# Géométrie

guillaume.didier@inspe-paris.fr

# INTRODUIRE DES CONCEPTS PAR DES PROBLÈMES

**Consigne 5 :**

1) Choisir l'un des problèmes de la liste puis expliquer pourquoi peut-on affirmer qu'il constitue un bon problème pour introduire la notion visée.

2) Décrire vos interrogations et/ou vos difficultés concernant sa mise en œuvre.

**THÉORÈME DE THALES**

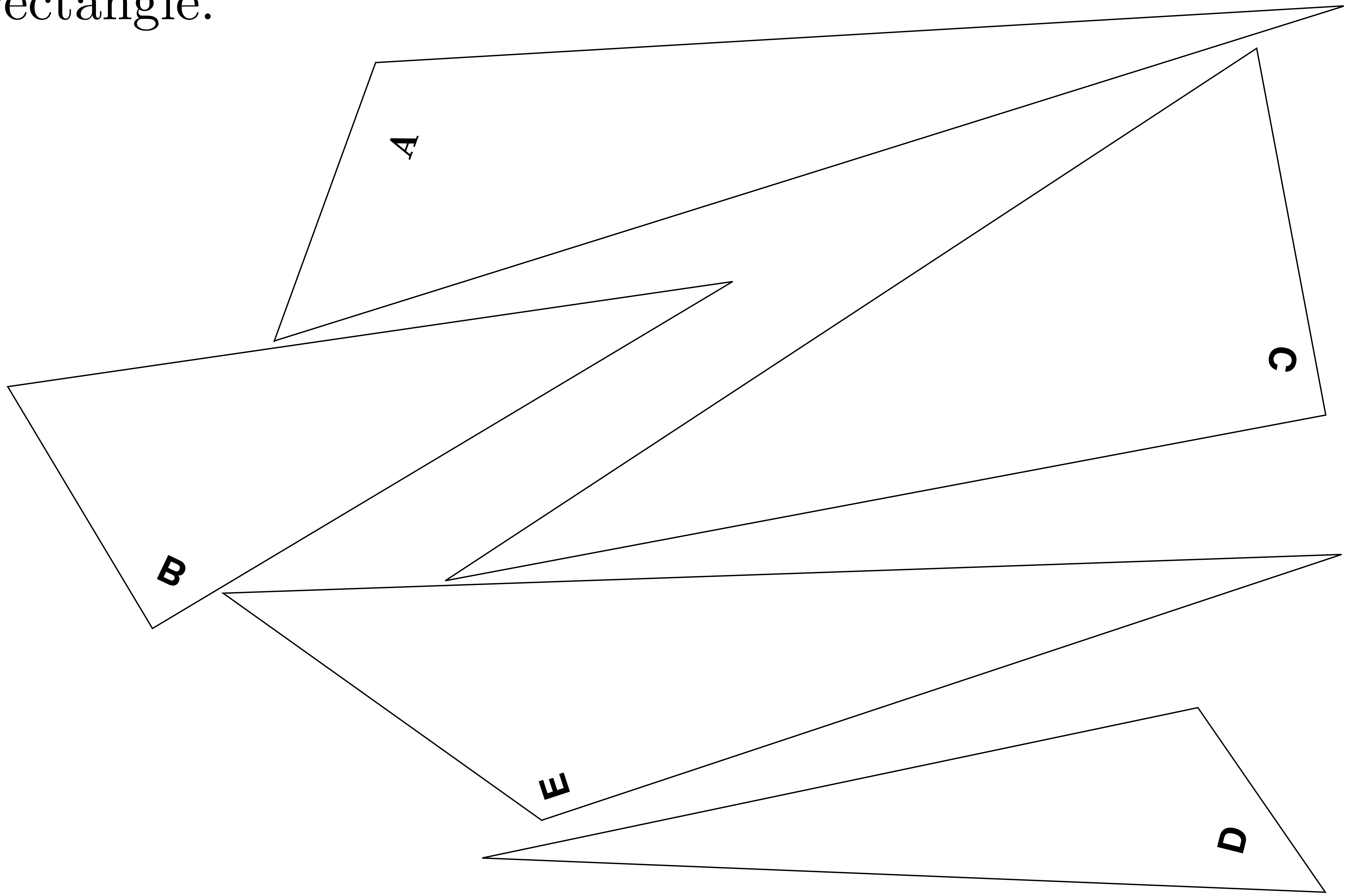
**CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES**

**LA SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE**

**THÉORÈME DE PYTHAGORE**

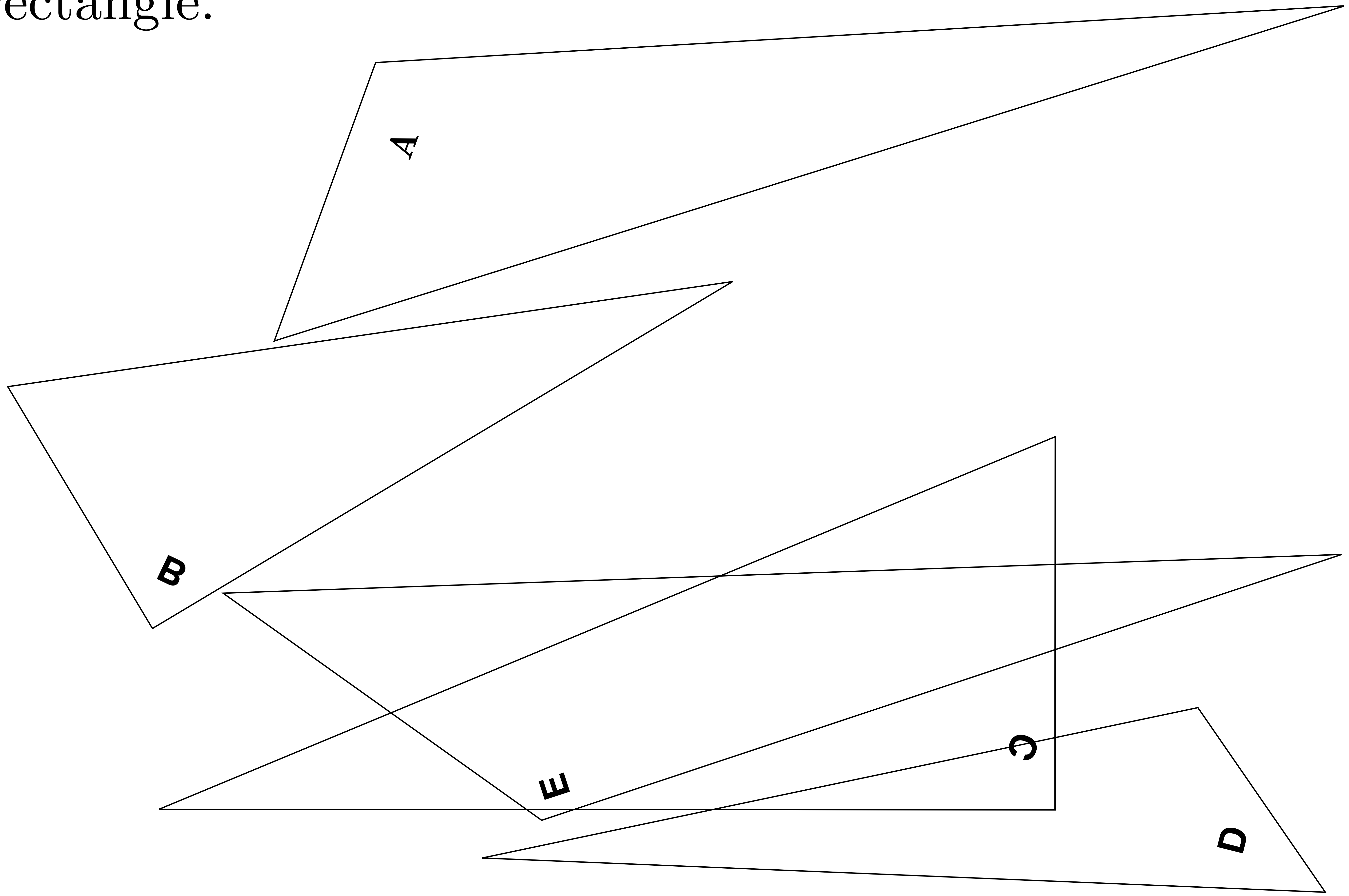
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



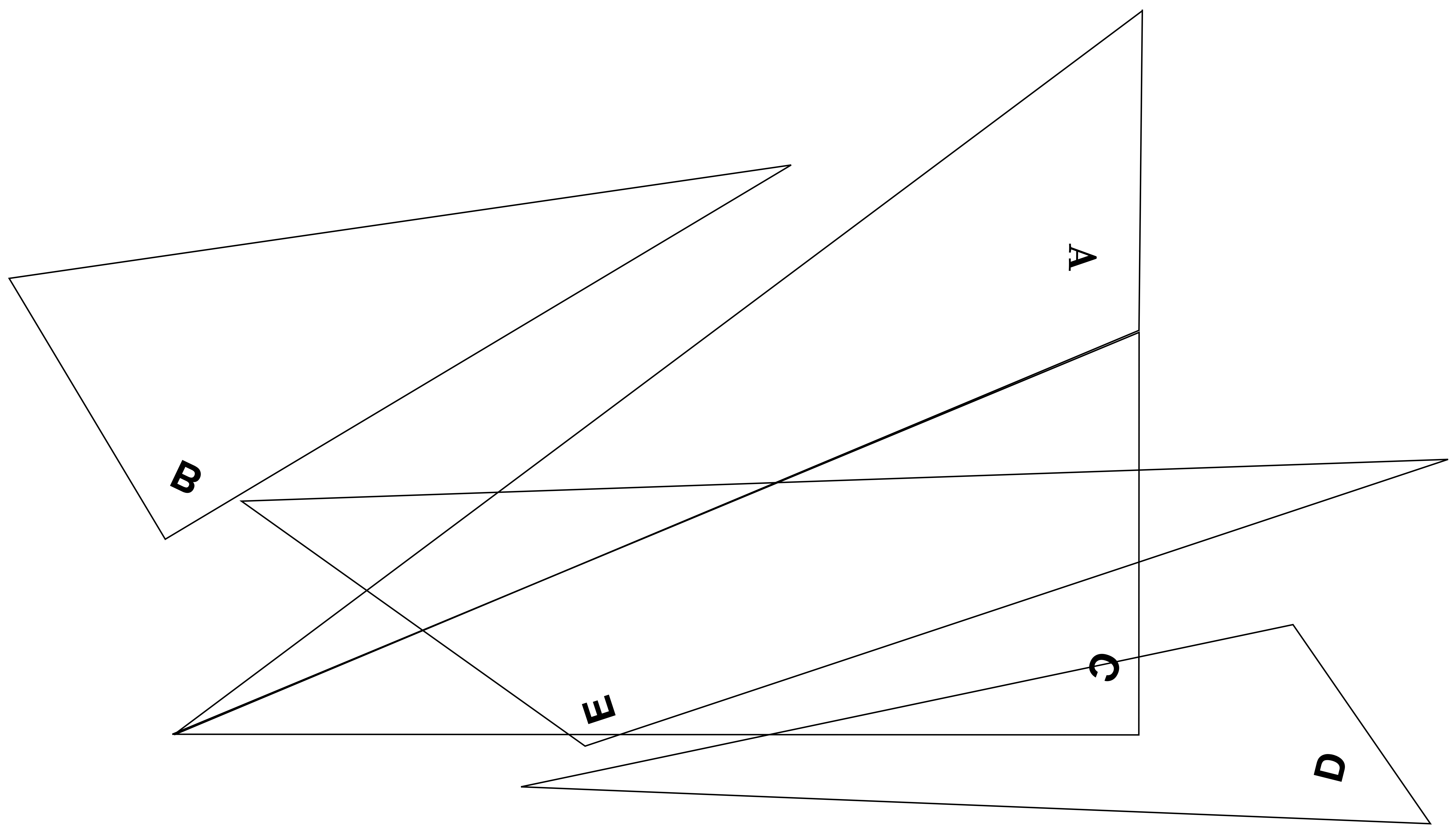
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



