Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

SORBONNE UNIVERSITÉ

DU second degré – Enseigner les mathématiques

Année 2025-2026

RAISONNEMENT ET DEMONSTRATIONS

séance 4

inalco

SORBONNE NOUVELLE

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

Université de Paris

Plan du T.D

1. Retour sur la démonstration de la somme des angles d'un triangle
2. Retour sur le raisonnement par l'absurde au lycée.
3. Retours d'expériences de séances centrées sur le raisonnement et la démonstration

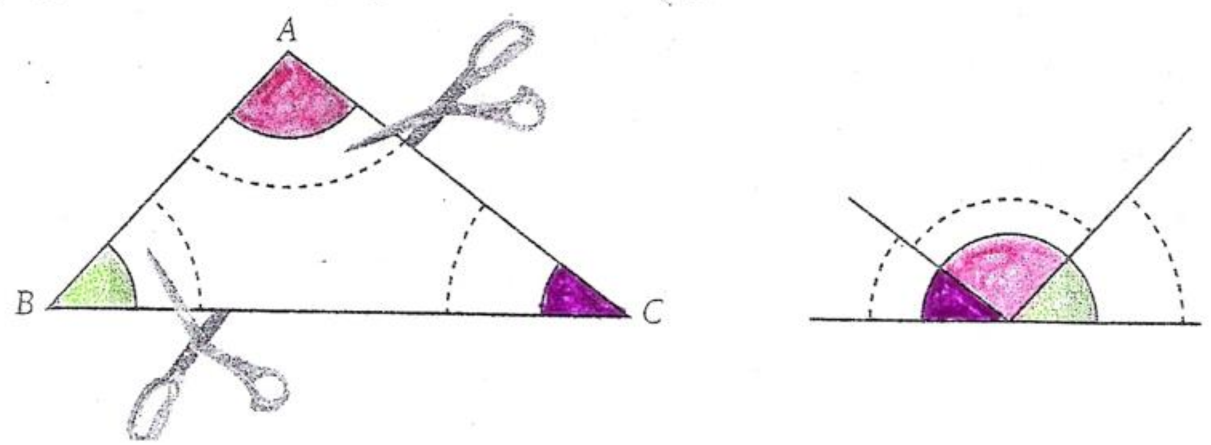
Somme des angles d'un triangle

Retour sur une façon de mettre en œuvre cette démonstration avec les élèves.

Somme des angles d'un triangle

Faire conjecturer la propriété aux élèves.
Insister sur le fait que ce n'est pas une démonstration !

