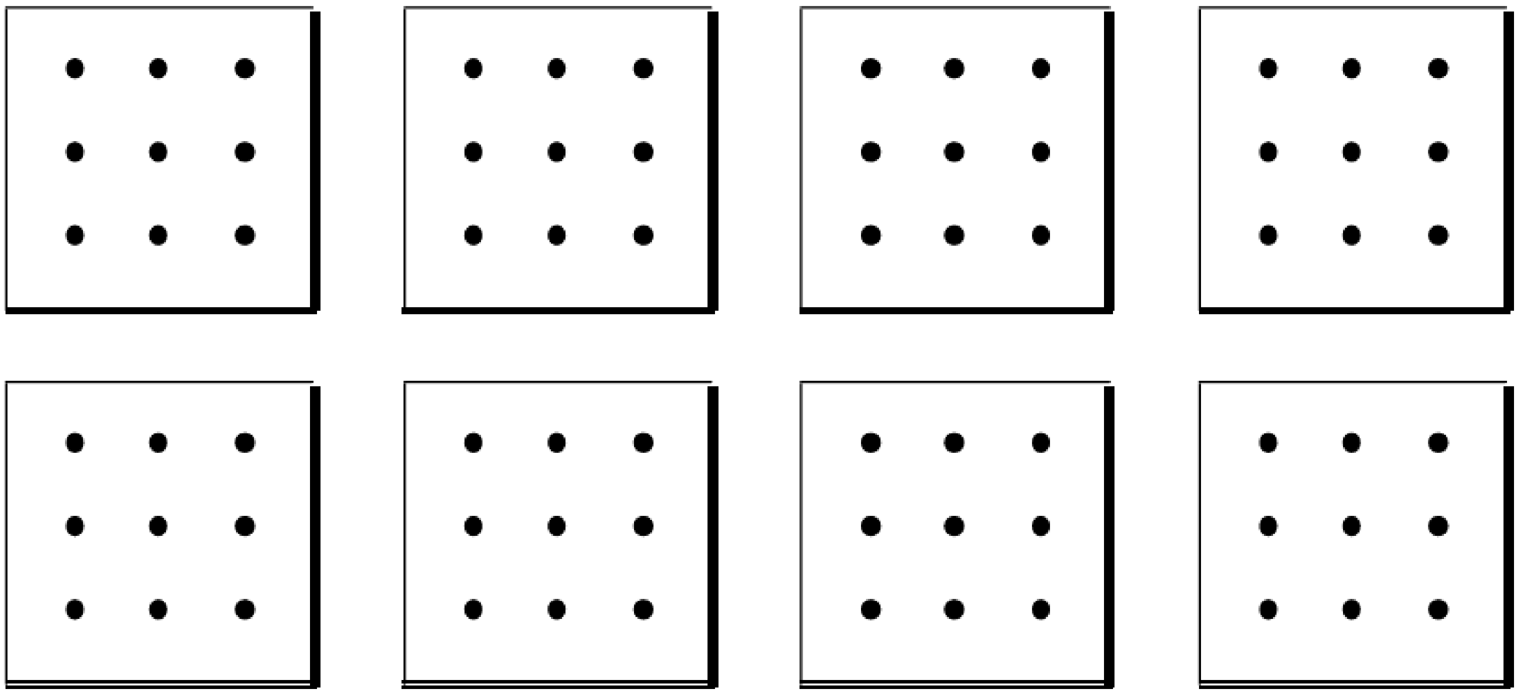




2.Comment mesurer une aire ?