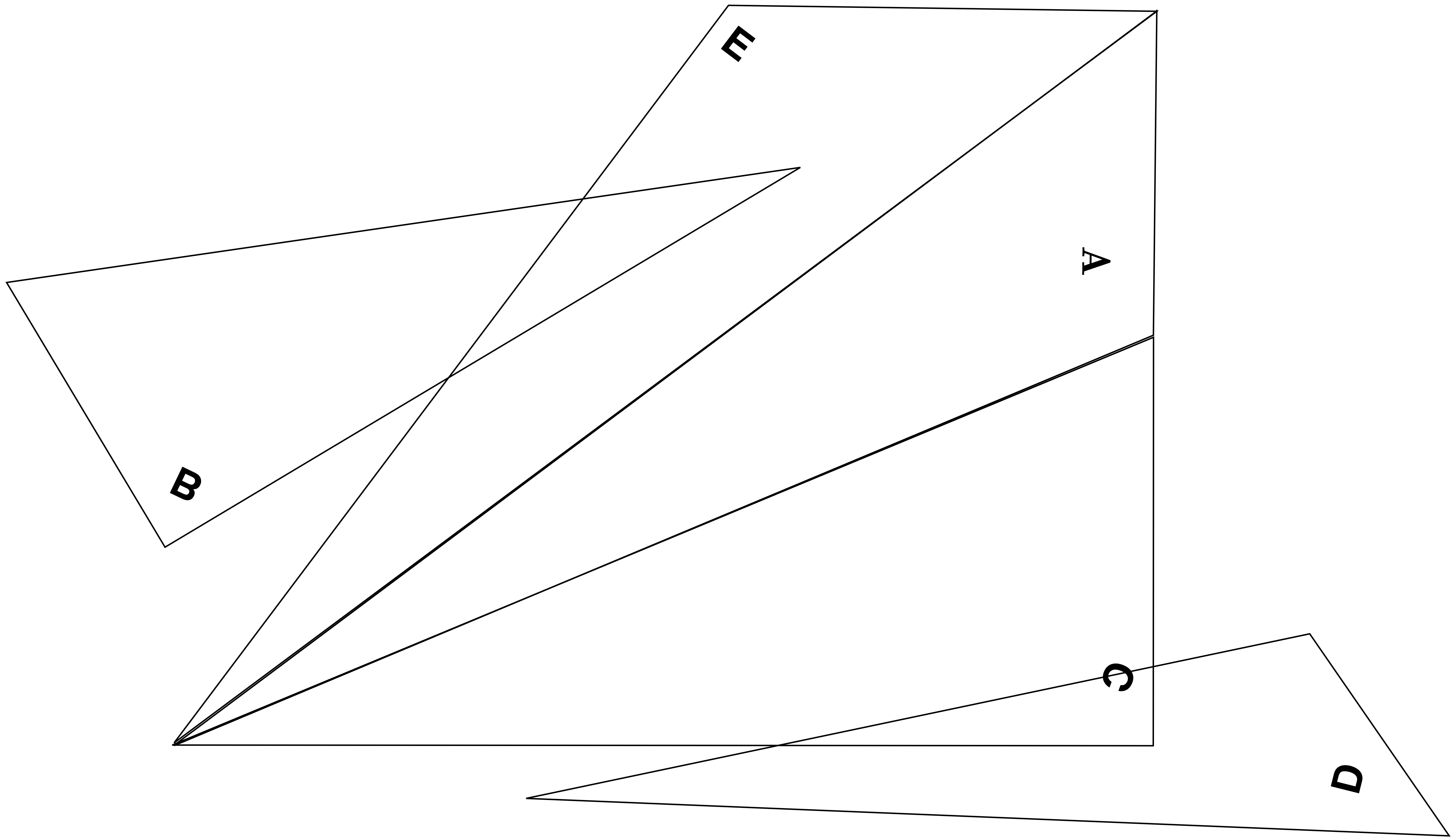
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



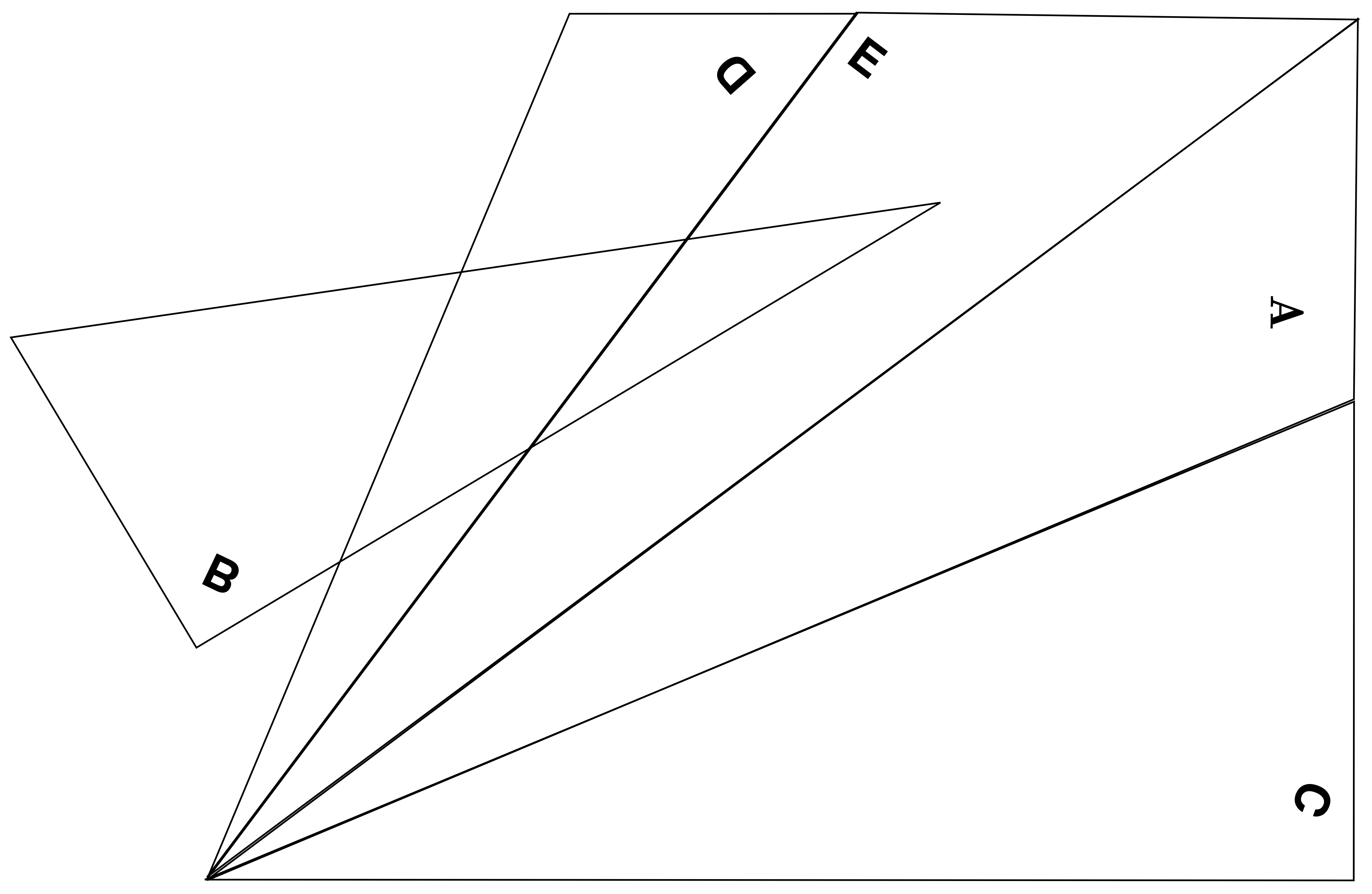
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



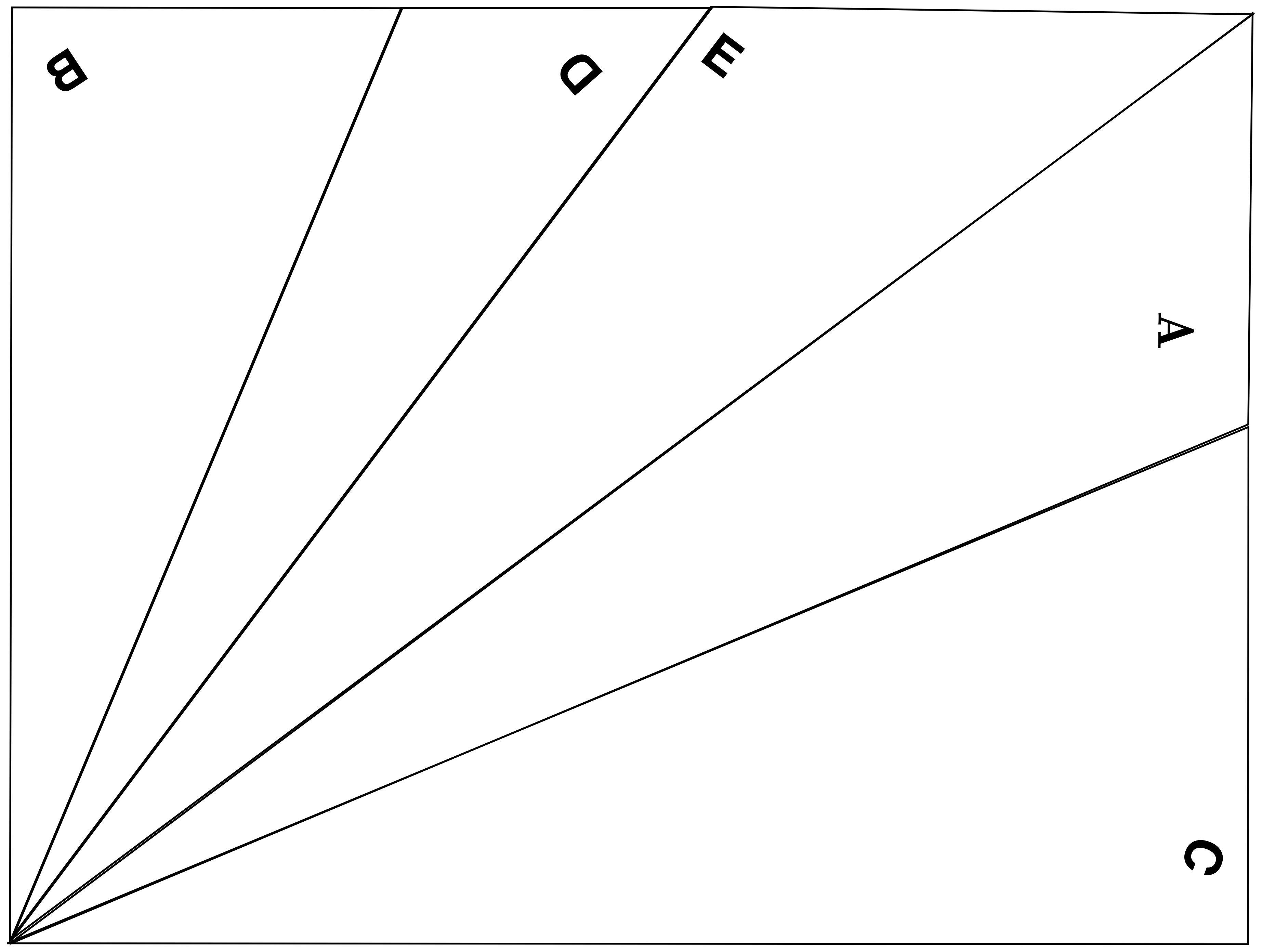
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



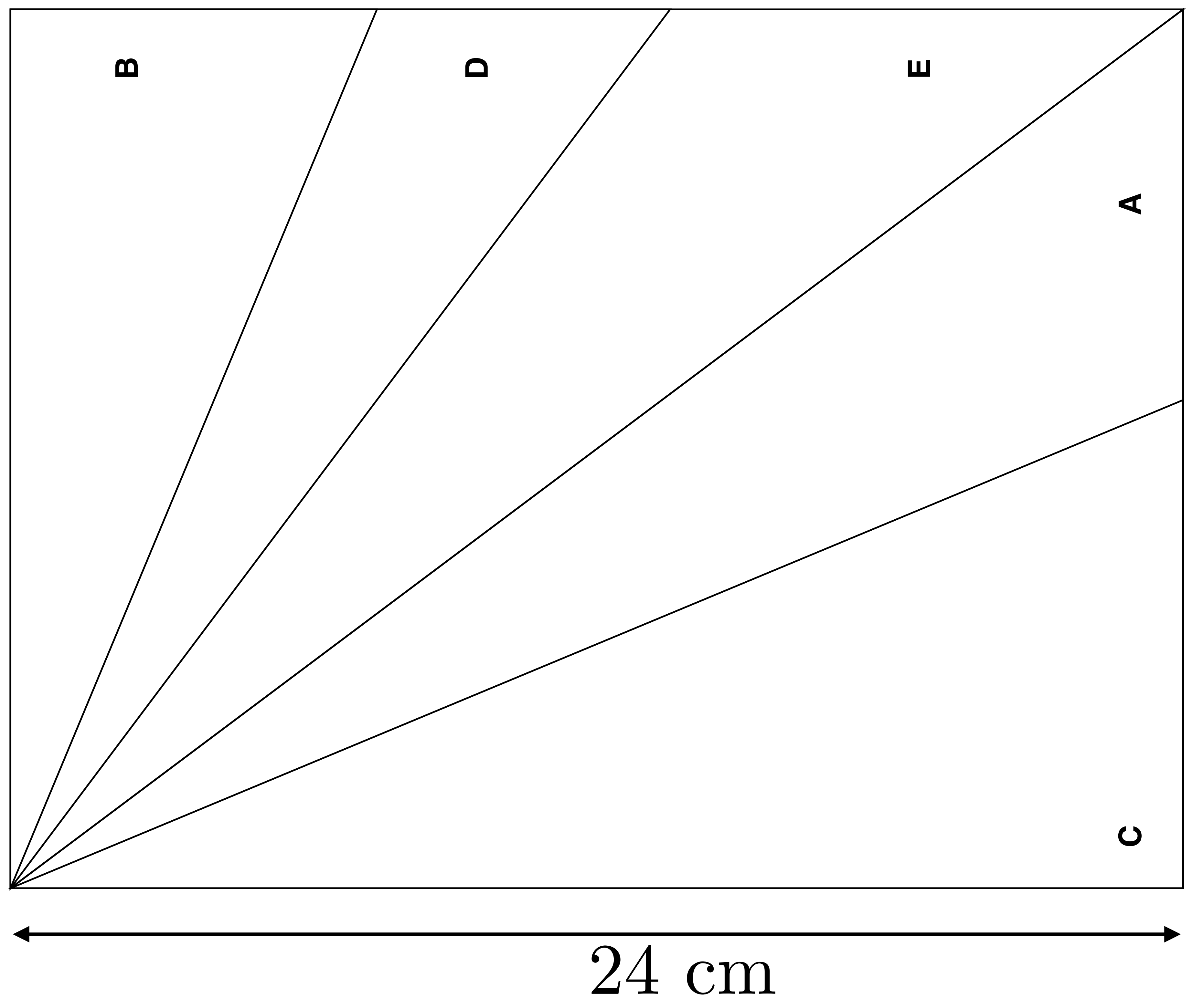
# THÉORÈME DE THALES

Reformons le rectangle.