Découverte : découpage des trois angles d'un triangle



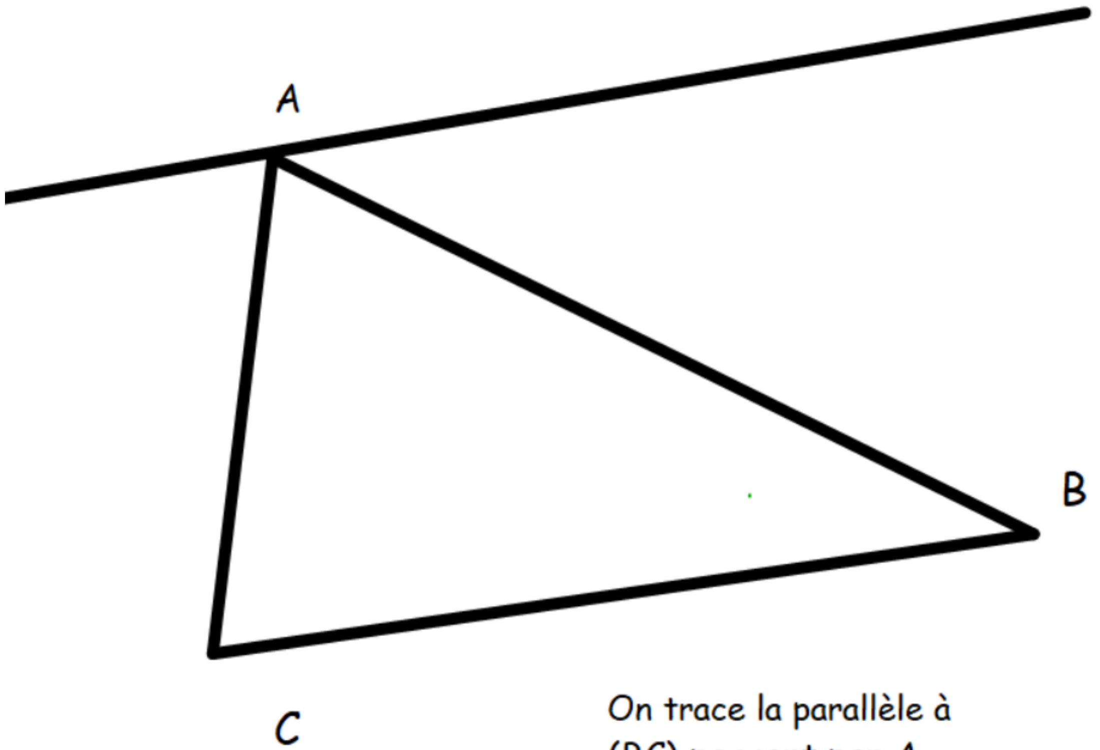
Somme des angles d'un triangle

Propriété énoncée collectivement :

<u>Propriété :</u> Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

Somme des angles d'un triangle

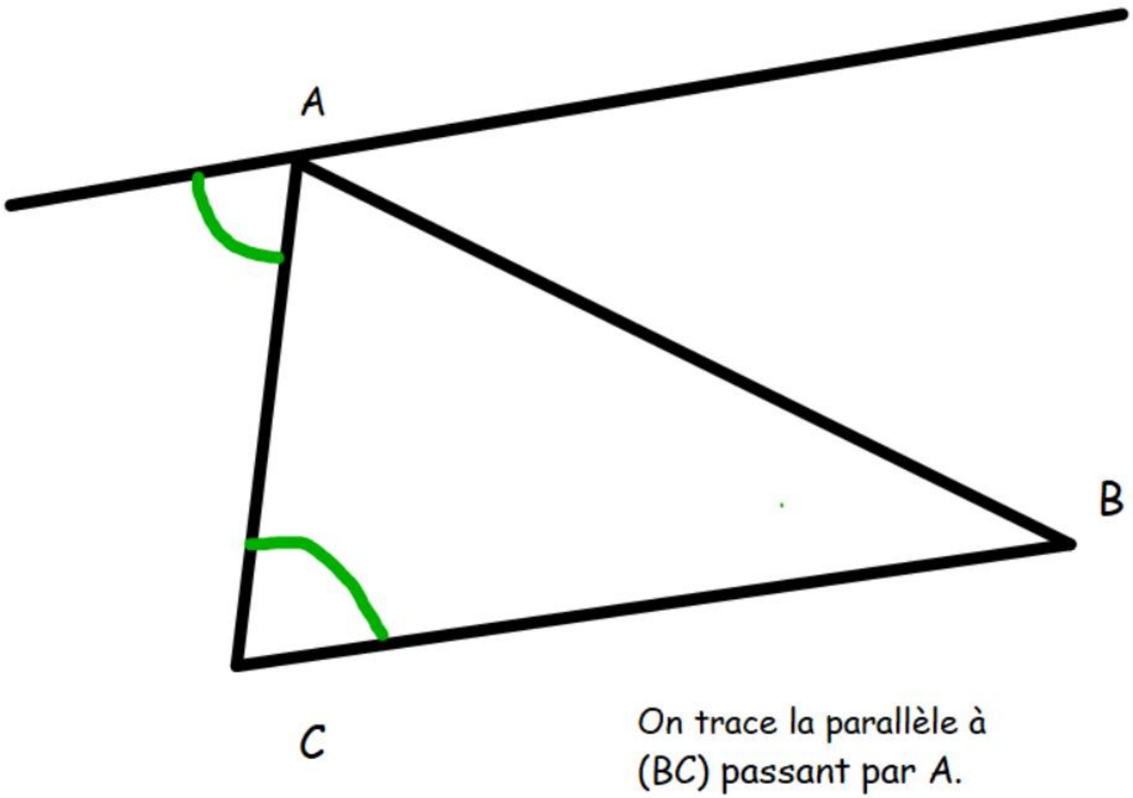
Démonstration orale avec les élèves en projetant les diapos :



On trace la parallèle à (BC) passant par A.

