



DU second degré – Enseigner les mathématiques
Année 2025-2026

RAISONNEMENT ET DEMONSTRATIONS

séance 2



Plan du T.D

1. Les différents types de raisonnements
2. Diversité des productions d'élèves
3. Mise en œuvre dans les classes





« Raisonner », « démontrer »

Raisonner :

- enchaîner des arguments logiques
- justifier des choix
- démontrer
- analyser et exploiter ses erreurs
- mettre à l'essai plusieurs solutions

Extrait de la proposition de nouveaux programmes pour le cycle 4





Les différents types de raisonnement

Quels sont les différents types de raisonnements que vous connaissez ?





Le raisonnement inductif

Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers.

Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie.

Extrait du document ressources Eduscol « raisonner »





Le raisonnement inductif

Exemple :

1) Avec la calculatrice, calculez :

a) $48^2 - 47^2 - 46^2 + 45^2$

b) $82^2 - 81^2 - 80^2 + 79^2$

c) $166^2 - 165^2 - 164^2 + 163^2$

2) Quelle conjecture pouvez-vous faire ?





Le raisonnement déductif

En mathématiques, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape, conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture.

Si j'ai une proposition A et que je sais que (A implique B), alors je déduis que j'ai la proposition B.





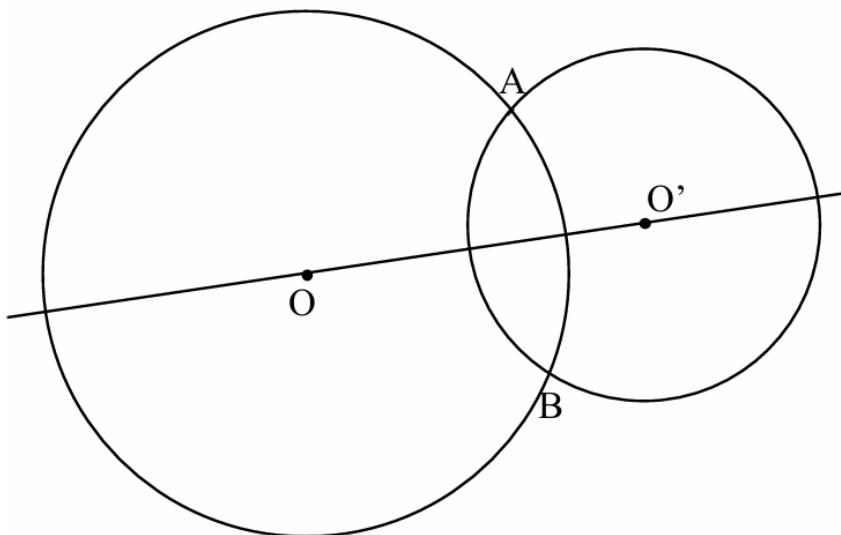
Le raisonnement déductif

Exemple 1 :

Démontrer la conjecture formulée dans l'exemple précédent.

Exemple 2 :

Deux cercles de centres O et O' se coupent en deux points A et B .
Montrer que les droites (OO') et (AB) sont perpendiculaires.





Le raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer que (A implique B), on sépare l'hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas.

Extrait du document ressources Eduscol « raisonner »





Le raisonnement par disjonction des cas

Exemple :

Deux nombres entiers distincts de 0 et de 1 ont pour somme 11. Prouver que lorsqu'on multiplie chacun d'eux par 9, on obtient alors deux nombres formés des mêmes chiffres.





Le raisonnement par contre-exemple

Il consiste à montrer qu'une propriété de la forme « Si A alors B » est fausse en trouvant un élément vérifiant A mais pas B.

Un seul contre-exemple suffit à invalider une propriété quantifiée universellement.





Le raisonnement par contre-exemple

Exemple :

La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84).

Peut-on affirmer que, si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?





Le raisonnement par l'absurde

On veut démontrer une proposition P . Pour le faire, **nous ajoutons aux données du problème la négation de P** . Puis, nous faisons une démonstration avec cette donnée jusqu'à aboutir à une absurdité (c'est-à-dire une **contradiction**).





Le raisonnement par l'absurde

Exemple :

Les quotients suivants sont-ils égaux ?

$$\frac{941 \ 664}{665 \ 857} \quad \text{et} \quad \frac{665 \ 857}{470 \ 832}$$





Le raisonnement par contraposée

La contraposée d'une propriété de la forme
« Si A alors B » est « **Si non B, alors non A** ».
Les deux propriétés ont le même statut logique.