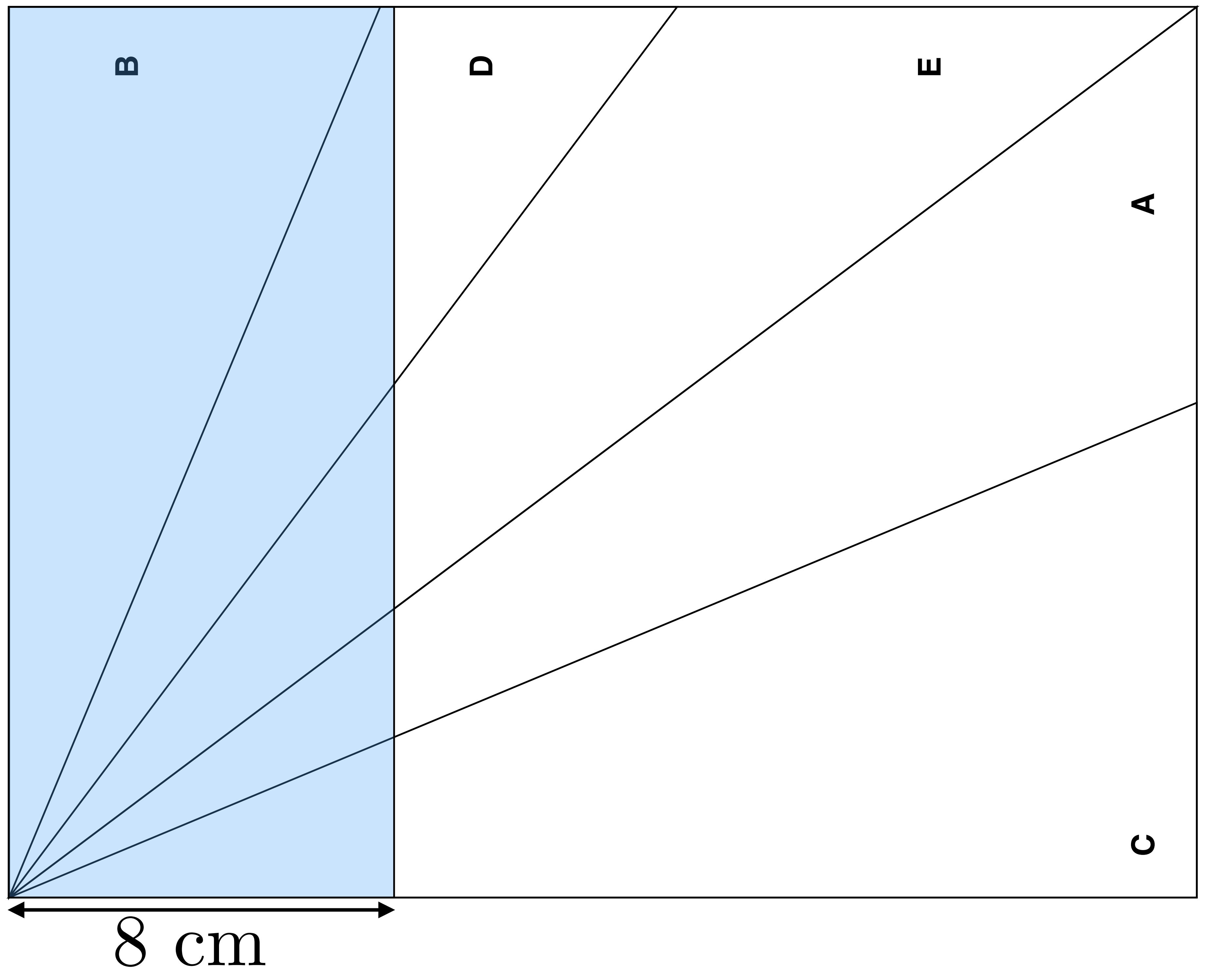
# THÉORÈME DE THALES

La longueur de ce rectangle est de 24 cm.



# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 8 cm.

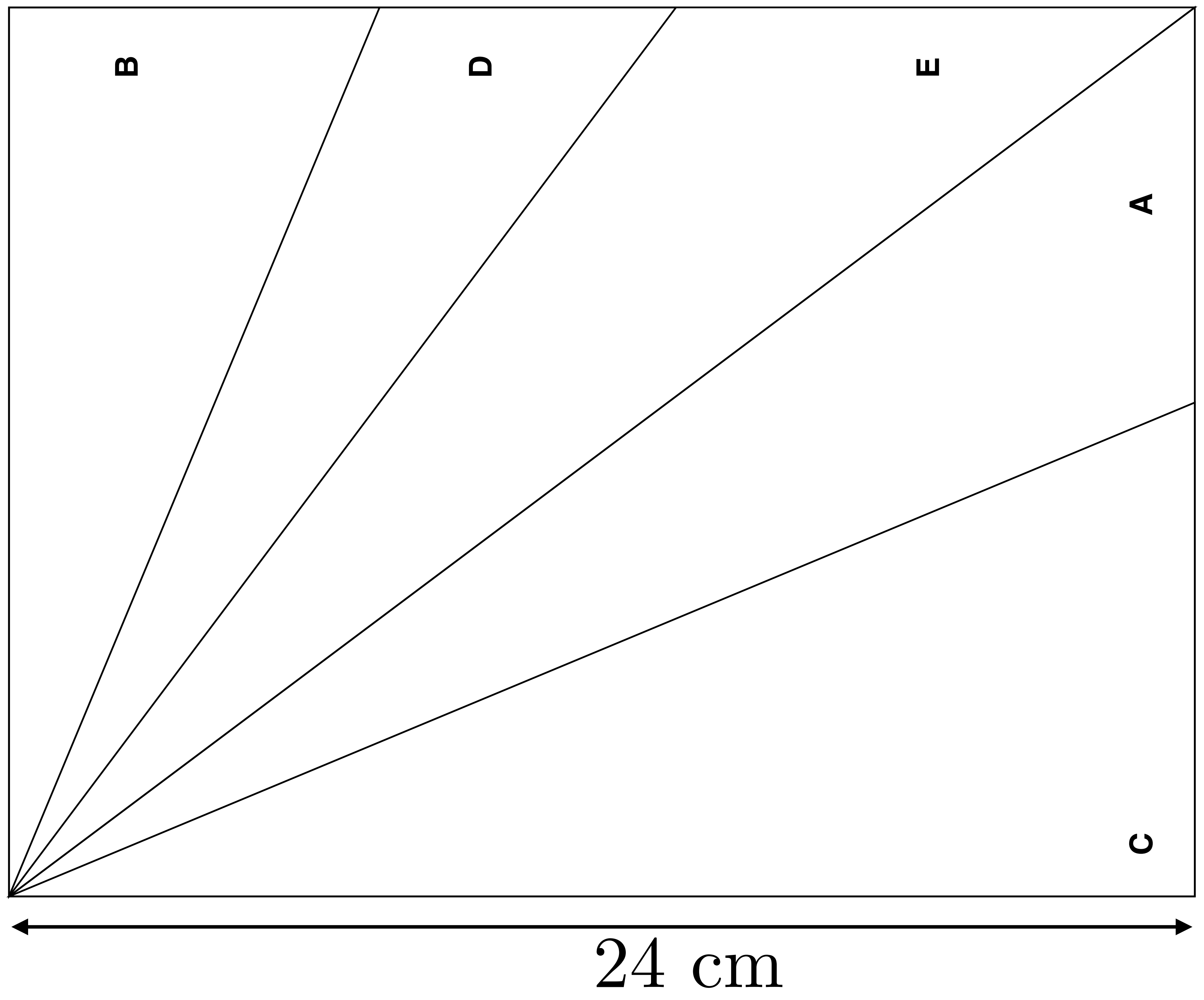



Une 1ère idée :

- le triangle B n'est pas réduit.
- le triangle D est devenu un quadrilatère
- la longueur du rectangle
  est devenue la largeur

# THÉORÈME DE THALES

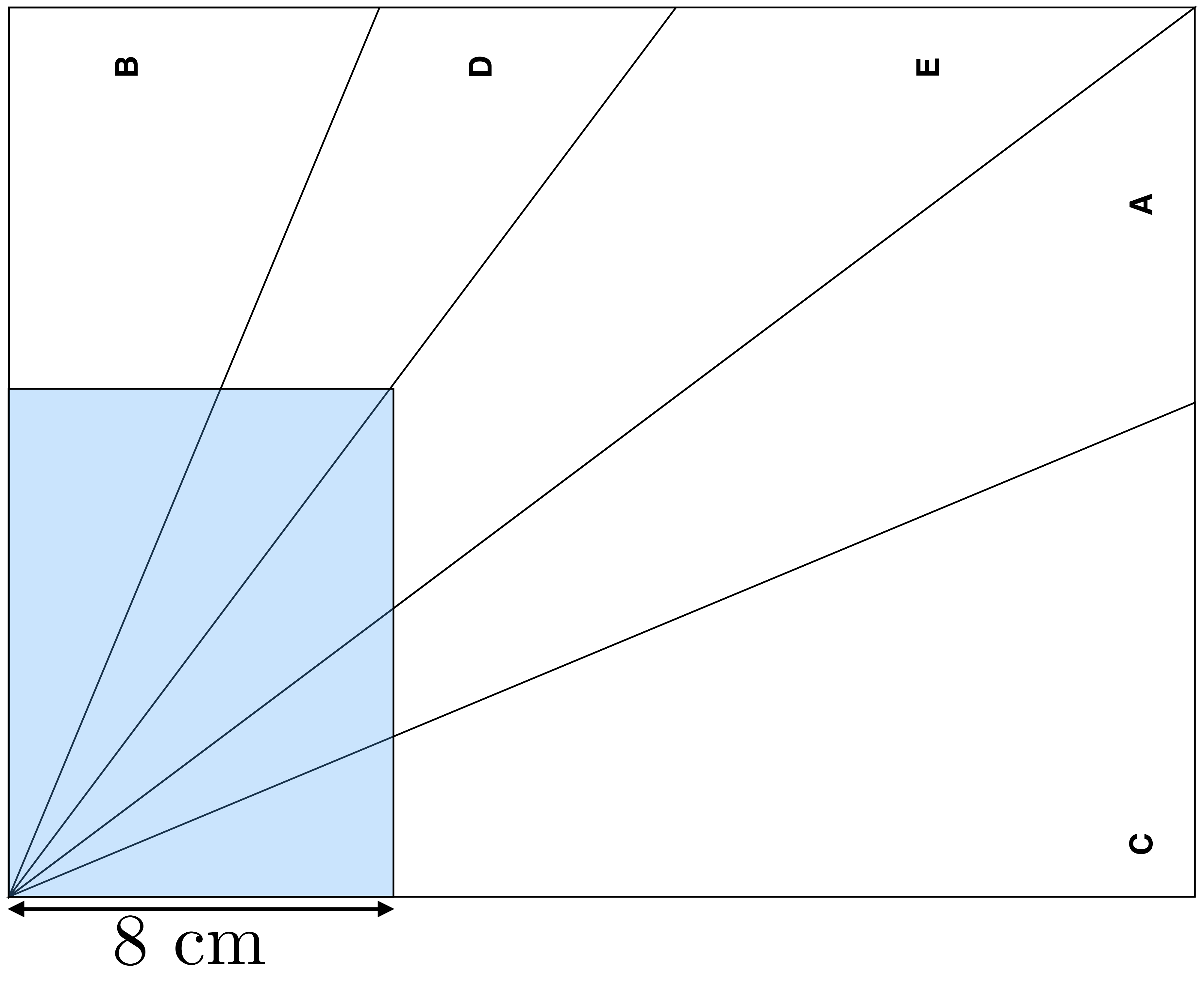
Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 8 cm.




Une 2ème idée :

# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 8 cm.