Planchettes à 9 clous

- **Inventaire des triangles**

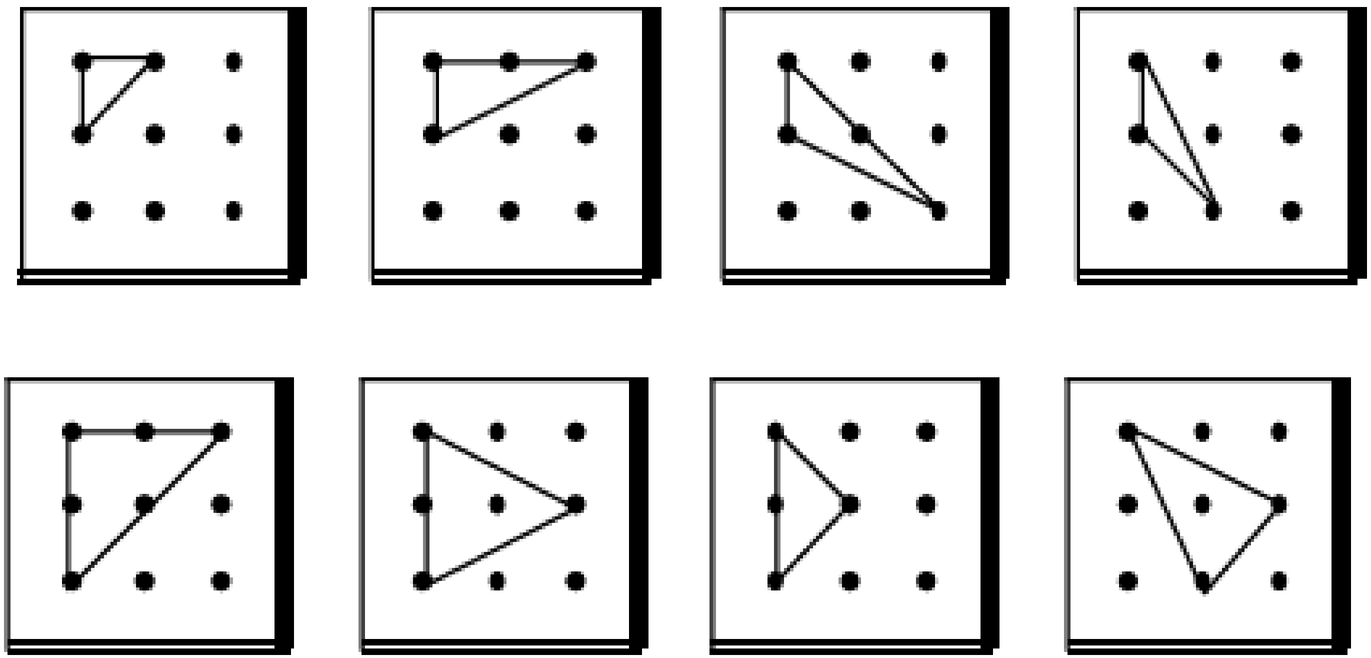


Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

2.Comment mesurer une aire ?

On obtient 8 triangles différents.



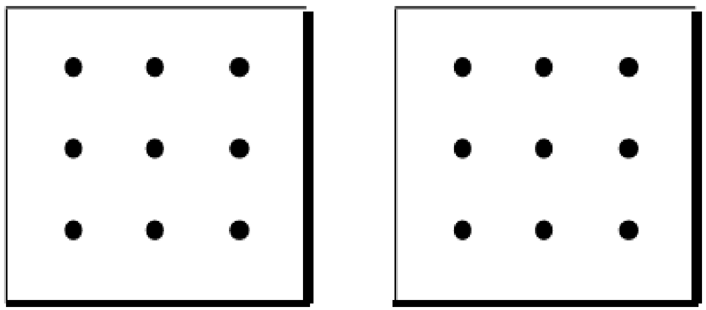
Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

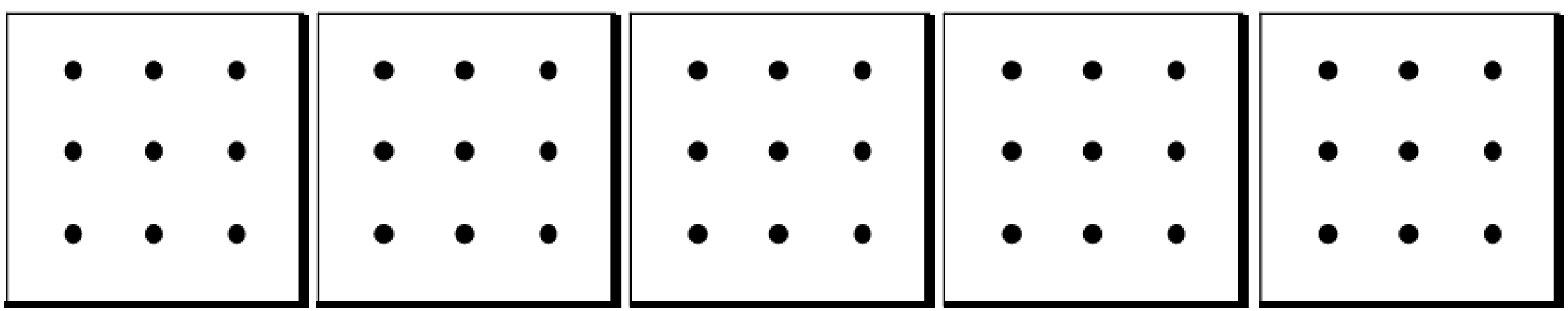
2.Comment mesurer une aire ?

Planchettes à 9 clous

- Repérage des 2 triangles de bases A et B



- Expression des autres triangles à partir de A et B

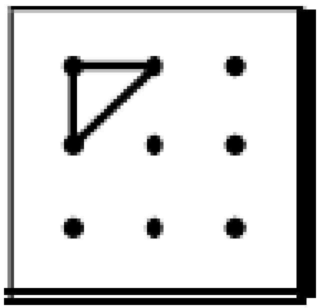


Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

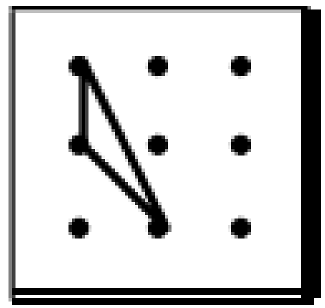
INSPE
Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Académie de Paris

2.Comment mesurer une aire ?