Les raisonnements par l'absurde peuvent souvent
être remplacés par des démonstrations par
contraposée.

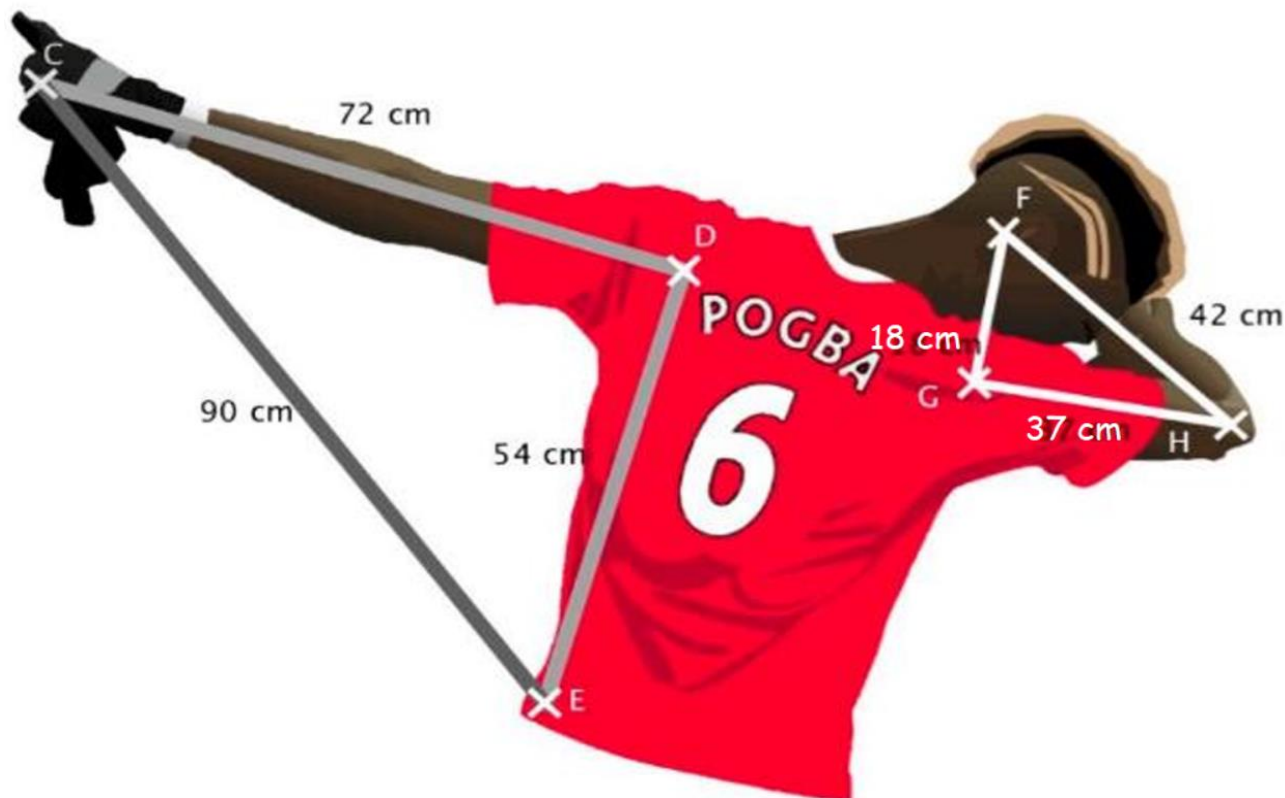




Le raisonnement par contraposée

Le dab de Pogba est-il parfait* ?

*Un dab est considéré comme parfait si les deux triangles ci-dessous sont rectangles.



Le raisonnement par récurrence

Il s'agit d'une démarche particulière liée aux propriétés fondamentales des entiers.

Principe :

Si $P(n)$ est une proposition; si $P(0)$ est vraie et si pour tout entier k , $P(k)$ implique $P(k+1)$ alors, pour tout entier n , $P(n)$ est vraie.

Le raisonnement par récurrence

Exemple :

« Montrer que pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3 »

Le raisonnement par récurrence

Exemple :

« Montrer que pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3 »

On note P_n la proposition : $4^n + 5$ est un multiple de 3.

La proposition P_0 s'énonce : $4^0 + 5$, c'est-à-dire 6, est un multiple de 3, donc P_0 est vraie.

On suppose que P_k est vraie pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que : $4^k + 5$ est un multiple de 3. Il s'agit, dans cette hypothèse, de démontrer que P_{k+1} est vraie, c'est-à-dire que : $4^{k+1} + 5$ est un multiple de 3.