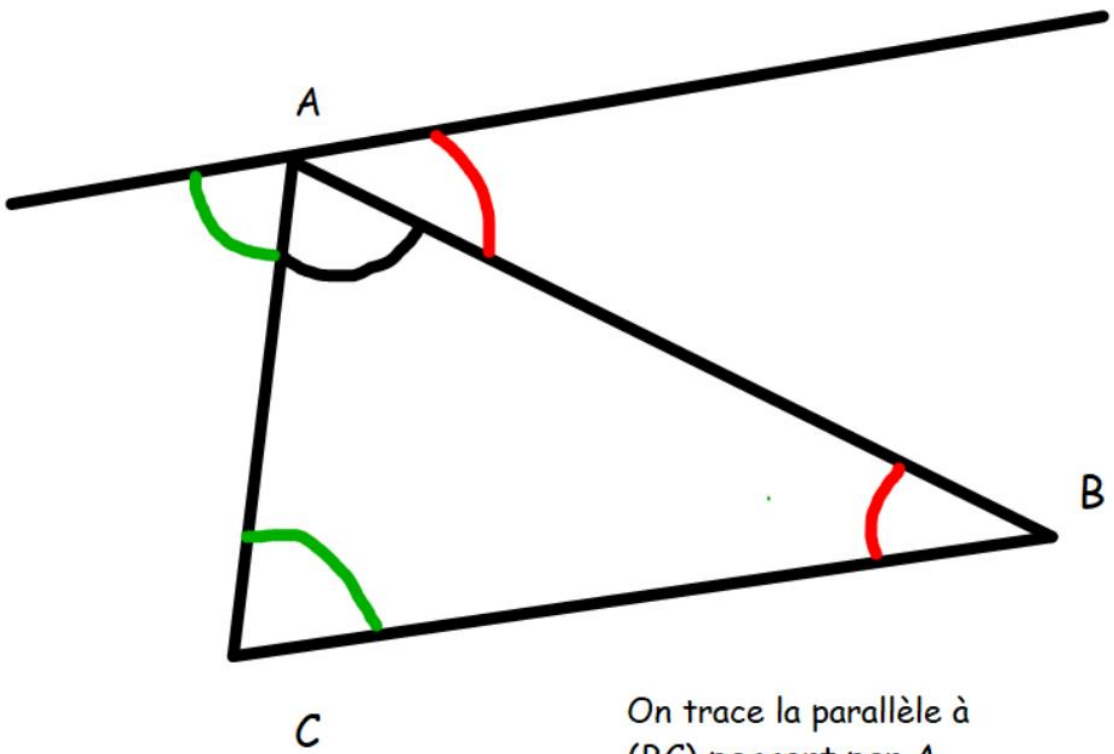
Somme des angles d'un triangle

Démonstration orale avec les élèves



Somme des angles d'un triangle

Démonstration orale avec les élèves



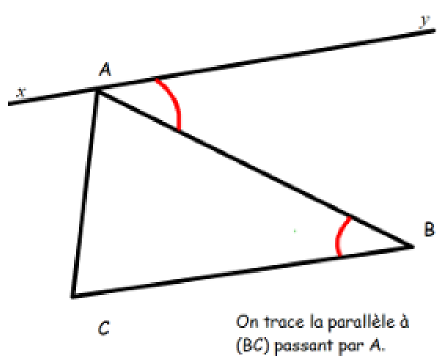
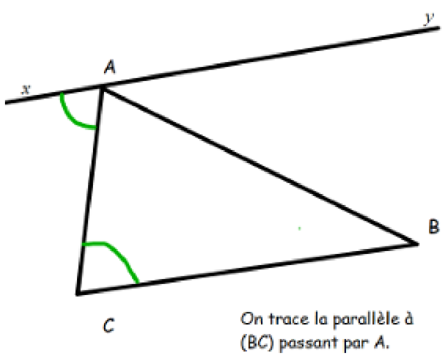
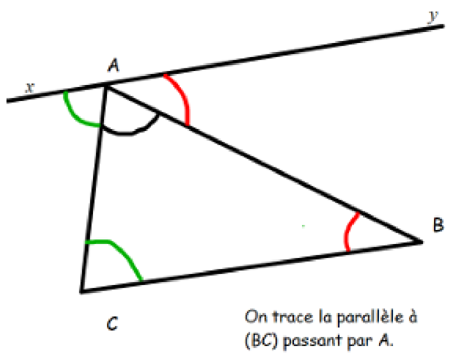
On trace la parallèle à (BC) passant par A.