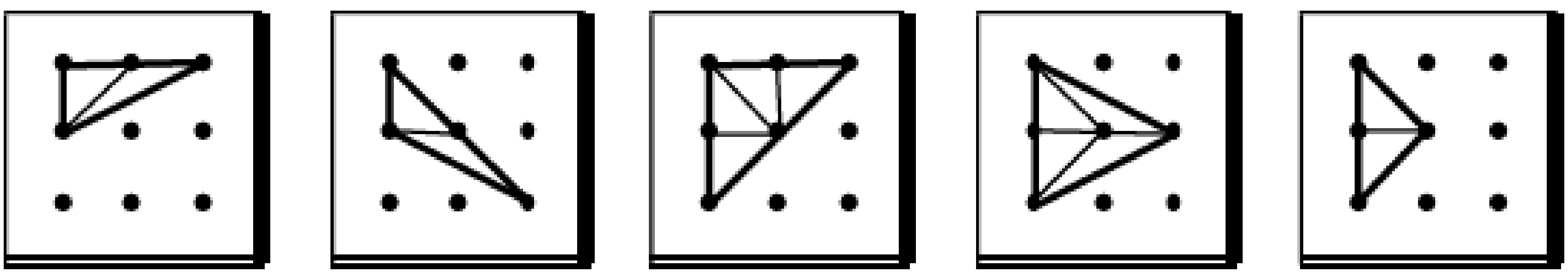
Les deux triangles de base : ils vont constituer deux unités



A



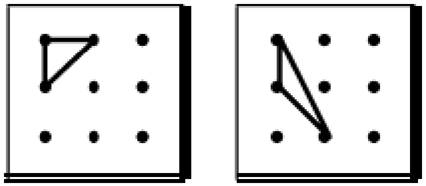
B



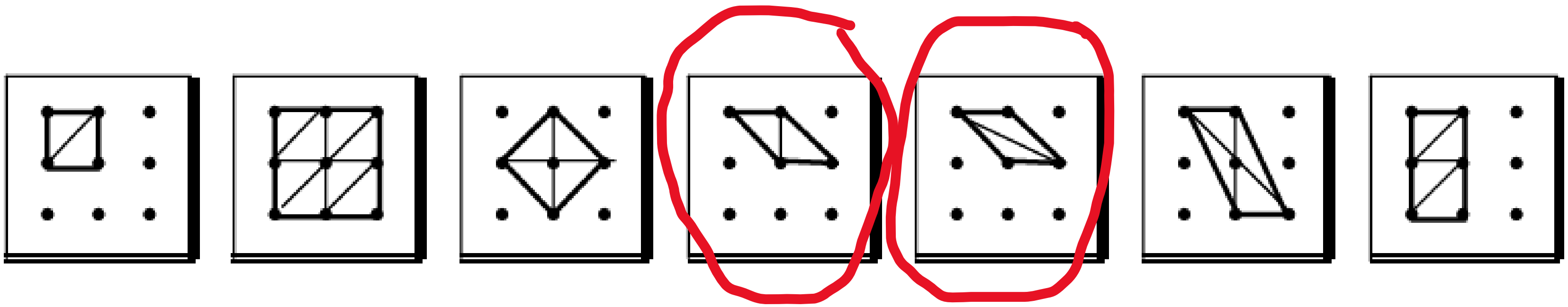
Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

2.Comment mesurer une aire ?

Les deux triangles de base :



A B



A et B ont la même aire (voir les deux décompositions du parallélogramme entouré en rouge).

Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

2.Comment mesurer une aire ?

Le travail de l'élève ne doit pas se limiter à des comptages de carreaux. Des problèmes de construction et de recherche doivent être proposés.

Premier exemple (en 6ème) :

Tracer un rectangle d'aire 24 carreaux.

Y a-t-il plusieurs possibilités ?

2.Comment mesurer une aire ?

Un autre exemple : (donné en seconde)

Réalisation d'une affiche « **LA SECONDE 6** »

Modalité : travail en groupes

Ecrire les lettres A, C, D, E, E, L, O, N, S et le chiffre 6, avec la condition suivante : **l'aire de chacun de ces caractères doit mesurer exactement 50 cm^2**

Chaque groupe doit prouver sur une feuille qu'il a respecté la contrainte.

Source : « Entrez dans nos classes », cndp Haute-Normandie

3.Comment calculer une aire ?

1) Calculer des aires de figures rectangulaires
2) Calculer les aires d'autres figures en se ramenant à l'aire du rectangle (« rectangulation ») par découpage.
3) Calculer l'aire d'un disque.