Pour utiliser l'hypothèse de récurrence, on fait *apparaître* 4^k dans 4^{k+1} en écrivant :

$4^{k+1} = 4 \times 4^k$. Or $4^k + 5$ est un multiple de 3; on peut donc écrire $4^k + 5 = 3p$, avec p entier naturel; d'où : $4^k = 3p - 5$.

Ainsi : $4^{k+1} + 5 = 4(3p - 5) + 5 = 12p - 20 + 5 = 3(4p - 5)$.

Cette égalité prouve que $4^{k+1} + 5$ est un multiple de 3. Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie pour tout n ; cela veut dire que, pour tout $n \geq 0$, $4^n + 5$ est un multiple de 3. □

Extrait de « La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée » de J.Houdebine, Hachette éducation

Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est un type de raisonnement qui permet de **démontrer l'existence et l'unicité d'une solution** à un problème mathématique et permet aussi de déterminer cette solution. Il se compose de deux parties :

- 1) Analyse** : on suppose qu'une solution au problème existe et on déduit des propriétés qu'elle doit nécessairement vérifier. Ce faisant, on prouve que si une telle solution existe, elle est nécessairement égale à une certaine solution (ceci assure l'unicité).
- 2) Synthèse** : on considère la solution identifiée dans la partie analyse et on vérifie qu'elle a bien les propriétés voulues (ceci assure l'existence).



Le raisonnement par analyse-synthèse

Exemple :

« Montrer que toute fonction définie sur \mathbb{R} se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. »





Le raisonnement par analyse-synthèse

Analyse

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Soit g une fonction paire et h une fonction impaire telles que $f = g + h$.
Déterminons g et h .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad (1)$$

Or, g est paire et h est impaire, donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = g(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = -h(x)$$

Donc, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = g(x) - h(x) \quad (2)$$



Le raisonnement par analyse-synthèse

En effectuant les opérations $\frac{(1) + (2)}{2}$ et $\frac{(1) - (2)}{2}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ce qui prouve l'unicité de la décomposition si elle existe.

On remarque d'ailleurs que nos fonctions g et h ne dépendent que de f .

Le raisonnement par analyse-synthèse

Synthèse

Soit g et h les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

On vérifie aisément que $f = g + h$ et que g est paire et h impaire.

D'où l'existence de la décomposition.

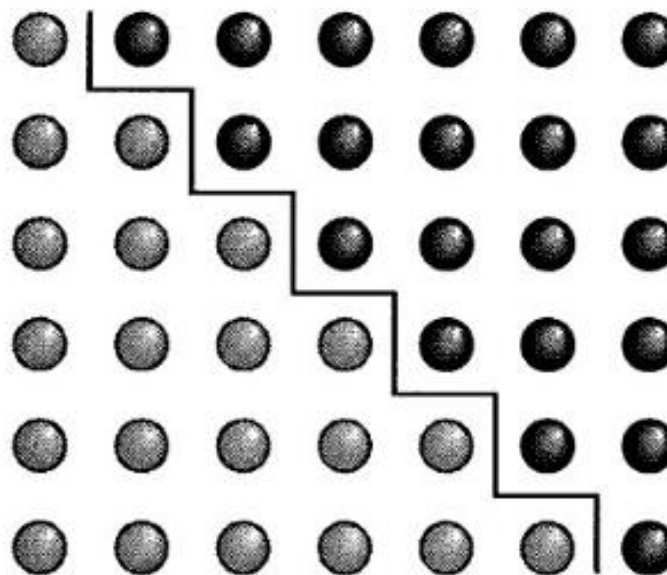
Ce qui achève le raisonnement par analyse-synthèse.



D'autres types de raisonnement

Les preuves sans mots ou démonstrations visuelles

Exemple :



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$





Des raisonnements en probabilités

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.

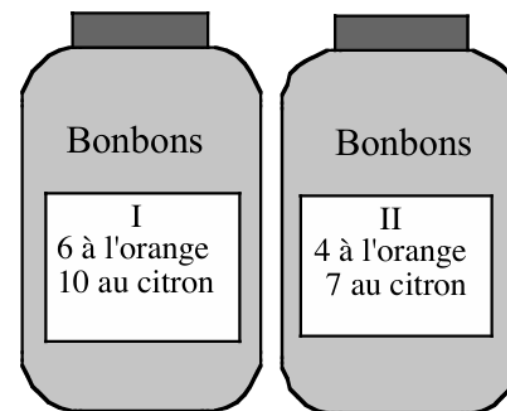
Dans un deuxième pot, elle met 4 bonbons à l'orange et 7 au citron.

Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon. Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

« Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur. »

Julien réfléchit et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ? Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.





Des raisonnements en probabilités

Quand on lance simultanément deux dés en additionnant les nombres présents sur les deux faces supérieures, la probabilité d'obtenir dix est-elle la même que celle d'obtenir neuf ?



Des raisonnements en statistiques

L'alphabet comprend 26 lettres.

Pour décoder des messages codés, on peut compter la fréquence d'apparition d'une lettre. En français, c'est la lettre e qui apparaît le plus souvent, sa fréquence d'apparition est d'environ 18 %.

Voici un petit texte codé à déchiffrer :



Voici les fréquences d'apparition de chaque lettre dans ce texte :

Lettre	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Fréquence (en %)	8	4	8	8	20	0	4	0	0	0	0	0	4

Lettre	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Fréquence (en %)	0	12	0	0	8	8	4	4	8	0	0	0	0

- À l'aide de ces informations, décoder le message.



Des exemples des différents raisonnements

Consigne :

Examiner les exercices suivants et trouver le(s) type(s) de raisonnements auxquels ils appartiennent et le(s) niveau(x) de classe où l'on peut les proposer.





Diversité des productions d'élèves

Énoncé de l'exercice :

Quel est le dernier chiffre de 2 exposant 50 ?

Consigne : Rédiger la solution à cet exercice que vous proposeriez à vos élèves.





Diversité des productions d'élèves

- Élève A :

$$2^{50} = (2^{10})^5$$
$$= 1024^5$$
$$4^5 = 1024$$

Donc 2^{50} se termine par 4.



Diversité des productions d'élèves

- Élève B :

III Pour que le calcul soit plus simple, je fais :

$$\begin{array}{r}
 2^{25} \times 2^{25} = 33554432 \\
 \times 33554432 \\
 \hline
 \dots 4 \\
 \dots 0 \\
 \dots 00
 \end{array}$$

2^{50} se fini par 4

Diversité des productions d'élèves

■ Élève C :

Quand on multiplie indéfiniment 2 par 2 on obtient toujours une succession de série de chiffres se terminant par 2, 4, 8, 6.
Donc 2^{50} est une succession de 12 séries. Il reste encore à multiplier 2 fois par 2.
Donc 2^{50} se terminera par 4.

Diversité des productions d'élèves

■ Élève D :

Handwritten student work on grid paper. The left column lists powers of 2 from 2^1 to 2^{10} . The right column contains handwritten notes in French. The notes state that the same digits repeat every 4 units in the interval of 4, and that the student has taken account of 4 in 4 by starting from 2^2 . A note also states that 2^{50} ends with 24.

$2^1 = 2$	Les mêmes chiffres se répètent à un intervalle de 4
$2^2 = 4$	
$2^3 = 8$	puissances. j'ai donc compté de 4 en 4 en partant de
$2^4 = 16$	
$2^5 = 32$	2^2 pour savoir quel chiffre il y aurait à 2^{50} .
$2^6 = 64$	
$2^7 = 128$	2^{50} se termine par 24
$2^8 = 256$	
$2^9 = 512$	
$2^{10} = 1024$	

Diversité des productions d'élèves

- Élève E :

$$2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$$
$$\text{Alors } 2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32$$
$$= 1024$$

$$\text{donc } 2^{50} = \underline{1024} \times \underline{1024} \times \underline{1024} \times \underline{1024} \times \underline{1024}$$

 2^{50} se termine par 4.

Diversité des productions d'élèves

- Élève F :

$$\text{IV } 2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$$

Puisque il n'y a que le dernier chiffre qui nous intéresse, je multiplie que les derniers chiffres entre eux.

$$= 102(4) \times 102(4) \times 102(4) \times 102(4) \times 102(4).$$

$$1(6) \times 1(6) \times 4$$

$$3(6) \times 4$$

$$2(4)$$

2^{50} se termine donc par un 4.

Diversité des productions d'élèves

Analyse des productions : deux catégories de raisonnement

- 1) Elèves A, B, E et F : **Décomposer la puissance** en utilisant des diviseurs de 50 qui permettent des calculs plus faciles et les propriétés des puissances. Méthode élémentaire, efficace, qui constitue une démonstration.
- 2) Elèves C et D : **raisonnement inductif**. Les élèves ont expérimenté sur les premières puissances de 2 et ont conjecturé que la suite des derniers chiffres est périodique. En toute rigueur, ce n'est pas une démonstration (il manque un raisonnement déductif, par récurrence).



