Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

SORBONNE UNIVERSITÉ

DU second degré – Enseigner les mathématiques

Année 2025-2026

RAISONNEMENT ET DEMONSTRATIONS

séance 3

inalco Institut national des langues et civilisations orientales

Université Sorbonne Nouvelle Paris 3

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

Université de Paris

Plan du T.D

1. Mise en œuvre dans les classes
2. Quelques démonstrations en cycle 4
3. Préparation d’une séance centrée sur le raisonnement et la démonstration

Mises en œuvre en classe

Deux mises en œuvre pour une même situation

Première mise en œuvre

Enoncé donné aux élèves

Exercice :

Après avoir essayé plusieurs valeurs de l'entier naturel n, Rachel affirme : ***« n^2 - n + 11 est toujours un nombre premier ».*** Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?
Justifier votre réponse. Laisser apparaître toutes les traces de recherches.

Première mise en œuvre

Niveau : classe de 4ème

Modalités : 25 à 30 minutes, travail individuel avec coups de pouce au cas par cas

Calculatrice : autorisée

Objectif pédagogique : évaluer certaines compétences suivant la grille suivante (donnée aux élèves)

Compétences	Insuffisant	Fragile	Satisfaisant	TB
Calculer				
Chercher				
Raisonner				

Première mise en œuvre

Copie 1 :

$6^2 - 6 + 11 = 36 - 17 = 19$ $\quad$ $8^2 - 8 + 11 = 64 - 19 = 45$ est un nombre pas premier

Nombre pr : $5^2 - 5 + 11 = 25 - 16 = 9$ $\quad$ $3^2 - 3 + 11 = 9 - 14 = -5$ est un nombre pre

Cette affirmation est fausse car lorsque on vérifie cette affirmation avec des nombres premiers ou non premiers on constate que les résultats sont soit un nombres premier ou un nombre pas premier.

Première mise en œuvre

Copie 2 :

$2^2-2+11=13$

$3^2-3+11=17$

$4^2-4+11=23$

$5^2-5+11=31$

$6^2-6+11=41$

$7^2-7+11=53$

$8^2-8+11=67$

$9^2-9+11=83$

$10^2-10+11=101$

$11^2-11+11=121$

$12^2-12+11=143$

J'en conclus que Rachel dit vrai car en utilisant sa formule dans mes differentes recherche j'obti-ent à chaque fois un résultat qui est un nombre premier.

Première mise en œuvre

Copie 3 :

Si $n = 5$

$A = 5 \times 5 - 5 + 11$

$A = 25 - 5 + 11$

$A = 20 + 11$

$A = 31$

Si $n = 3$.

$B = 3 \times 3 - 3 + 11$

$B = 9 - 3 + 11$

$B = 6 + 11$

$B = 17$

Si $n = 6$

$C = 6 \times 6 - 6 + 11$

$C = 36 - 6 + 11$

$C = 30 + 11$

$C = 41$

Si $n = 8$

$D = 8 \times 8 - 8 + 11$

$D = 64 - 8 + 11$

$D = 56 + 11$

$D = 67$

L'affirmation de Rachel " $n^2 - n + 11$ est toujours un nombre premier " est vrai car si on remplace n par 5, 3, 6, 8, 9, 7, 1 on trouvera un nombre premier

Si $n = 9$

$E = 9 \times 9 - 9 + 11$

$E = 81 - 9 + 11$

$E = 72 + 11$

$E = 83$

Si $n = 7$

$F = 7 \times 7 - 7 + 11$

$F = 49 - 7 + 11$

$F = 42 + 11$

$F = 53$

Si $n = 1$

$G = 1 \times 1 - 1 + 11$

$G = 1 - 1 + 11$

$G = 0 + 11$

$G = 11$

Première mise en œuvre

Copie 4 :

$n \times n - n + 11$

$(n=7)$ $7 \times 7 - 7 + 11$

$= 49 - 7 + 11$

$= 42 + 11$

$= 53$

53 est un nombre premier

On prend un nombre qui n'est pas premier

$(n=4)$

$4 \times 4 - 4 + 11$

$= 16 - 4 + 11$

$= 12 + 11$

$= 23$

23 est un nombre premier

$(n=9)$

$9 \times 9 - 9 + 11$

$= 81 - 9 + 11$

$= 72 + 11$

$= 83$

. 83 est un nombre premier

11 est un nombre premier. Donc si l'on additione 11 à un nombre qui n'est pas premier, le résultat sera toujours premier. Ainsi, l'opération $n^2 - n + 11$ est toujours un nombre premier.