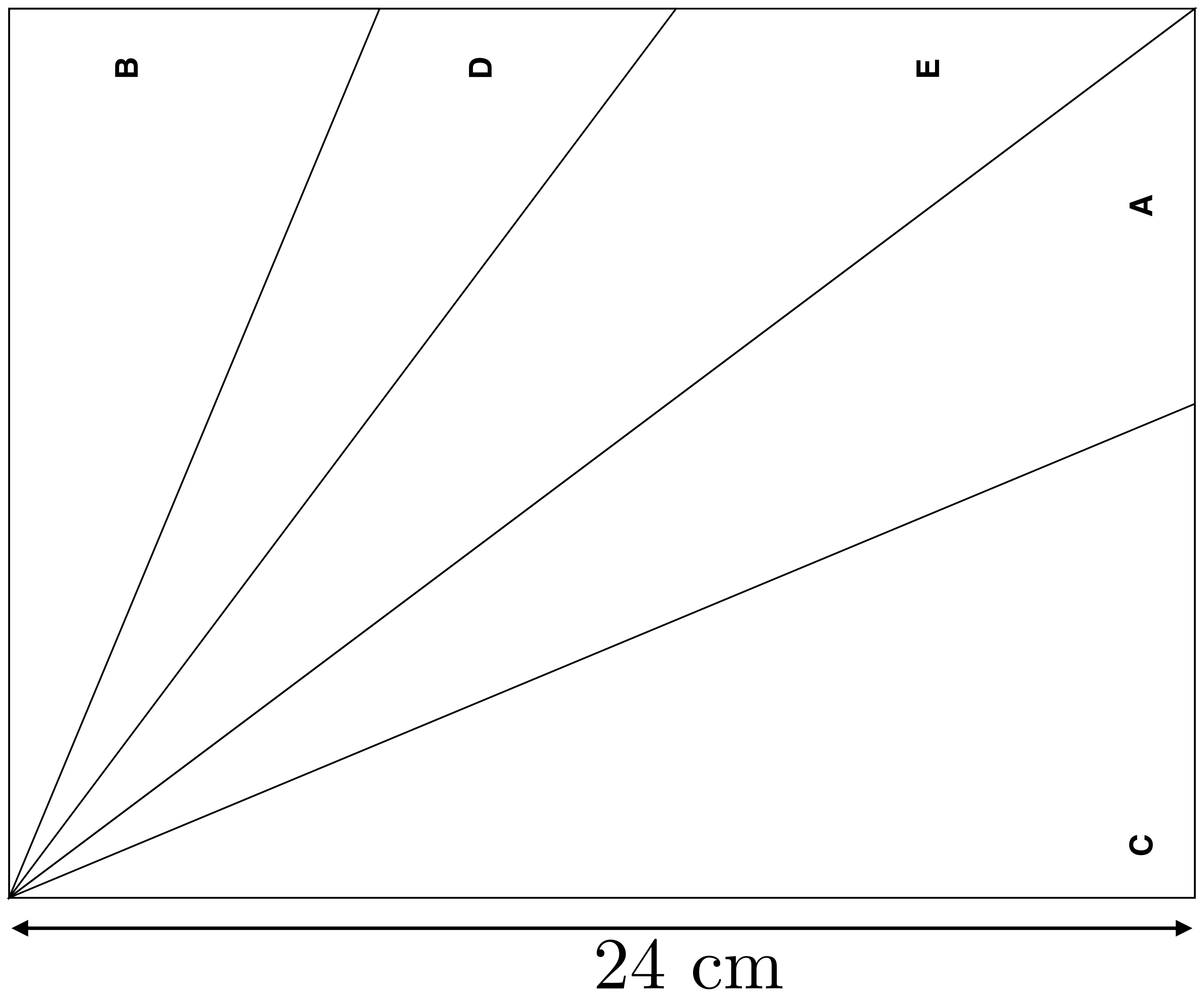

Une 2ème idée :

- la longueur du rectangle est devenue la largeur

- la diagonale n'a pas été conservée.

# THÉORÈME DE THALES

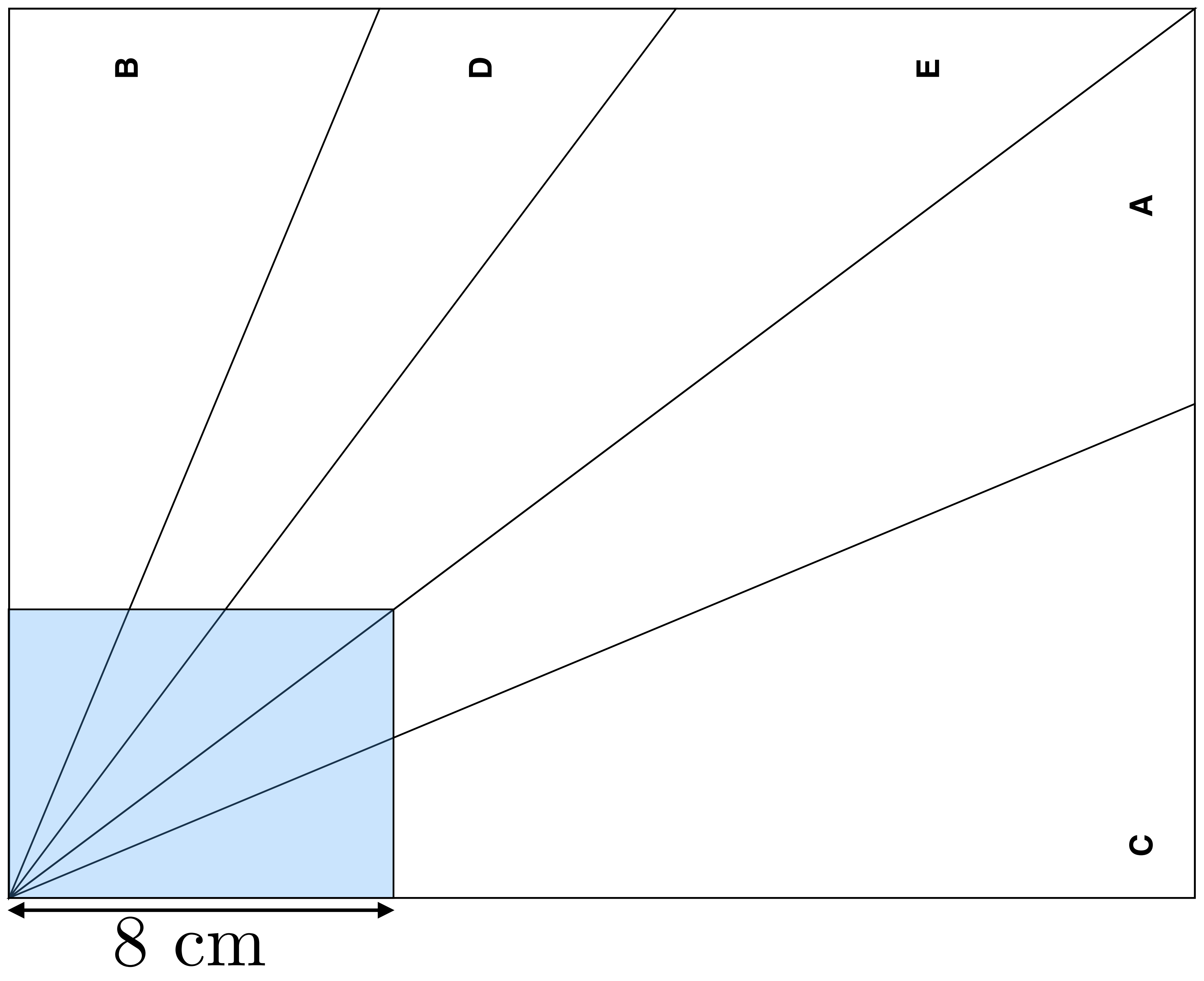
Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 8 cm.




Une 3ème idée :

# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 8 cm.

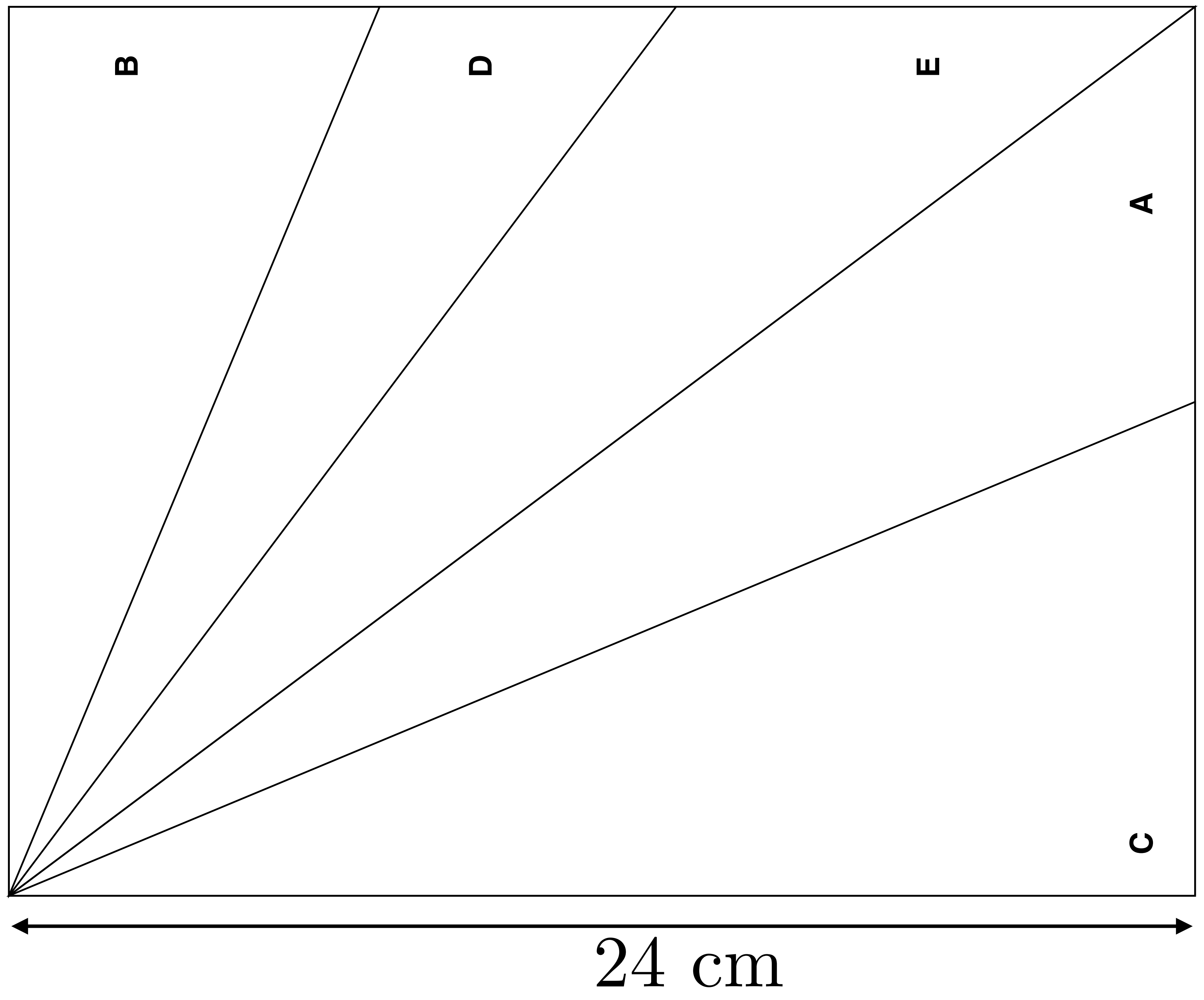



Une 3ème idée :

- C'est bien la réduction demandée.