Source : « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les aires » IREM de Poitiers

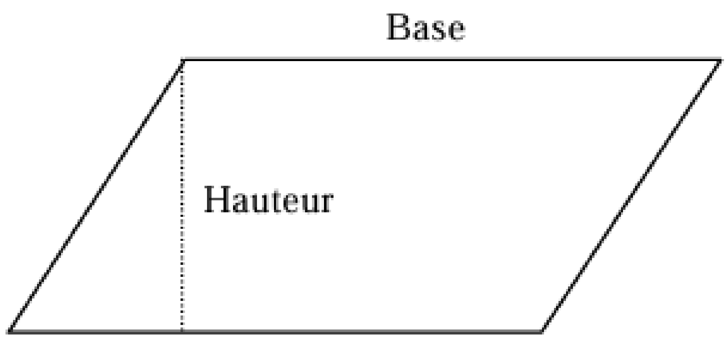
3.Aire d’un triangle

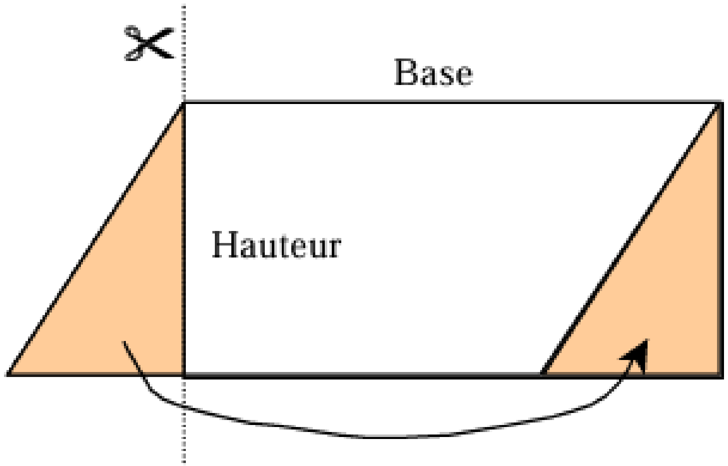
Faire découvrir les formules par la manipulation avant de les introduire. Il faut leur donner du sens.