Diversité des productions d'élèves

Énoncé de l'exercice :

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, si $|x| + 2x = 3$ alors $x > 0$

Consigne : Rédiger votre propre solution à cet exercice.



Diversité des productions d'élèves

On considère 2 cas :

* Si x est positif :

$$|x| = x$$

- donc si $x + 2x = 3$

- alors $3x = 3$

$$x = 1 > 0$$

proposition vraie.

* Si x est négatif :

$$|+x| = -x$$

- donc si $-x + 2x = 3$

- alors $x = 3 > 0$

proposition vraie.

Que pensez-vous
de cette
démonstration ?

*Extrait de « La démonstration,
écrire des mathématiques au
collège et au lycée » de
J.Houdebine, Hachette éducation*



Diversité des productions d'élèves

Critiques possibles

- La conclusion est en contradiction avec l'hypothèse.
- Une partie inutile : inutile de démontrer « $x > 0$ » dans le cas où x est positif.
- Une proposition non énoncée : « proposition vraie » . De quelle proposition s'agit-il ?

Ce texte est une démonstration acceptable ...

- L'élève a fait un raisonnement par disjonction des cas, pertinent en présence d'une valeur absolue.
- Pas d'erreurs dans les calculs, impossible de localiser une erreur précise.
- Ce qui pose problème est plus au niveau du sens et de la vérité des propositions.



Diversité des productions d'élèves

DES DÉMONSTRATIONS PLUS COURANTES

► **Problème**

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, si $|x| + 2x = 3$ alors $x > 0$.

► **Démonstration A : un raisonnement par l'absurde**

Soit x un élément de \mathbb{Z} . Supposons que $|x| + 2x = 3$. Raisonnons par l'absurde en supposant que x est négatif. On a alors $|x| = -x$. Donc $-x + 2x = 3$, et $x = 3$. On aboutit à une contradiction.

► **Démonstration B : résoudre une équation**

Le but de cet exercice est de montrer que les solutions de l'équation $|x| + 2x = 3$ sont toutes strictement positives. Cherchons donc les solutions de cette équation. Cherchons d'abord les solutions positives. Dans ce cas $|x| = x$ et la résolution donne $x = 1$.

Cherchons les solutions négatives. Dans ce cas $|x| = -x$ et la résolution de l'équation donne $x = 3$ qui n'appartient pas au domaine considéré. Il n'y a donc pas de solution négative.

En résumé, 1 est l'unique solution de notre équation; elle n'a bien que des solutions strictement positives. □

Extrait de « La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée » de J.Houdebine, Hachette éducation

Diversité des productions d'élèves

UNE AUTRE RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION LITIGIEUSE

Soit x un élément de \mathbb{Z} . Pour démontrer notre proposition on considère deux cas :

► **Premier cas**

On suppose x positif ou nul ; dans ce cas $|x| = x$. Si l'on suppose que $|x| + 2x = 3$, on obtient par le calcul $x = 1$ et x est bien strictement positif. Donc dans ce cas si $|x| + 2x = 3$ on a $x > 0$.

► **Second cas**

On suppose maintenant que x est négatif ; dans ce cas $|x| = -x$. Si l'on suppose que $|x| + 2x = 3$, on obtient par le calcul $x = 3$ et x est donc strictement positif. Donc dans ce cas si $|x| + 2x = 3$ on a $x > 0$.

Ainsi la proposition « $|x| + 2x = 3$ implique $x > 0$ » est démontrée dans tous les cas. □

Extrait de « La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée » de J.Houdebine, Hachette éducation



Mises en œuvre en classe

Deux mises en œuvre pour
une même situation



Première mise en œuvre

Énoncé donné aux élèves

Exercice :

Après avoir essayé plusieurs valeurs de l'entier naturel n , Rachel affirme : « $n^2 - n + 11$ est toujours un **nombre premier** ». Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Justifier votre réponse. Laisser apparaître toutes les traces de recherches.



Première mise en œuvre

Niveau : classe de 4^{ème}

Modalités : 25 à 30 minutes, travail individuel avec coups de pouce au cas par cas

Calculatrice : autorisée

Objectif pédagogique : évaluer certaines compétences suivant la grille suivante (donnée aux élèves)

Compétences	Insuffisant	Fragile	Satisfaisant	TB
Calculer				
Chercher				
Raisonner				





Deuxième mise en œuvre

Énoncé donné aux élèves

Dans l'expression $n \times n - n + 11$,
si on remplace n par n'importe quel entier naturel,
obtient-on toujours un nombre
qui a exactement deux diviseurs ?