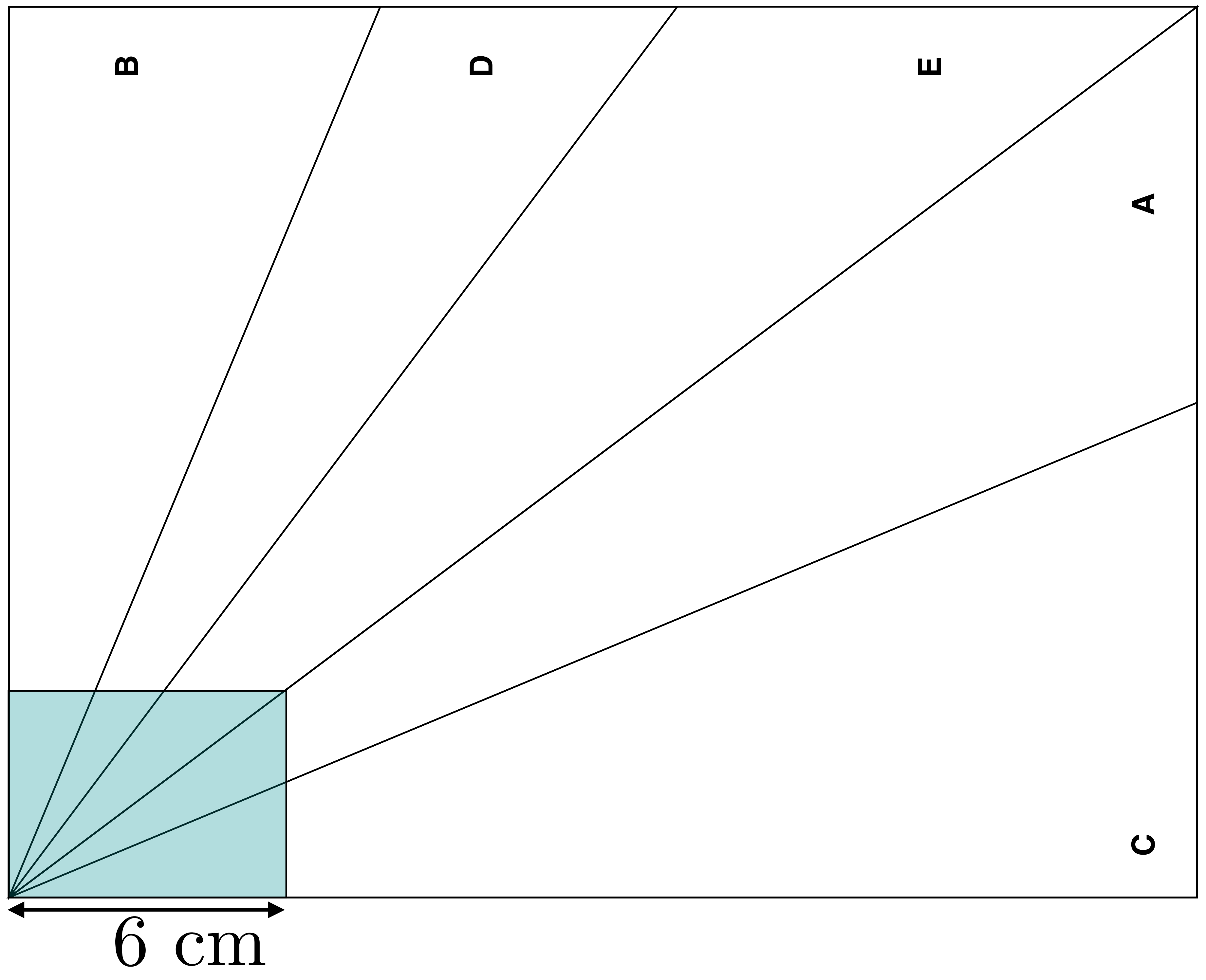
# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 6 cm.



# THÉORÈME DE THALES

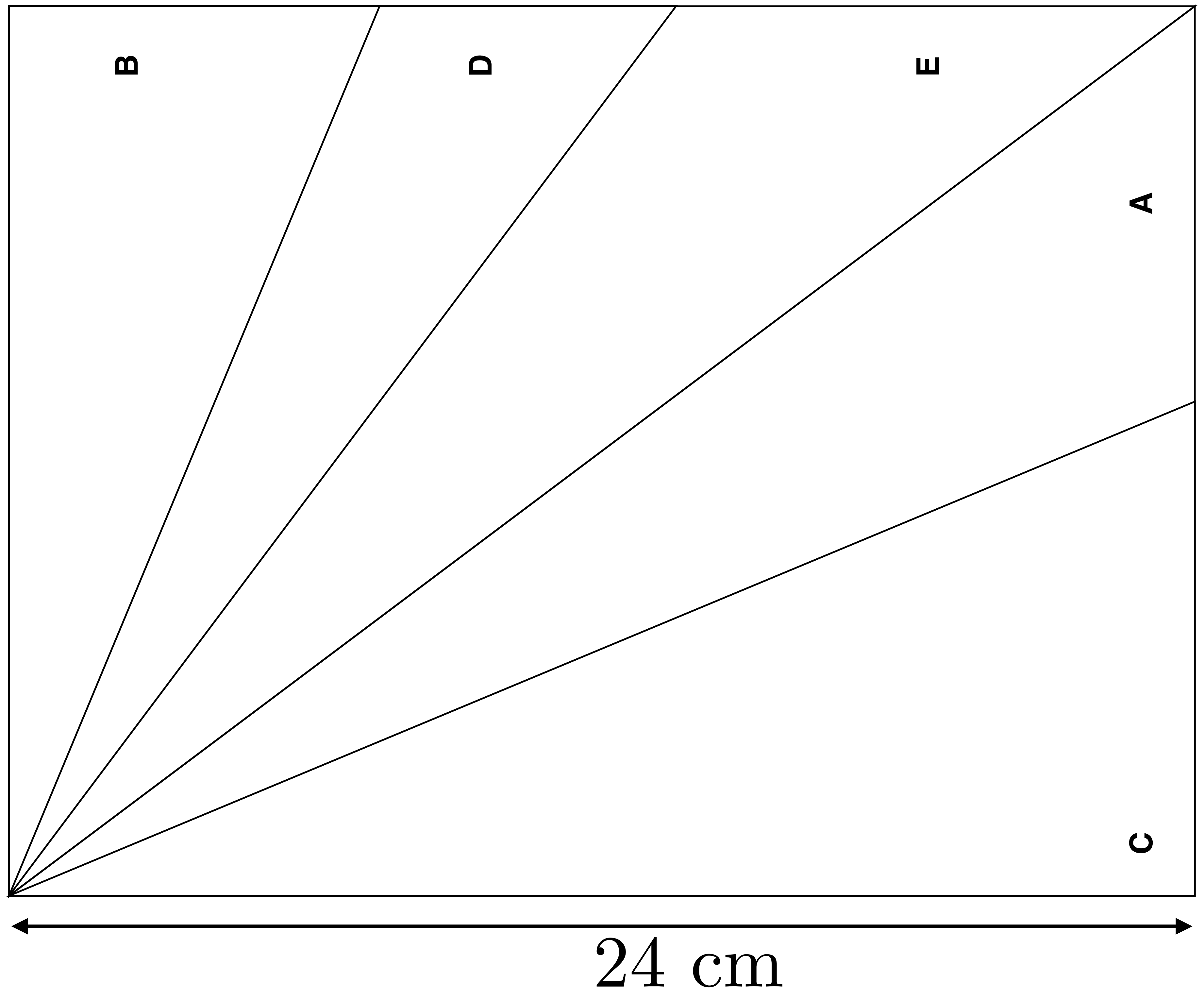
Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 6 cm.




Voici le rectangle réduit demandé.

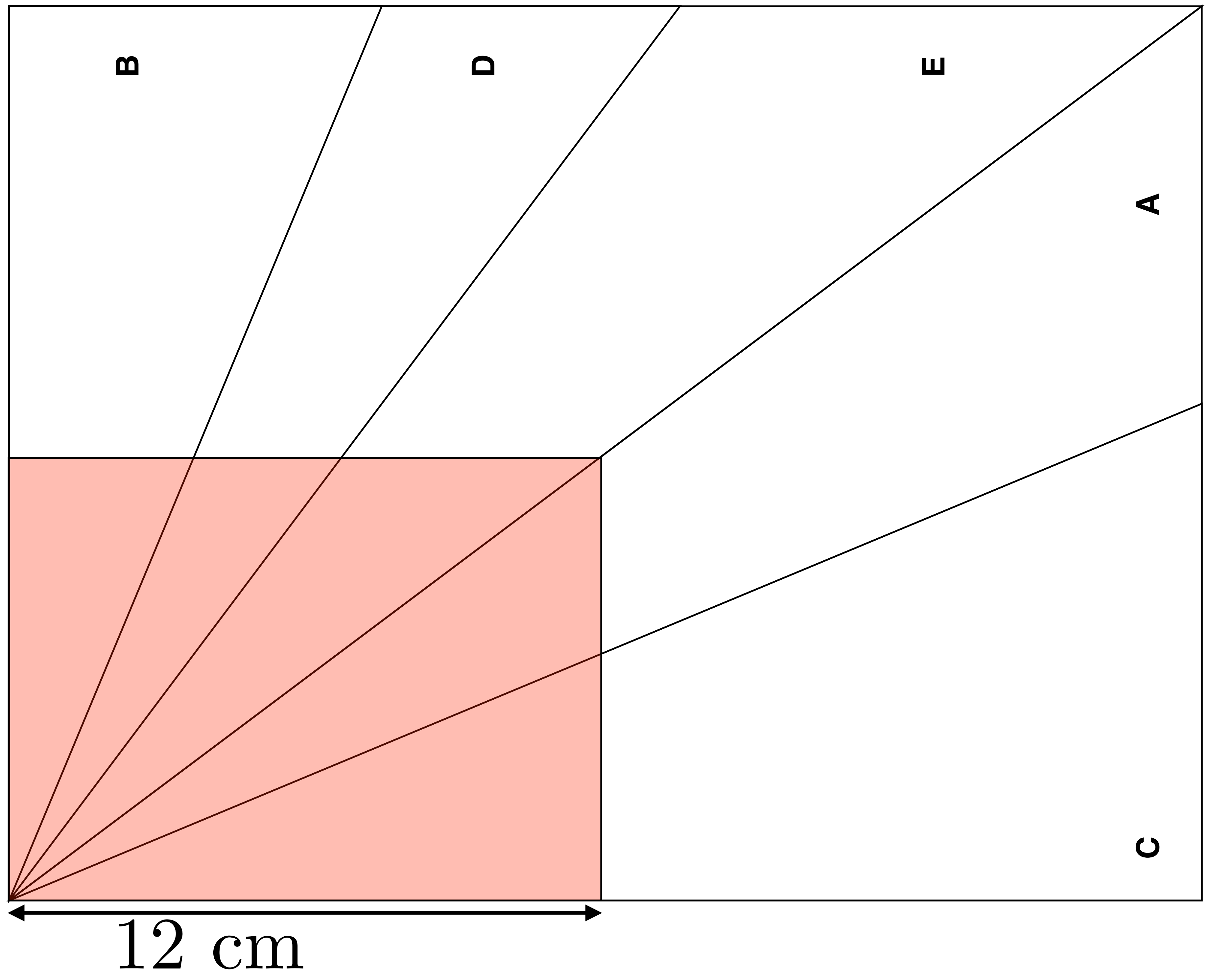
# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 12 cm.



# THÉORÈME DE THALES

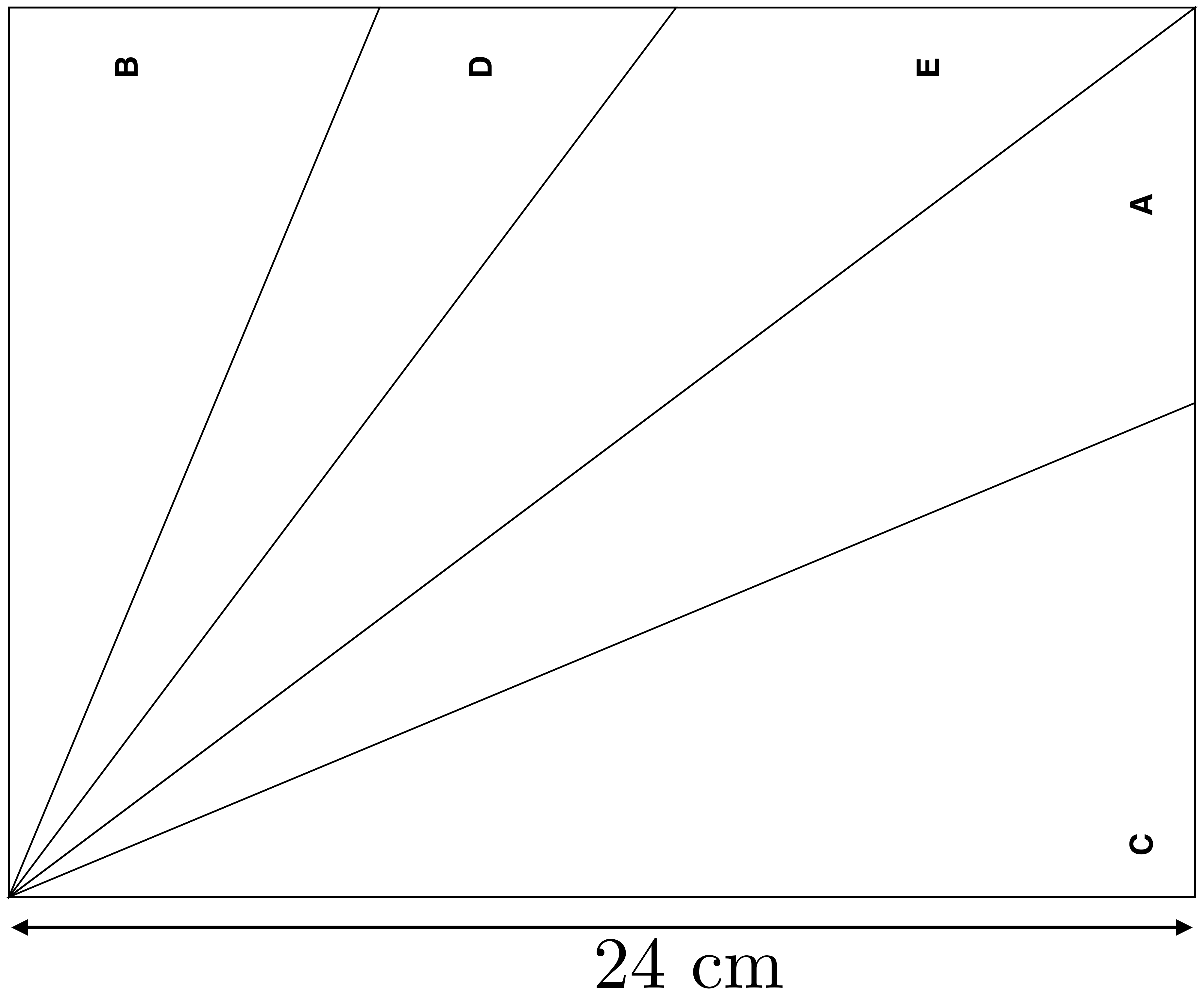
Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 12 cm.