Source : « Grandeurs et mesures au collège» Académie de Guyane

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

3.Aire d'un parallélogramme

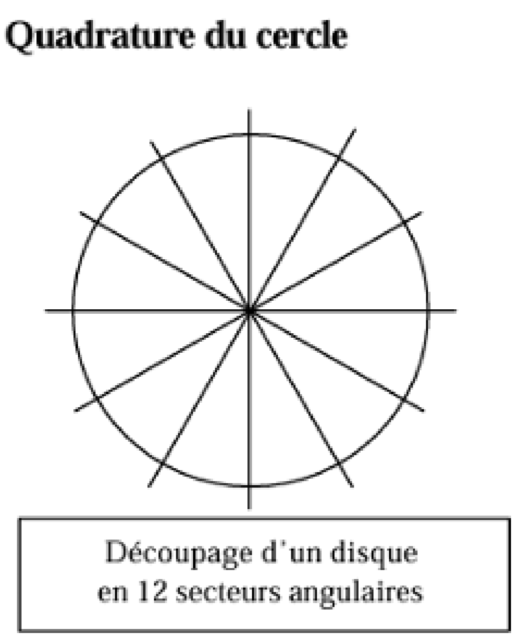


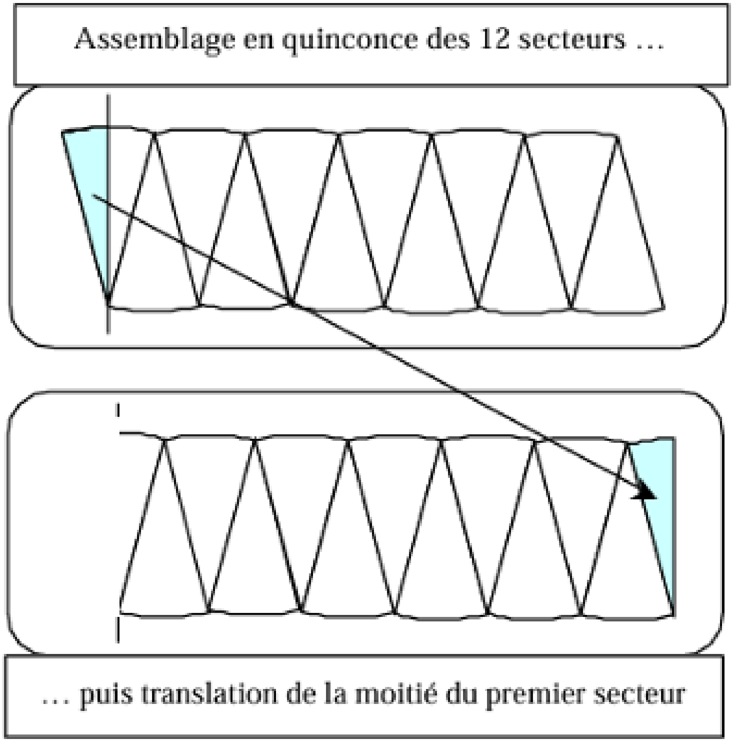


Aire du parallélogramme = Base × Hauteur correspondante

Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

3.Aire d'un disque : activité d'introduction





Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

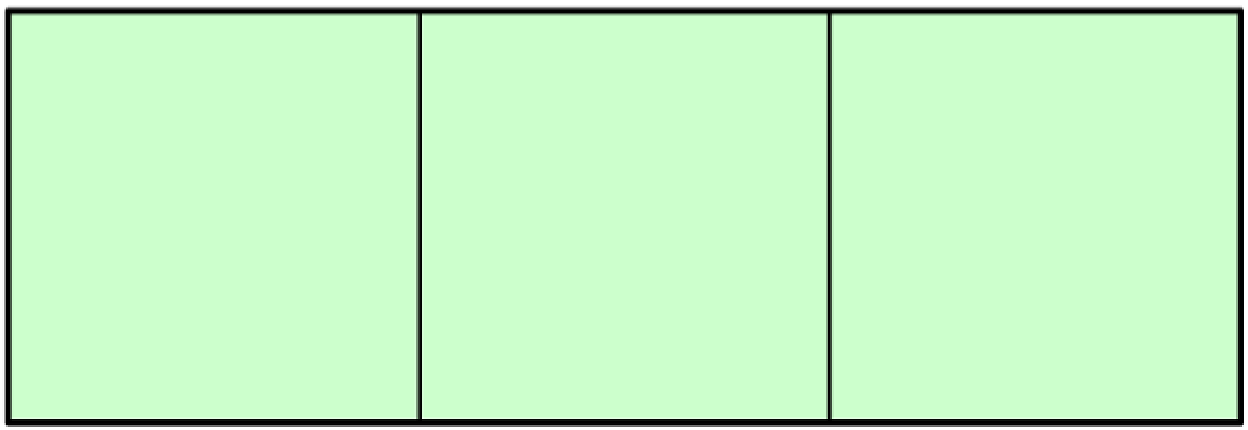
3.Aire d’un disque : activité d’introduction

Activité :

1) Tracer un cercle de 5 cm de rayon puis le découper en 12 secteurs angulaires

2) Réaliser l’assemblage montré ci-dessus.

3) Comparer l’aire de la forme obtenue à celle du rectangle ci-desous constitué de 3 carrés dont le côté est égal au rayon du cercle.

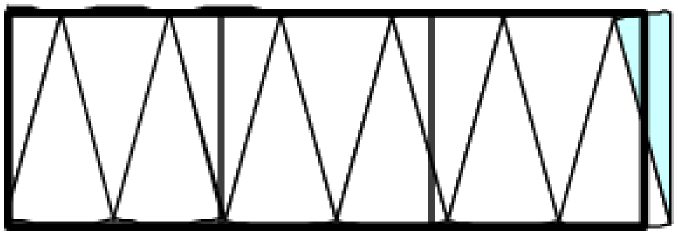


Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l’éducation Académie de Paris

3.Aire d'un disque : activité d'introduction

<u>La superposition</u> fait apparaître
que l'aire du disque
est un peu supérieure
à celle du rectangle constitué
de 3 carrés de côté le rayon du disque