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arzac,
Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF



Deuxième mise en œuvre

Niveau : classe de 5^{ème}

Modalités : deux séances avec séance préliminaire sur la recherche de diviseurs.

Séance 1 : travail individuel de 5 min, puis travail de groupe avec rédaction collective d'une affiche

Séance 2 : Présentation des affiches par chaque groupe et débats collectifs entre élèves sur les solutions trouvées.

Calculatrice : autorisée

Objectifs pédagogiques :

- Institutionnalisation de la règle : « un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux. »
- Institutionnalisation de la règle : « Des exemples même nombreux ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai. »

Deuxième mise en œuvre

Analyse des affiches

➤ **Affiche contenant deux exemples et un essai d'explication du résultat impair (il y a confusion entre impair et premier) :**

A OUI

Le résultat n'a toujours que 2 diviseurs car c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est $N \times N - N$) est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que $N \times N - N$ égale N multiplié par son premier nombre inférieur :

exemple :

$5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31$	5×4
$8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67$	8×7

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF



Deuxième mise en œuvre

Exemples d'affiches :

➤ **Affiches contenant deux exemples et une remarque sur le fait que le résultat est premier car 11 est premier (d'où l'idée de changer 11 en 12) :**

B

Exemples $17 \times 17 - 17 + 11 = 303$
 $10 \times 10 - 10 + 11 = 79$

Réponse : on obtient toujours un résultat qui n'a que deux diviseurs (lui-même et 1).

Remarque : 11 est un nombre premier. Avec 11, le résultat est un nombre premier. Si on change 11 avec un nombre pair comme 12, le résultat sera un nombre pair (le résultat aura plusieurs diviseurs).

1) ex : $17 \times 17 - 17 + 12 = 288$
 nombres pairs

2) ex : $10 \times 10 - 10 + 12 = 88$
 nombres pairs

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arzac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF





Deuxième mise en œuvre

C

On trouvera toujours un nombre qui a deux diviseurs car 11 est un nombre premier et donnera toujours comme résultat un nombre se divisant seulement par lui-même et par 1.

exemple :

* avec 11 : $15 \times 15 - 15 + 11 = 221$

nombre premier

* avec 12 : $15 \times 15 - 15 + 12 = 222$

nombre qui n'est pas premier

Nombres : 1 ; 222 ; 2 ; 3 ; 6 ; 37 : ...

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arzac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF



Deuxième mise en œuvre

➤ **Affiche pour laquelle le groupe s'appuie sur des exemples pour prouver que le résultat est premier, et à la fin de la rédaction s'aperçoit que 11 ne convient pas (le début ne sera pas pour autant changé) :**

D

Oui car un entier a au moins deux diviseurs (lui-même et 1). 1 est le seul nombre qui a un seul diviseur (1),

Là, ils auront seulement 2 diviseurs car il faut additionner 11 au nombre choisi pour remplacer n et cela donnera un nombre premier, sauf pour 11.

Ex : $5 \times 5 - 5 + 11 = 31$ ici $5 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 31

Ex : $1 \times 1 - 1 + 11 = 11$ ici $1 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 11

Ex : $3 \times 3 - 3 + 11 = 17$ ici $3 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 17

Avec 11, le nombre final ne sera pas un nombre premier.

Ex : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ ici $11 = n$
il aura comme diviseurs 1 ; 121 ; 11.

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac, Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF



Deuxième mise en œuvre

➤ **Affiche pour laquelle
le groupe a trouvé un
contre-exemple :**

E

On n'obtient pas toujours un nombre premier.
Exemple : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ qui est
divisible par plus de deux nombres : 11 ;
121; 1.

Extrait de « Initiation au raisonnement déductif au collège », Arsac,
Chapiron, Colonna, Guichard, Mante, PUF



Pour les prochaines séances

Pour le mercredi 26 novembre :

Apportez vos progressions annuelles

Réfléchir à des idées d'activités centrées sur le raisonnement et la démonstration (pas forcément en géométrie). Apporter des ressources, ordinateurs.

Pour mercredi 10 décembre :

Faire une restitution d'une séance mise en œuvre avec les élèves, centrée sur le raisonnement et la démonstration, si possible pas dans le domaine de la géométrie. Prévoir de récolter des productions d'élèves et/ou photos du tableau.