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Somme des angles d'un triangle

<u>Démonstration de la propriété sur la somme des angles d'un triangle :</u>

Soit ABC un triangle quelconque. On trace (xy) la parallèle à (BC) passant par A.
On veut démontrer que la somme des trois angles du triangle ABC mesure 180°.
Voici la démonstration en images :

<table>
<tr><th>Etape 1</th><th>Etape 2</th><th>Etape 3</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Les droites (xy) et (BC) sont deux parallèles coupées par la sécante (AB). Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles alternes-internes qu'elles déterminent ont la même mesure. Donc les angles alternes-internes $\widehat{yAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux.</td>
<td>Les droites (xy) et (BC) sont deux parallèles coupées par la sécante (AC), donc les angles alternes-internes $\widehat{xAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.</td>
<td>Les trois angles $\widehat{xAB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{yAC}$ sont adjacents et $\widehat{xAy}$ est un angle plat, donc on a :
$\widehat{xAB}+\widehat{BAC}+\widehat{yAC}=180°$ or
$\widehat{yAB}=\widehat{ABC}$ et $\widehat{xAC}=\widehat{ACB}$
d'où $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=180°$</td>
</tr>
</table>

Retour sur le raisonnement par l'absurde

Une première démonstration par l'absurde pouvait être donnée en classe de seconde :

Propriété : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
Démonstration : Démonstration PAR L'ABSURDE.
On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Dans ce cas, il existe un entier relatif a et un entiernaturel n tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. Alors $10^n = 3a$. Or 10^n ne peut pas être un multiple de 3 car la somme de ses chiffres vaut 1 (rappel du critère de divisibiilité par 3). ABSURDE donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Source : Solène Blanc

Retour sur le raisonnement par l'absurde

Un exemple de démonstration au collège : zéro n'a pas d'inverse.

- Proposition

  Le nombre 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.
- Démonstration

  On suppose que 0 a un inverse dans $\mathbb{R}$. On le note a. Par définition de l'inverse, $0 \times a = 1$.

  Or pour tout réel x, $0 \times x = 0$. On en déduit que $0 = 1$. Ce qui est faux.

  On en déduit que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

On a le schéma (1) avec la proposition A : « *zéro n'a pas d'inverse dans* $\mathbb{R}$ » et la proposition C : « $0 = 1$ », qui est fausse.

(1) $\left[(non\ A) \Rightarrow C\right]$ vraie et C fausse ou encore $\left[(non\ A) \Rightarrow C\right]$ et $(non\ C)$

Source : « Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée », Bernard, Gardes, Grenier, Petit x n°108, 2018

Retour sur le raisonnement par l'absurde

Irrationnalité de racine de 2

- Proposition

  $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Démonstration

  On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On sait que tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible : il existe deux entiers p et q premiers entre eux, tels que $\sqrt{2}=\frac{p\,_4}{q}$. On a alors $p^2=2q^2$, p^2 est donc divisible par 2 (pair), et par suite p est pair. Il existe r entier tel que $p=2r$. D'où $q^2=2r^2$, ce qui implique que q est pair. On a alors p et q pairs, en contradiction avec p et q premiers entre eux. Donc p et q n'existent pas et la supposition $\sqrt{2}$ est rationnel est fausse. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On a le schéma (2) avec la proposition A : « *$\sqrt{2}$ est irrationnel* » et la proposition C : « *p et q sont premiers entre eux* ». La proposition $(non\ A)$ est « *il existe deux entiers p et q premiers entre eux et $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$* ».