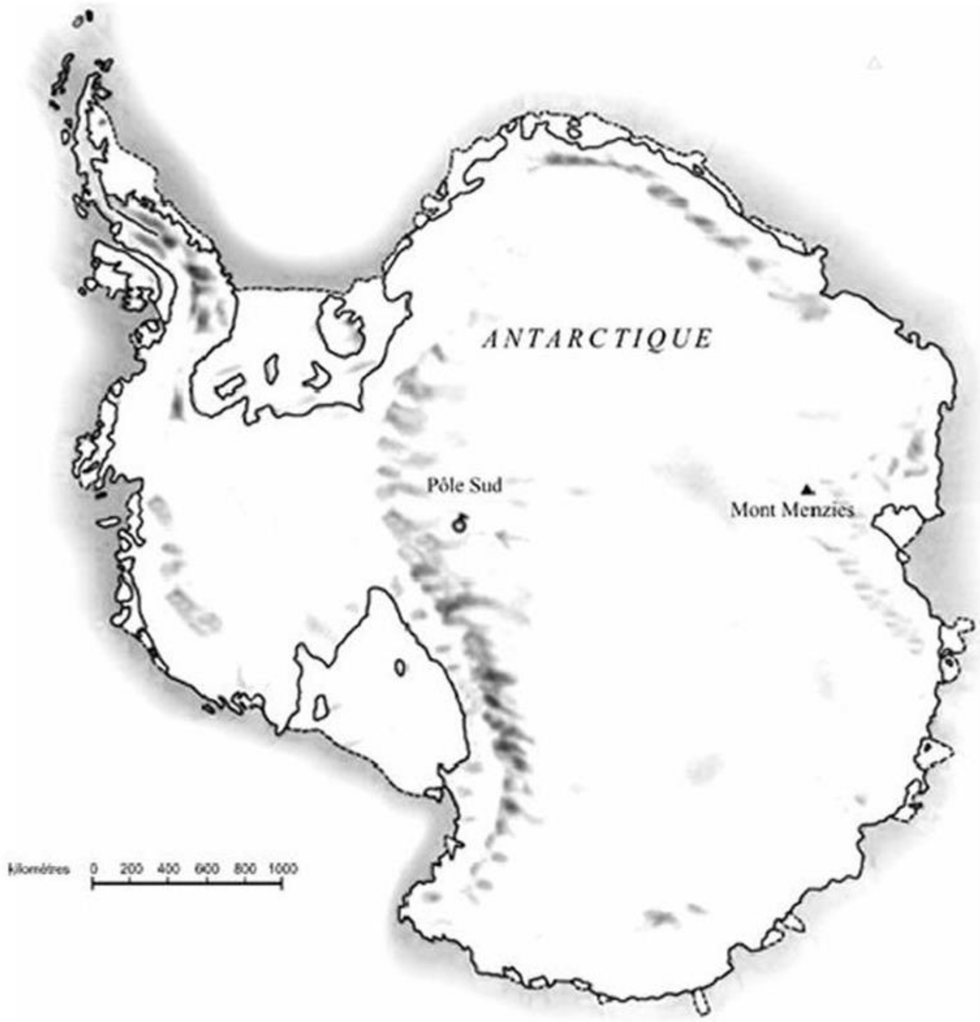
D'où : Aire du disque un peu supérieure à $3\ r^2$.

La formule exacte "Aire du disque = $\pi\ R^2$" ne peut , au niveau collège, qu'être fournie par l'enseignant.

Source : « aires et périmètres » groupe national classe-relais

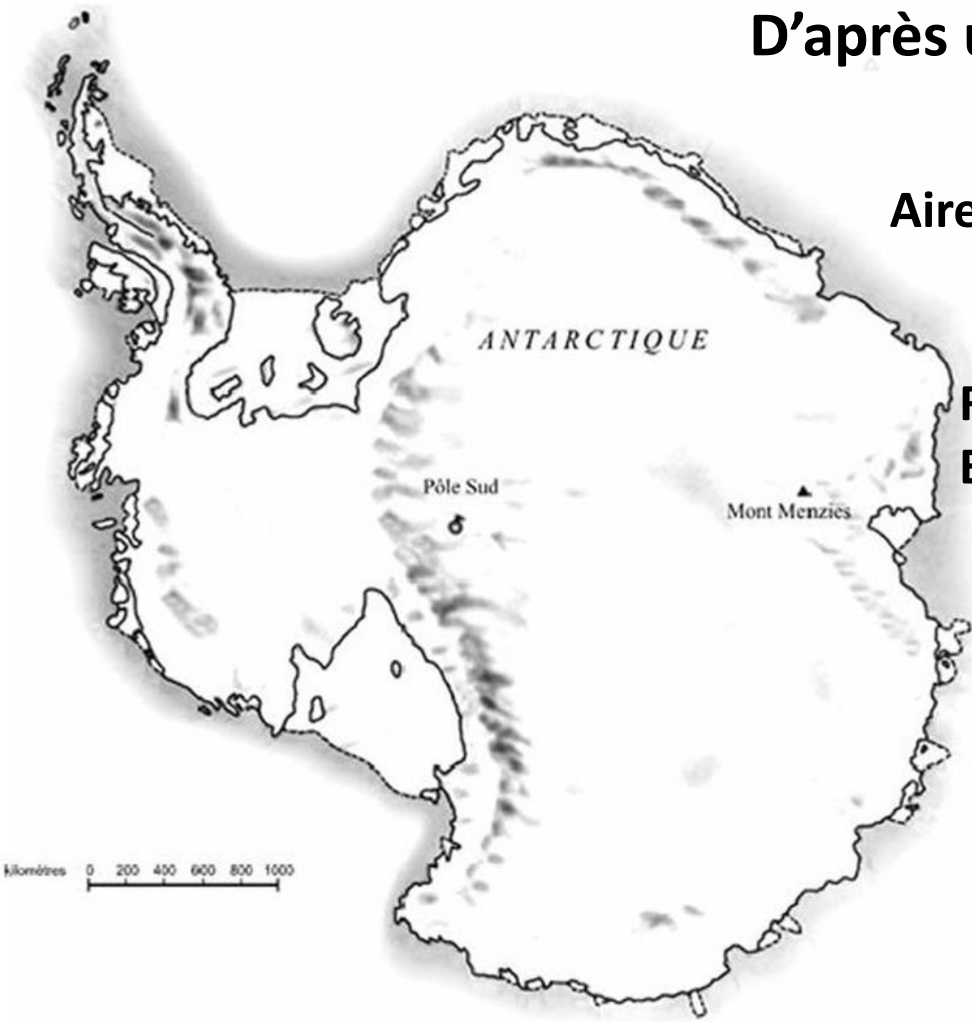
INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Estimation de l’aire de l’Antarctique



Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Estimation de l'aire de l'Antarctique



D'après une évaluation PISA 2003

Aire réelle : 14 000 000 km²

Réponse attendue :
Entre 12 000 000 et 18 000 000 km²

INSPÉ
Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Estimation de l'aire de l'Antarctique

Chapitres concernés : les aires, les échelles

Les notions en jeu :

- unités de mesures d'aires et conversions
- formules d'aires de figures usuelles (carré, triangle, cercle…)
- échelle et techniques de proportionnalité
- lien avec l'agrandissement et la réduction avec effet sur les longueurs et les aires

Estimation de l'aire de l'Antarctique

Méthodes et procédures possibles

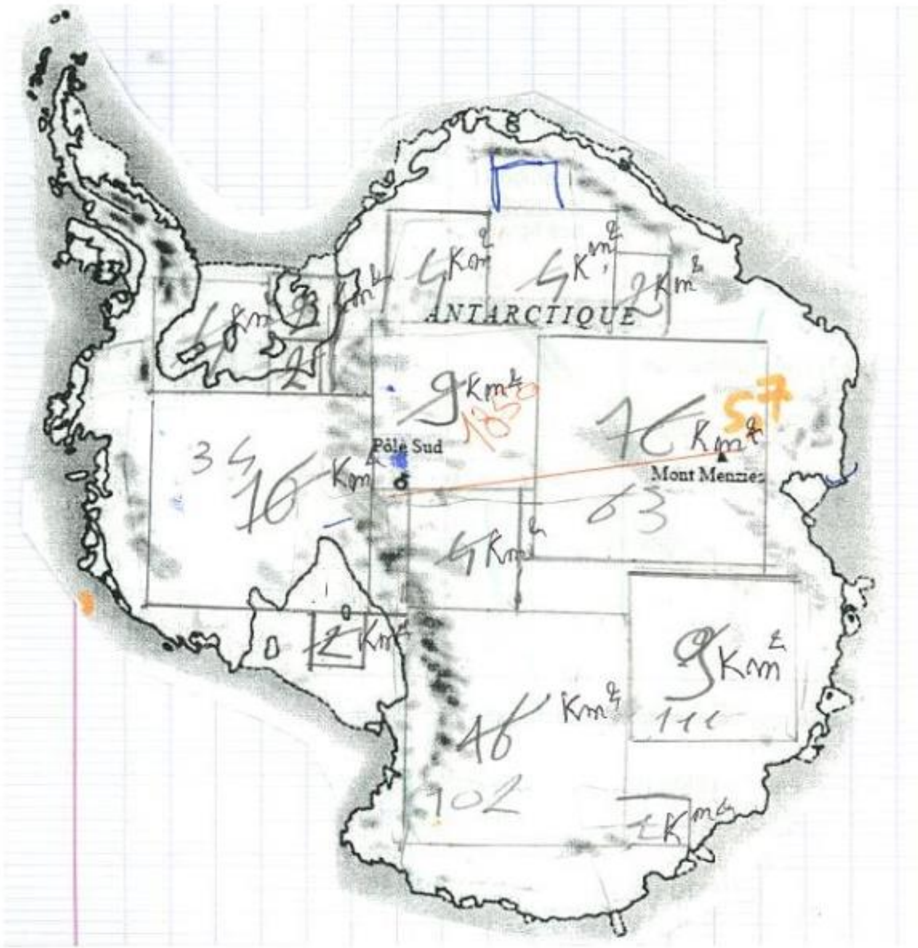
- mesure d'aire par quadrillage ou maillage avec figures élémentaires
- majoration de l'aire de l'Antarctique par une figure usuelle qui la contient, par exemple un disque
- minoration de l'aire de l'Antarctique par une figure usuelle contenue à l'intérieure
- découpage et juxtaposition pour reformer une figure connue
- Conversions de longueurs ou conversions à partir des aires