$(n=2)$

$2 \times 2 - 2 + 11$

$= 4 - 2 + 11$

$= 2 + 11$

$= 13$

$(n=3)$

$3 \times 3 - 3 + 11$

$= 9 - 3 + 11$

$= 6 + 11$

$= 17$

$(n=6)$

$6 \times 6 - 6 + 11$

$= 36 - 6 + 11$

$= 30 + 11$

$= 41$

$(n=8)$

$8 \times 8 - 8 + 11$

$= 64 - 8 + 11$

$= 56 + 11$

$= 67$

$(n=10)$

$10 \times 10 - 10 + 11$

$= 100 - 10 + 11$

$= 90 + 11$

$= 101$

$(n=11)$

$11 \times 11 - 11 + 11$

$= 121 - 11 + 11$

$= 110 + 11$

$= 121$

$(n=0)$

$0 \times 0 - 0 + 11$

$= 0 - 0 + 11$

$= 0 + 11$

$= 11$

Première mise en œuvre

Copie 5 :

$n = 6$

$= 6^2 \mp 6 + 11 = 41$

$= 36 - 6 + 11$

$= 30 + 11$

$= 41$

41 est un nombre premier

$n = 11$

$= 11^2 - 11 + 11 =$

$= 121 - 11 + 11$

$= 110 + 11$

$= 121$

$121 = 1 \times 121$
$= 11 \times 11$

121 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 11

Donc l'affirmation que $n^2 - n + 11$ est toujours un nombre premier est fausse. (~~n = 11~~ pour $n = 11$ l'affirmation n'est pas valider)

Deuxième mise en œuvre

Enoncé donné aux élèves

Dans l'expression n x n – n + 11,
si on remplace n par n'importe quel entier naturel,
obtient-on toujours un nombre
qui a exactement deux diviseurs ?

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

Deuxième mise en œuvre

Niveau : classe de $5^{ème}$

Modalités : deux séances (voire trois) avec séance préliminaire sur la recherche de diviseurs.
Séance 1 : travail individuel de 5 min, puis travail de groupe avec rédaction collective d'une affiche
Séance 2 : Présentation des affiches par chaque groupe et débats collectifs entre élèves sur les solutions trouvées.

Calculatrice : autorisée

Objectifs pédagogiques :
-Institutionnalisation de la règle : « un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux. »
- Institutionnalisation de la règle : « Des exemples même nombreux ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai. »

Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

➢ **Affiche contenant deux exemples et un essai d'explication du résultat impair (il y a confusion entre impair et premier) :**

A **OUI**

Le résultat n'a toujours que 2 diviseurs car c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est N x N – N) est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que N x N - N égale N multiplié par son premier nombre inférieur :

exemple :

5 x 5 – 5 + 11 = 20 + 11 = 31 5 x 4

8 x 8 – 8 + 11 = 56 + 11 = 67 8 x 7

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

➢ **Affiches contenant deux exemples et une remarque sur le fait que le résultat est premier car 11 est premier (d'où l'idée de changer 11 en 12) :**

B

Exemples $17 \times 17 - 17 + 11 = 303$

$10 \times 10 - 10 + 11 = 79$

Réponse : on obtient toujours un résultat qui n'a que deux diviseurs (lui-même et 1).

Remarque : 11 est un nombre premier. Avec 11, le résultat est un nombre premier. Si on change 11 avec un nombre pair comme 12, le résultat sera un nombre pair (le résultat aura plusieurs diviseurs).

1) ex : $17 \times 17 - 17 + 12 = 288$
nombres pairs

2) ex : $10 \times 10 - 10 + 12 = 88$
nombres pairs

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Académie de Paris

Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

C

On trouvera toujours un nombre qui a deux diviseurs car 11 est un nombre premier et donnera toujours comme résultat un nombre se divisant seulement par lui-même et par 1.

exemple :

* avec 11 : 15 x 15 - 15 + 11 = 221
nombre premier

* avec 12 : 15 x 15 - 15 + 12 = 222
nombre qui n'est pas premier

Nombres : 1 ; 222 ; 2 ; 3 ; 6 ; 37 : ...

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

➢ **Affiche pour laquelle le groupe s'appuie sur des exemples pour prouver que le résultat est premier, et à la fin de la rédaction s'aperçoit que 11 ne convient pas (le début ne sera pas pour autant changé) :**

D

Oui car un entier a au moins deux diviseurs (lui-même et 1). 1 est le seul nombre qui a un seul diviseur (1),

Là, ils auront seulement 2 diviseurs car il faut additionner 11 au nombre choisi pour remplacer n et cela donnera un nombre premier, sauf pour 11.

Ex : 5 x 5 – 5 + 11 = 31 ici 5 = n
il aura comme diviseurs 1 et 31

Ex : 1 x 1 – 1 + 11 = 11 ici 1 = n
il aura comme diviseurs 1 et 11

Ex : 3 x 3 – 3 + 11 = 17 ici 3 = n
il aura comme diviseurs 1 et 17

Avec 11, le nombre final ne sera pas un nombre premier.