Voici le rectangle réduit demandé.

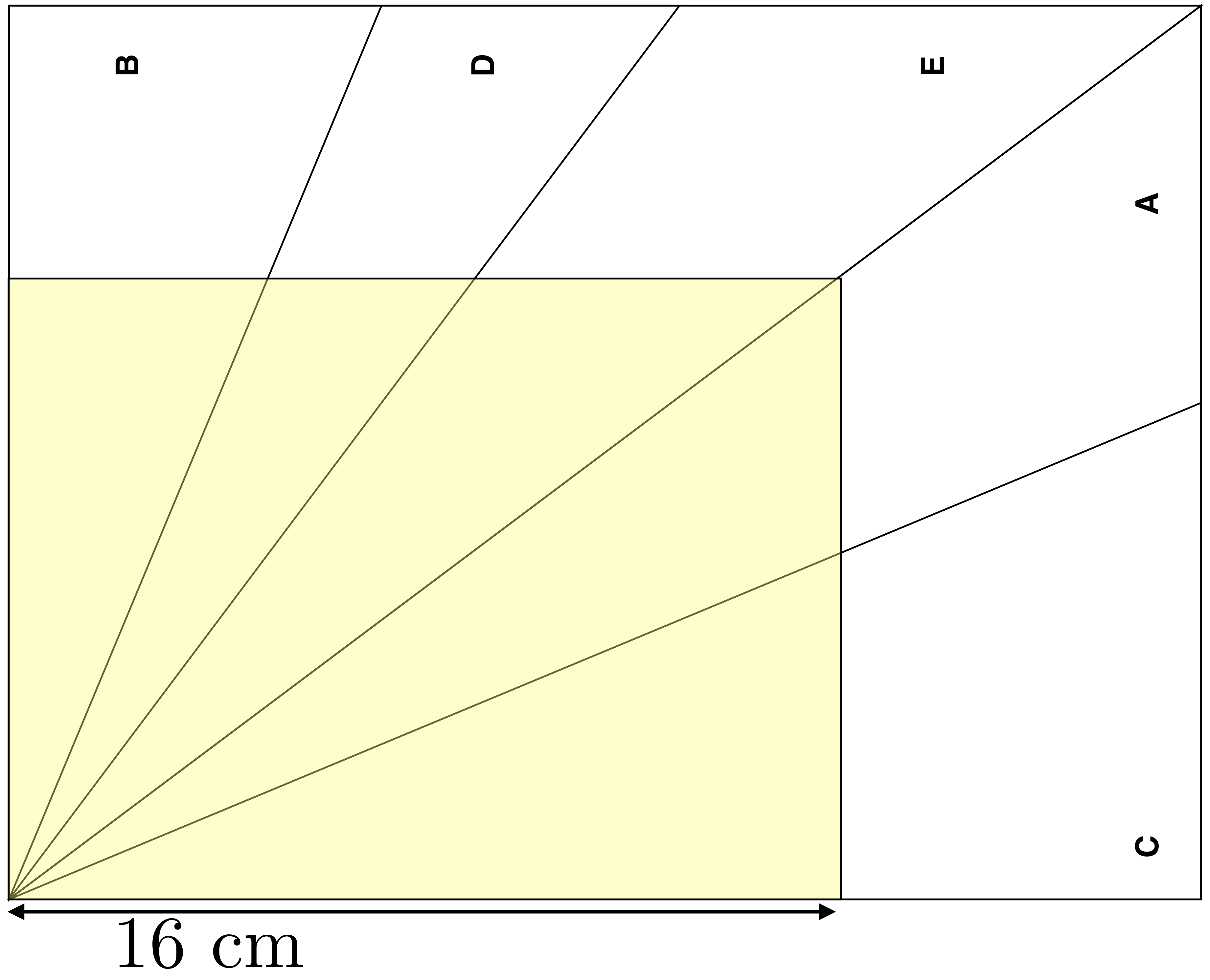
# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 16 cm.



# THÉORÈME DE THALES

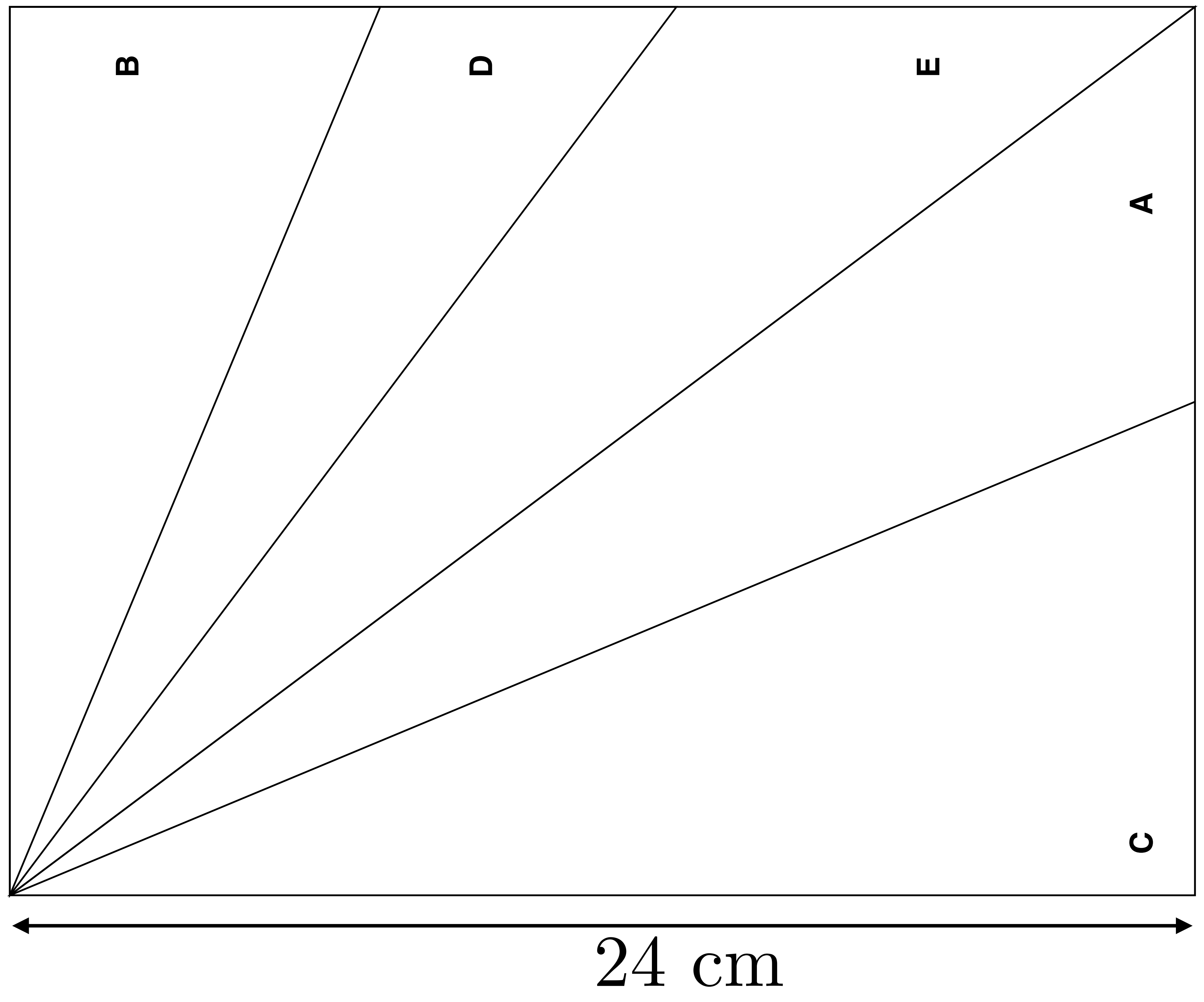
Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 16 cm.




Voici le rectangle réduit demandé.

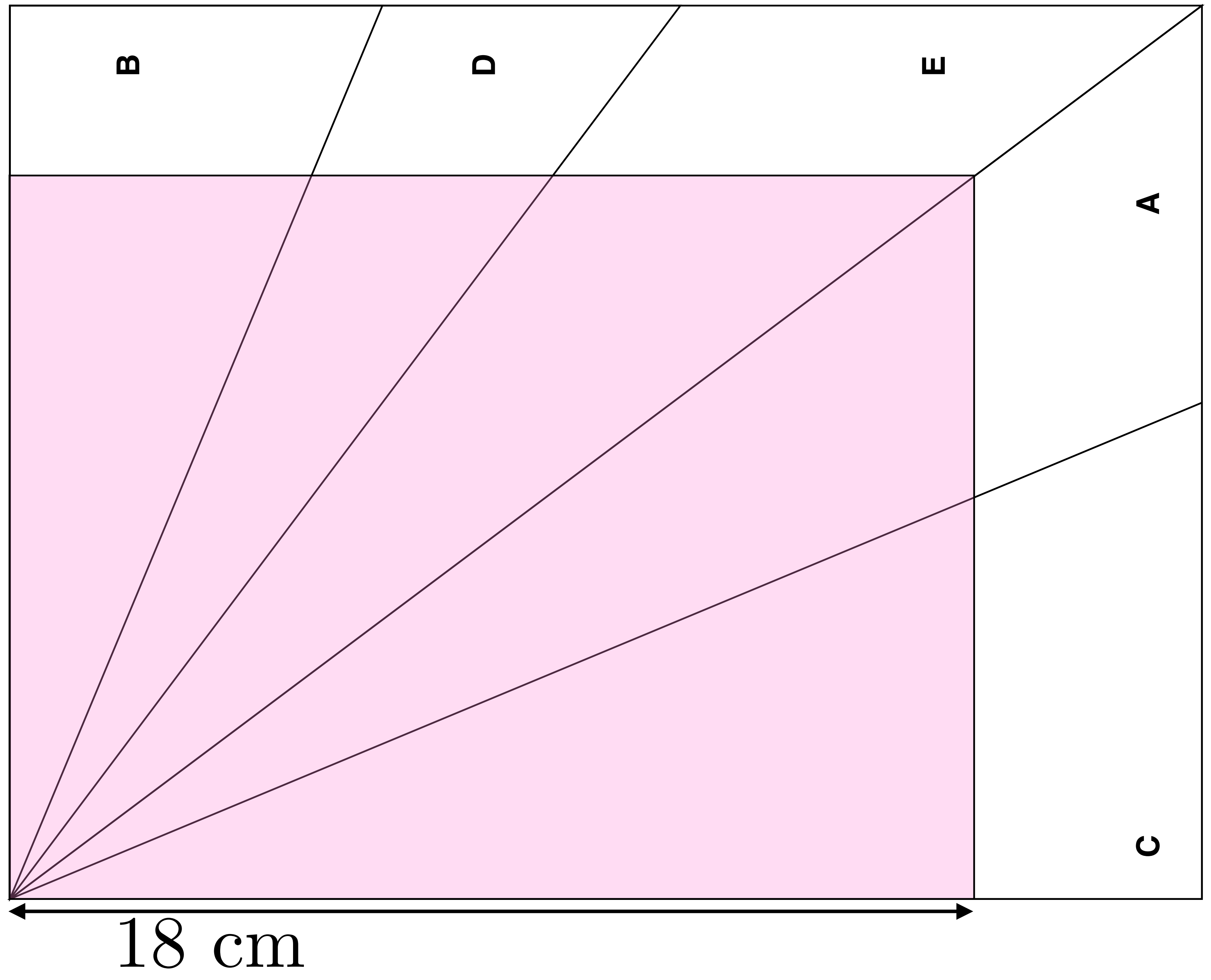
# THÉORÈME DE THALES

Construire une réduction de ce rectangle telle que la longueur ne soit plus que 18 cm.