(2) $\left[(non\ A) \Rightarrow (C \text{ et } (non\ C))\right]$ vraie ou encore $\left[(non\ A) \Rightarrow (C \text{ et } (non\ C))\right]$

Source : « Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée », Bernard, Gardes, Grenier, Petit x n°108, 2018

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Raisonnement par contraposée / raisonnement par l'absurde

- Proposition

  Quel que soit n entier, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

- Démonstration par contraposition

  Raisonner par contraposition revient à établir que quel que soit n entier, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
  Quel que soit n impair, il existe un entier relatif k tel que $n=2k+1$.

  Alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$. Donc n^2 est un nombre impair.

  Ceci démontre que pour tout entier n, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.

- Démonstration par l'absurde

  On suppose qu'il existe n entier tel que n^2 pair et n impair. Puisque n est impair, il existe un entier relatif k tel que $n=2k+1$. On en déduit, comme précédemment, que $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$, donc que n^2 est un nombre impair. On aboutit à deux propositions contradictoires : n^2 est pair et n^2 est impair. La proposition « *il existe n entier tel que n^2 pair et n impair* » est donc fausse.

  Ceci démontre que pour tout entier n, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

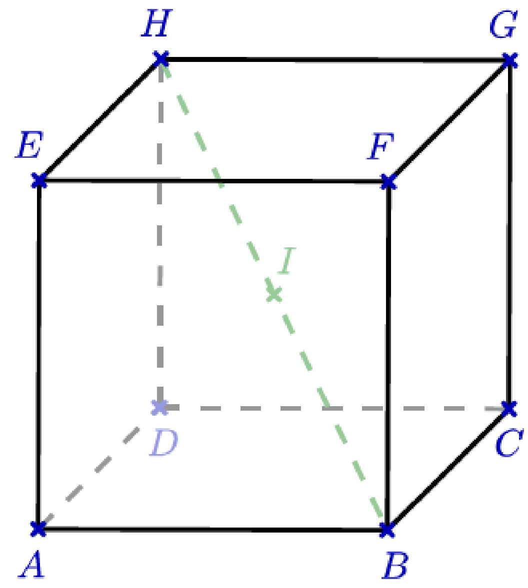
Source : « Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée », Bernard, Gardes, Grenier, Petit x n°108, 2018

Retour sur le raisonnement par l'absurde

Enoncé pour lequel de raisonnement par l'absurde est pertinent (à partir de la seconde).

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[HB]$.

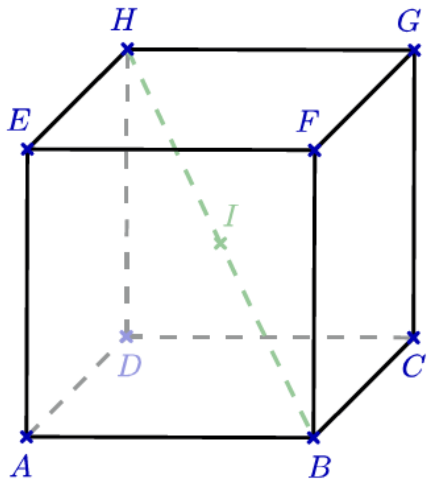
Démontrer que I n'appartient pas au plan (ACH).



Source : « Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée », Bernard, Gardes, Grenier, Petit x n°108, 2018

Retour sur le raisonnement par l'absurde

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[HB]$.
Démontrer que I n'appartient pas au plan (ACH).



Raisonnons par l'absurde. Si I était dans le plan (ACH), alors la droite (HI) serait dans ce plan et donc le point B aussi car B appartient à (HI). Or A, B et C sont dans le même plan, celui de la face de dessous, mais pas H, donc ces points ne peuvent pas être dans un même plan. On a donc une contradiction. On en déduit que le point I n'est pas dans le plan (ACH).

Source : « Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée », Bernard, Gardes, Grenier, Petit x n°108, 2018

Retours d'expériences

Voir les fichiers partagés dans le Moodle.

A vous la parole !