- Confusion possible avec le périmètre

INSPÉ
Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Académie de Paris

Productions d'élèves

Un partage en carrés inscrits dans le continent Antarctique

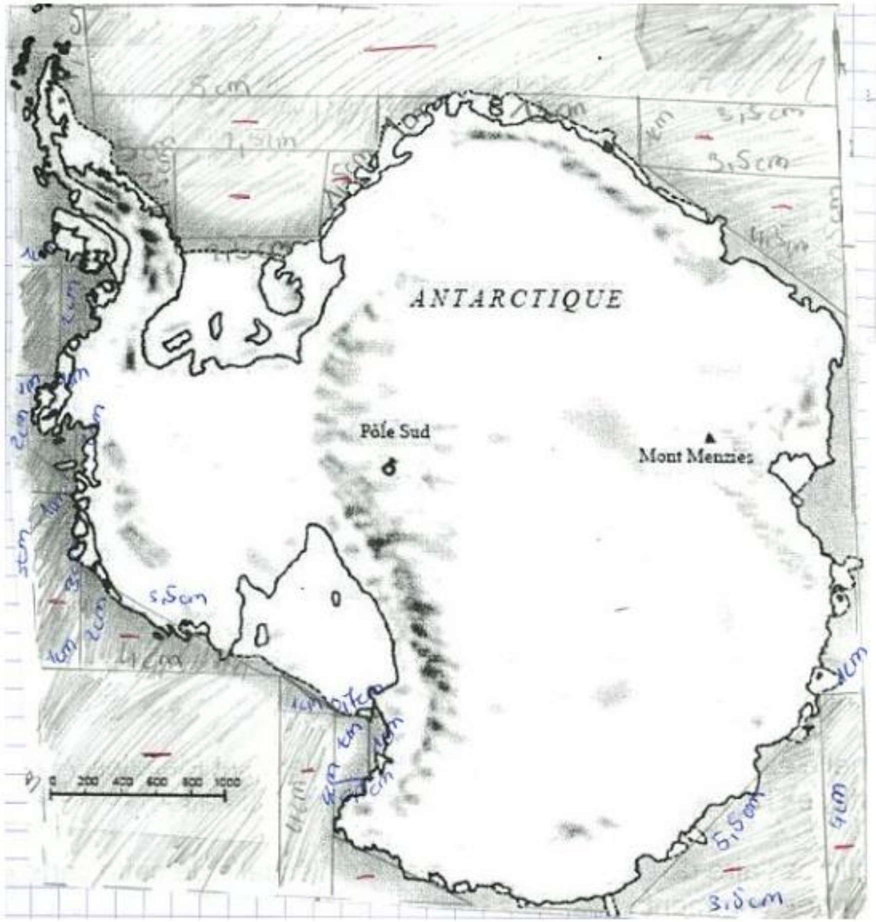


Source : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Productions d'élèves

Cet élève a choisi un carré qui circonscrit le continent puis retranche des rectangles, pour obtenir une aire majorant l'aire du continent.

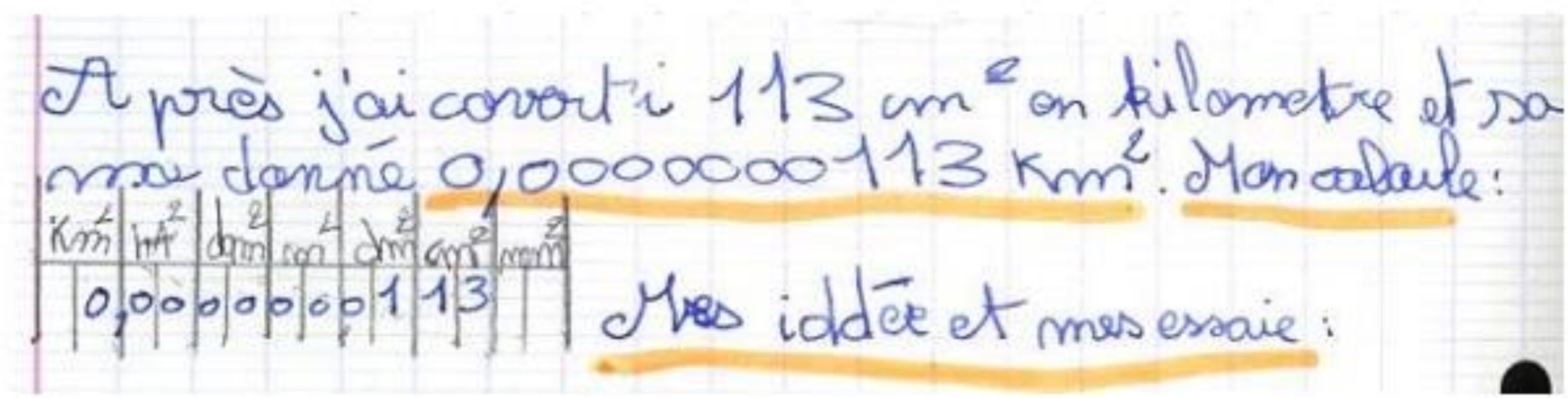


Source : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

INSPE
Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Productions d'élèves

Problèmes dans les conversions d'aires.



Source : https://math.univ-lyon1.fr/dream/