# THÉORÈME DE THALES

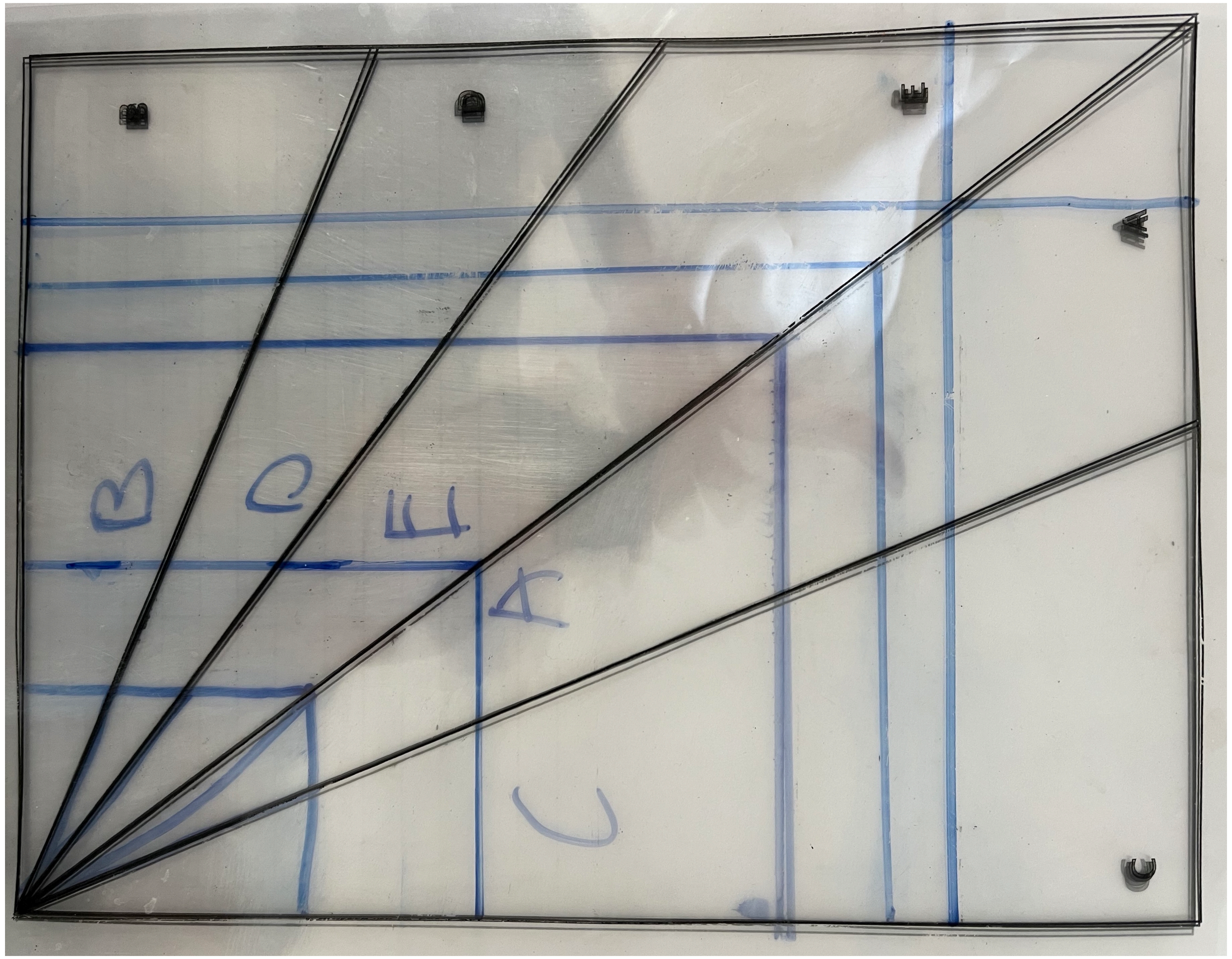
Construire une réduction de ce rectangle
telle que la longueur ne soit plus que 18 cm.




Voici le rectangle réduit demandé.

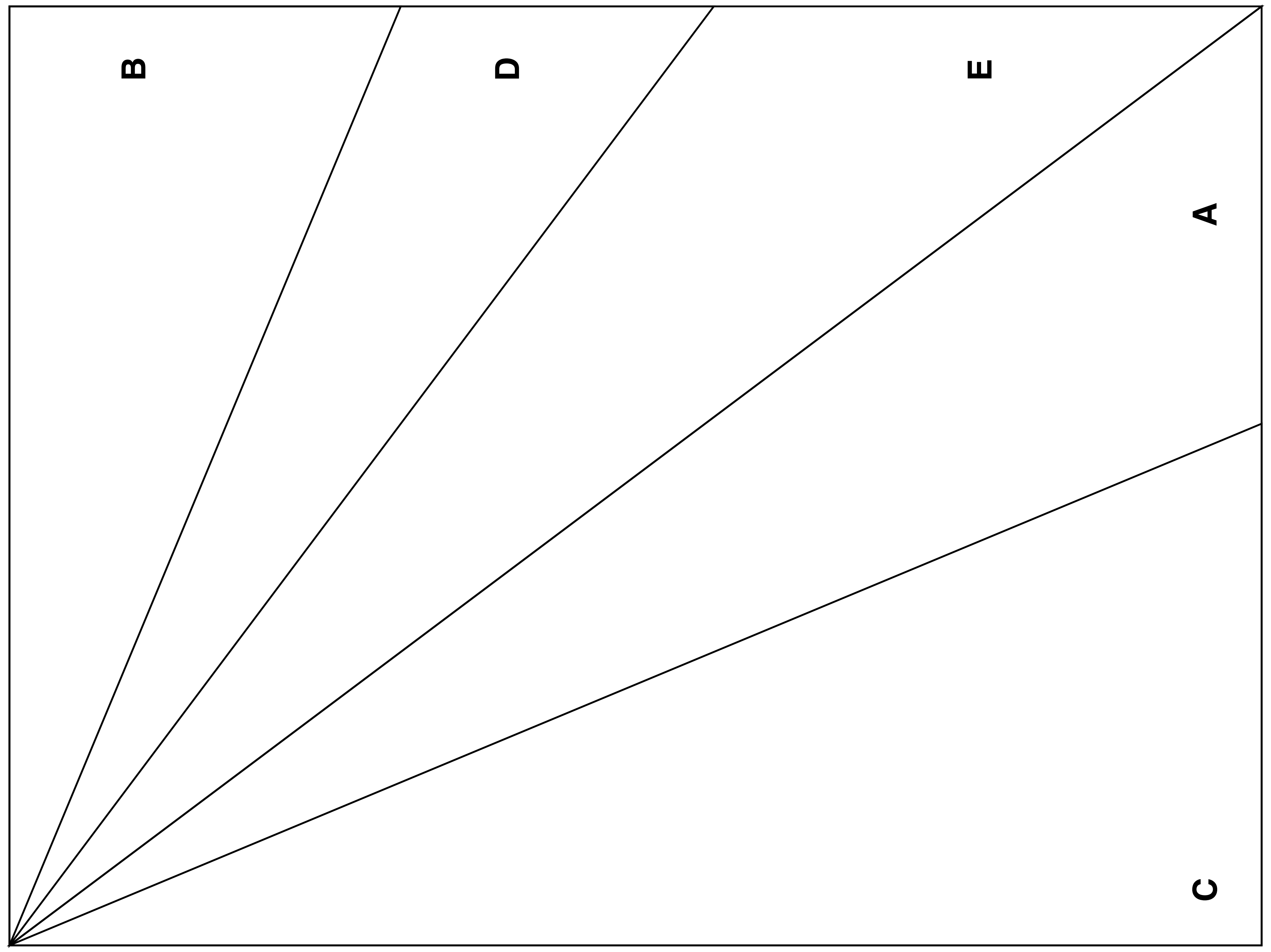
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



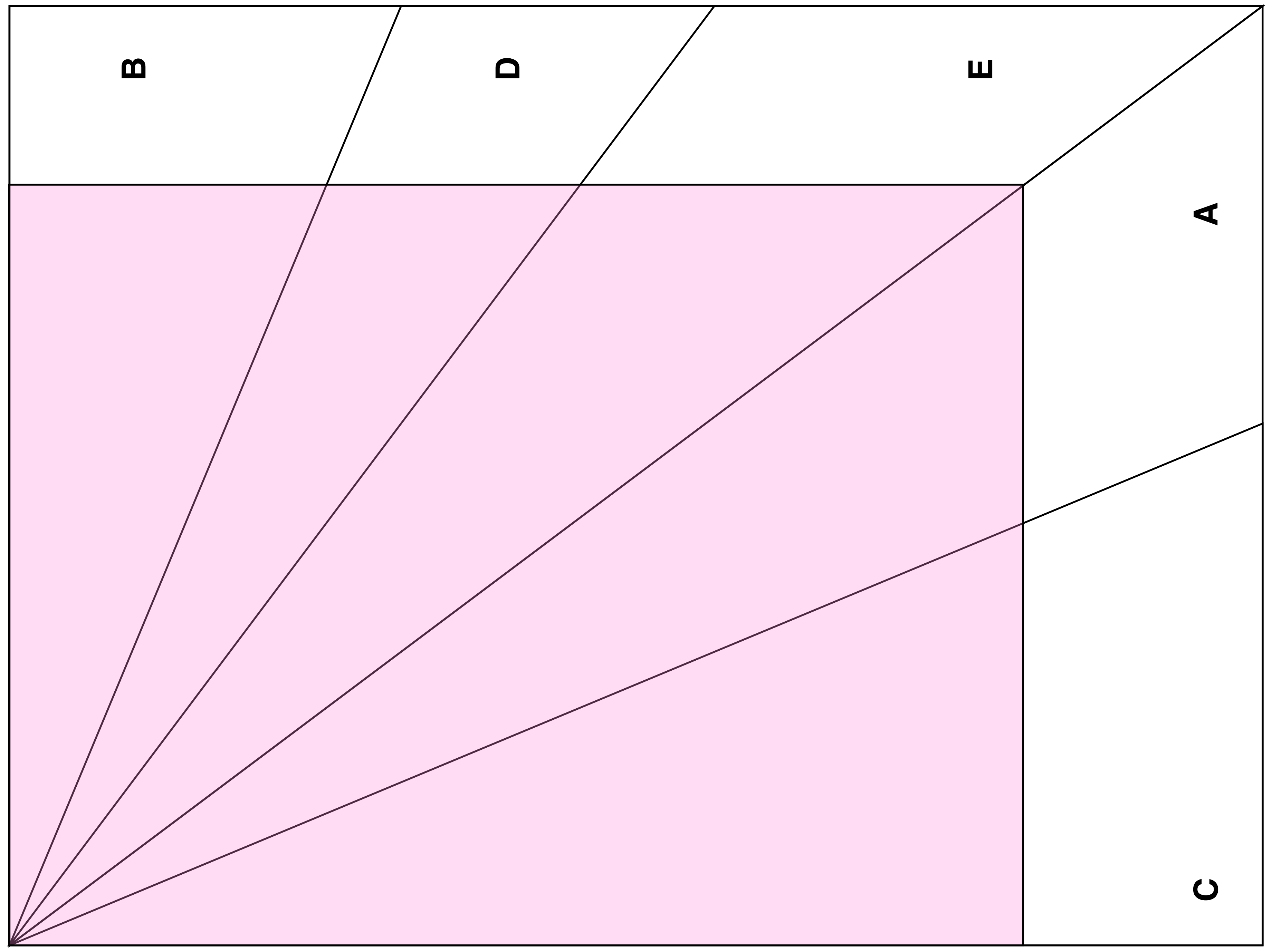
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



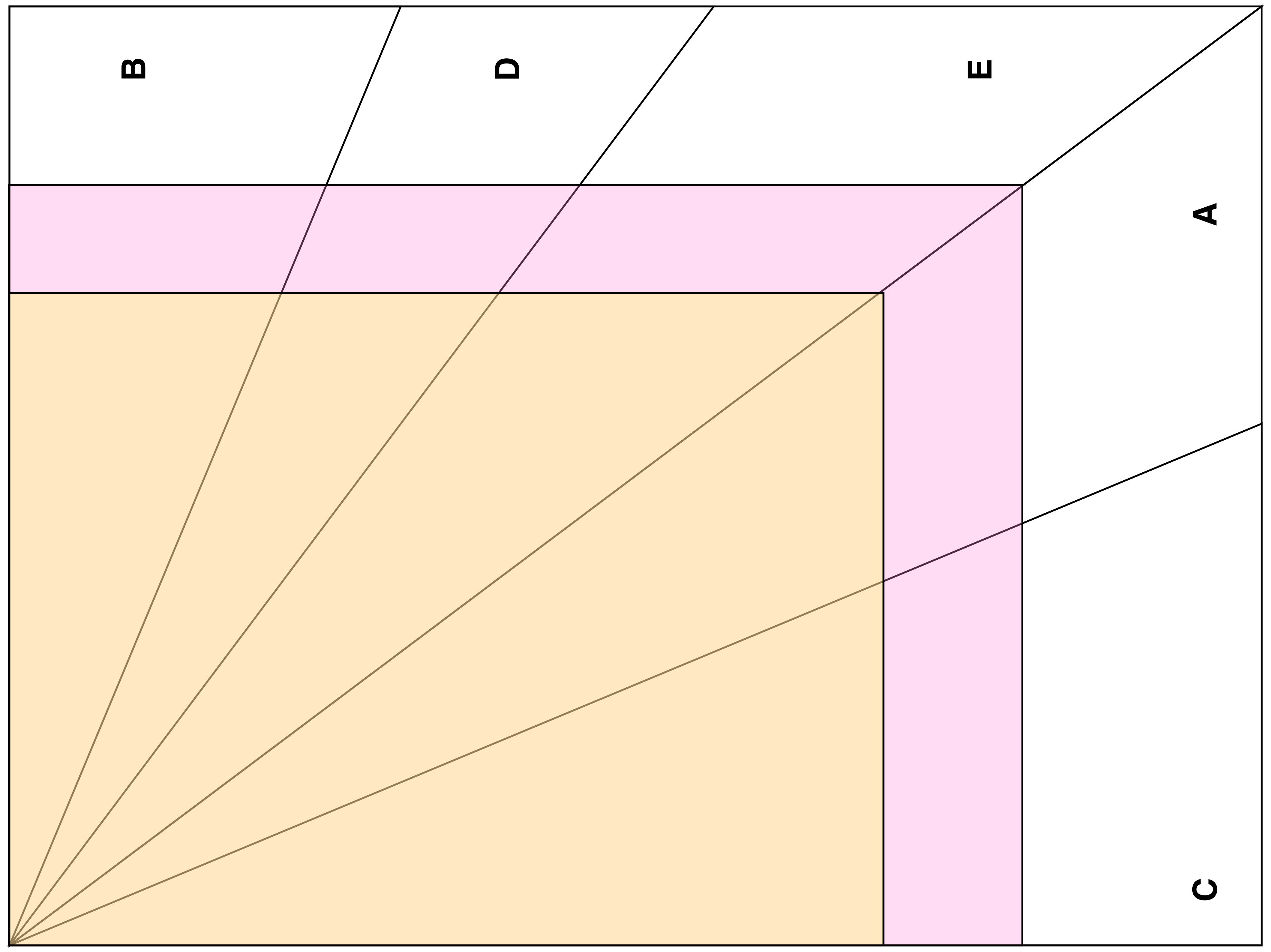
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