Ex : 11 x 11 – 11 + 11 = 121 ici 11 = n
il aura comme diviseurs 1 ; 121 ; 11.

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

➢ **Affiche pour laquelle le groupe a trouvé un contre-exemple :**

E

On n'obtient pas toujours un nombre premier.

Exemple : 11 x 11 – 11 + 11 = 121 qui est divisible par plus de deux nombres : 11 ; 121; 1.

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF

Quelques démonstrations en cycle 4

Voir le document dans le moodle

Et vous, avez-vous déterminé en équipe des démonstrations que tout le monde fait avec les élèves ?

Utilisation d'un exemple générique

Démonstration du produit de deux quotients $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

pour tous nombres a, b, c, d avec b et d non nuls

	a, *b*, *c* et *d* sont quatre nombres quelconques ; *b* et *d* sont différents de zéro.
$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7 pour obtenir 2 donc $7 \times \frac{2}{7} = 2$. De même $3 \times \frac{5}{3} = 5$	$\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier *b* pour obtenir *a* donc $b \times \frac{a}{b} = a$. De même $d \times \frac{c}{d} = c$
Si on multiplie $\frac{2}{7} \times \frac{5}{3}$ par 7×3, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7 \times \frac{2}{7} \times 3 \times \frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5	Si on multiplie $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ par $b \times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b \times \frac{a}{b} \times d \times \frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a \times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7} \times \frac{5}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7×3 pour obtenir 2×5.	On en déduit donc que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b \times d$ pour obtenir $a \times c$.
Donc $\frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{7 \times 3}$.	Donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Démonstration « visuelle »

Démonstration des propriétés du parallélogramme avec les triangles égaux et les angles alternes-internes (« idée de la démonstration »)

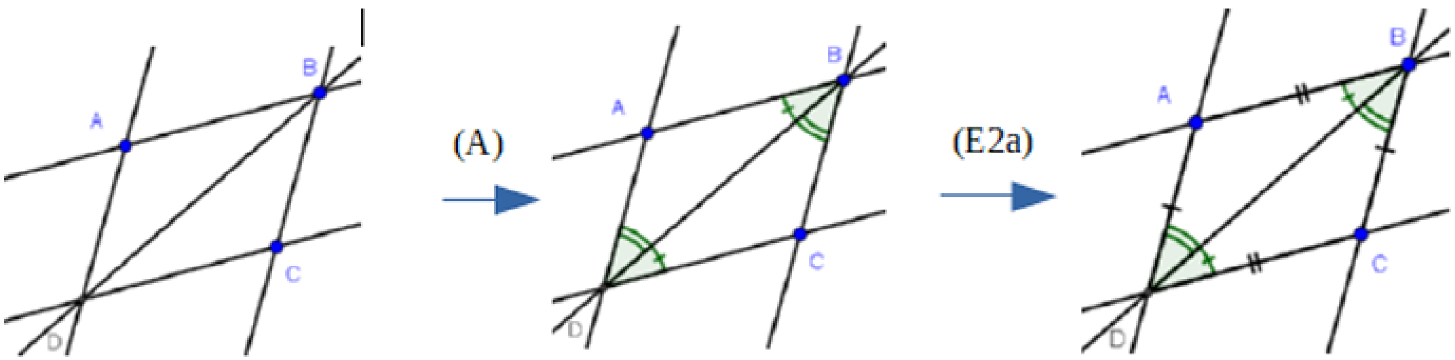
Définition

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

Propriété (P1)

Si un quadrilatère est u parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Idée de démonstration :



Propriété (A)
Si deux angles alternes internes sont formés par deux droites parallèles alors ils ont la même mesure.

Propriété (E2a)
Si deux triangles ont deux à deux un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure alors ils sont égaux.

Conception d’une activité

L’activité doit être **centrée sur le raisonnement et la démonstration** (pas forcément en géométrie)

- Inclure cette séance dans une séquence
- Dégager le (ou les) objectif(s) pédagogique(s), les compétences visées, les modalités
- Anticiper les difficultés, erreurs possibles des élèves

Mise en commun

Déposer la fiche de préparation dans le Moodle « fichiers partagés »

Projeter sa fiche

Présenter aux autres groupes l'activité, avec tous les éléments travaillés (objectifs, compétences, erreurs possibles …)

Pour la prochaine séance

Pour mercredi 10 décembre :

Faire une restitution d'une séance mise en œuvre avec les élèves, centrée sur le raisonnement et la démonstration, si possible pas dans le domaine de la géométrie. Prévoir de récolter des productions d'élèves et/ou photos du tableau.