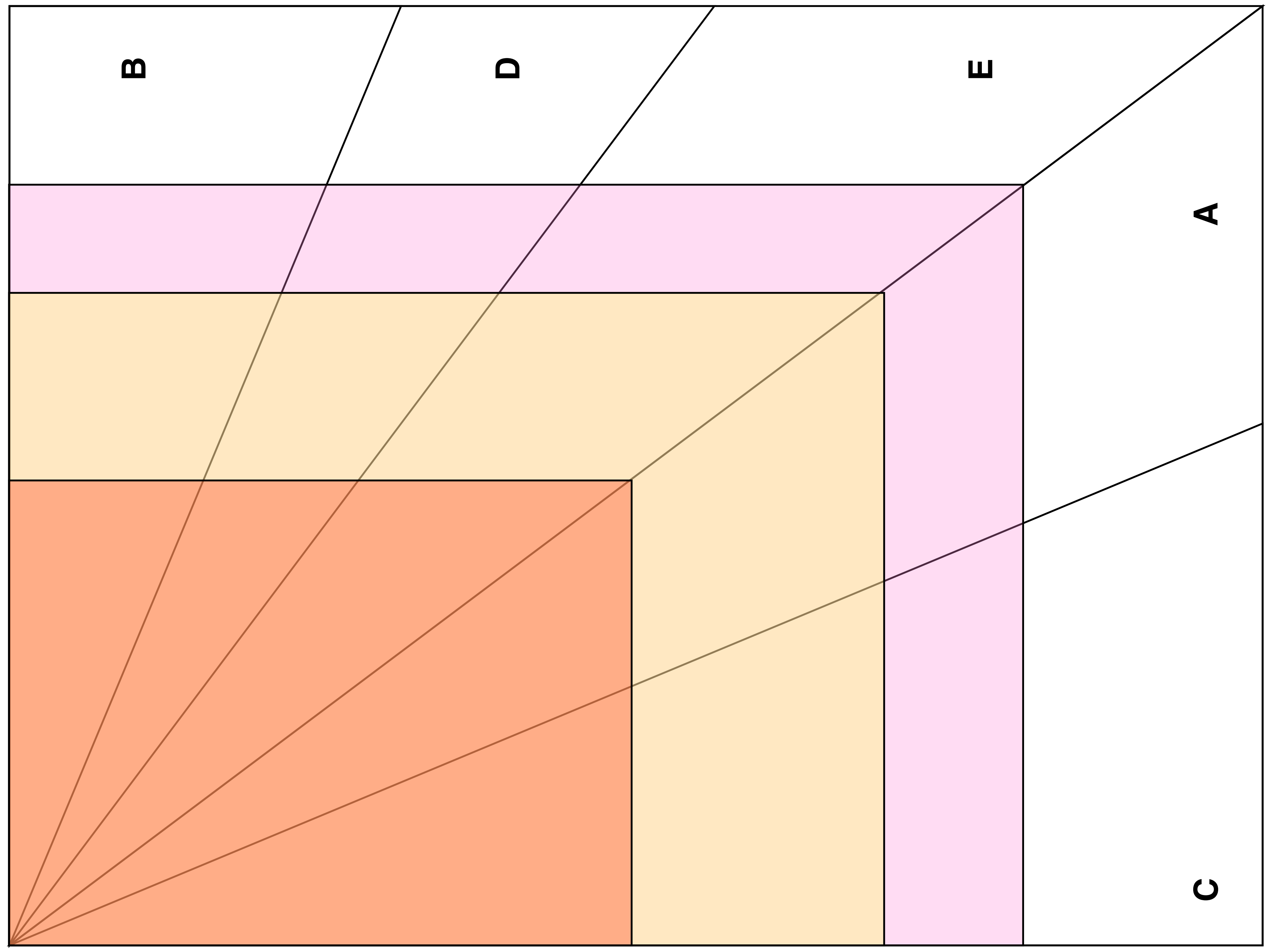
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



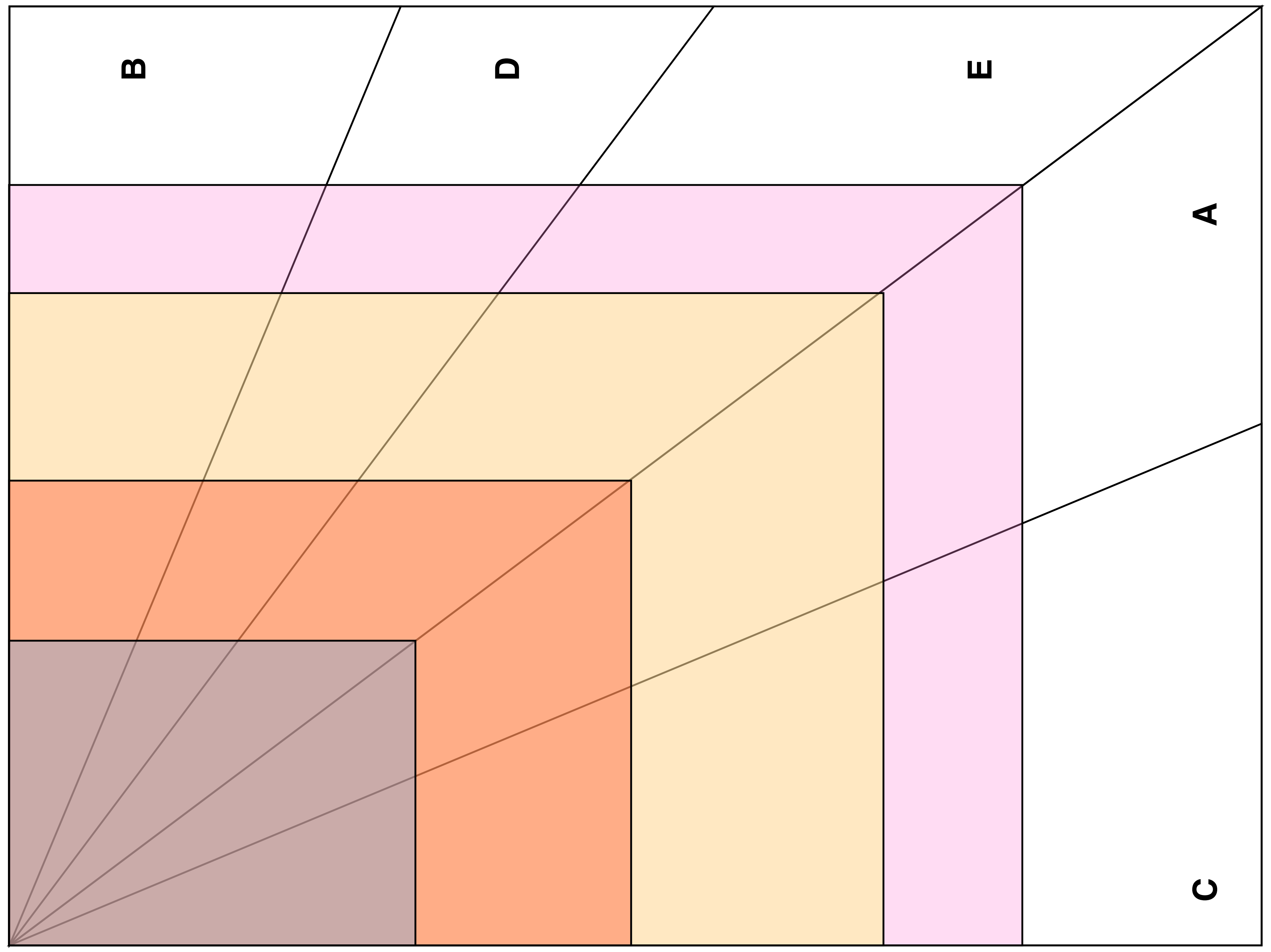
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



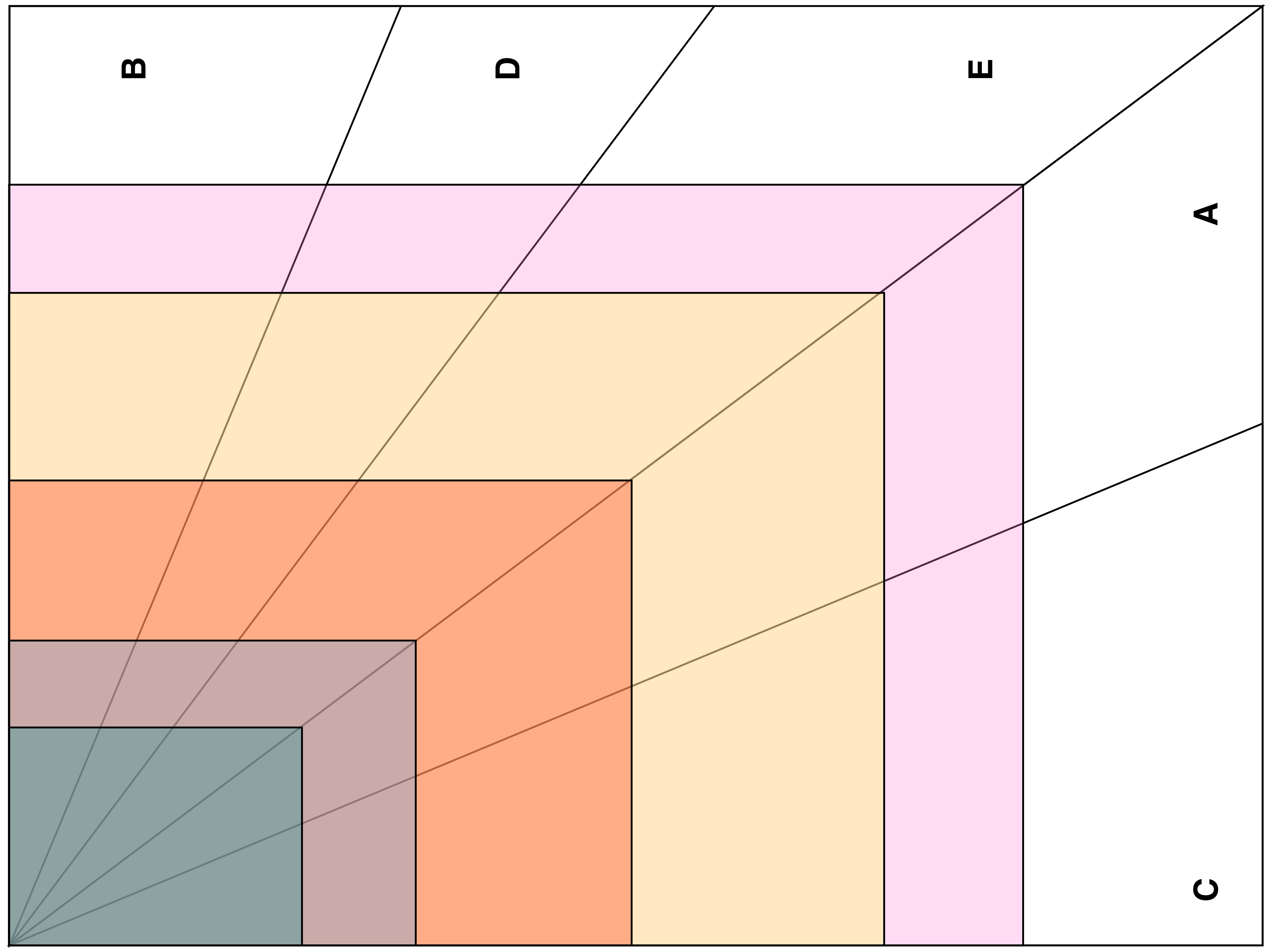
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



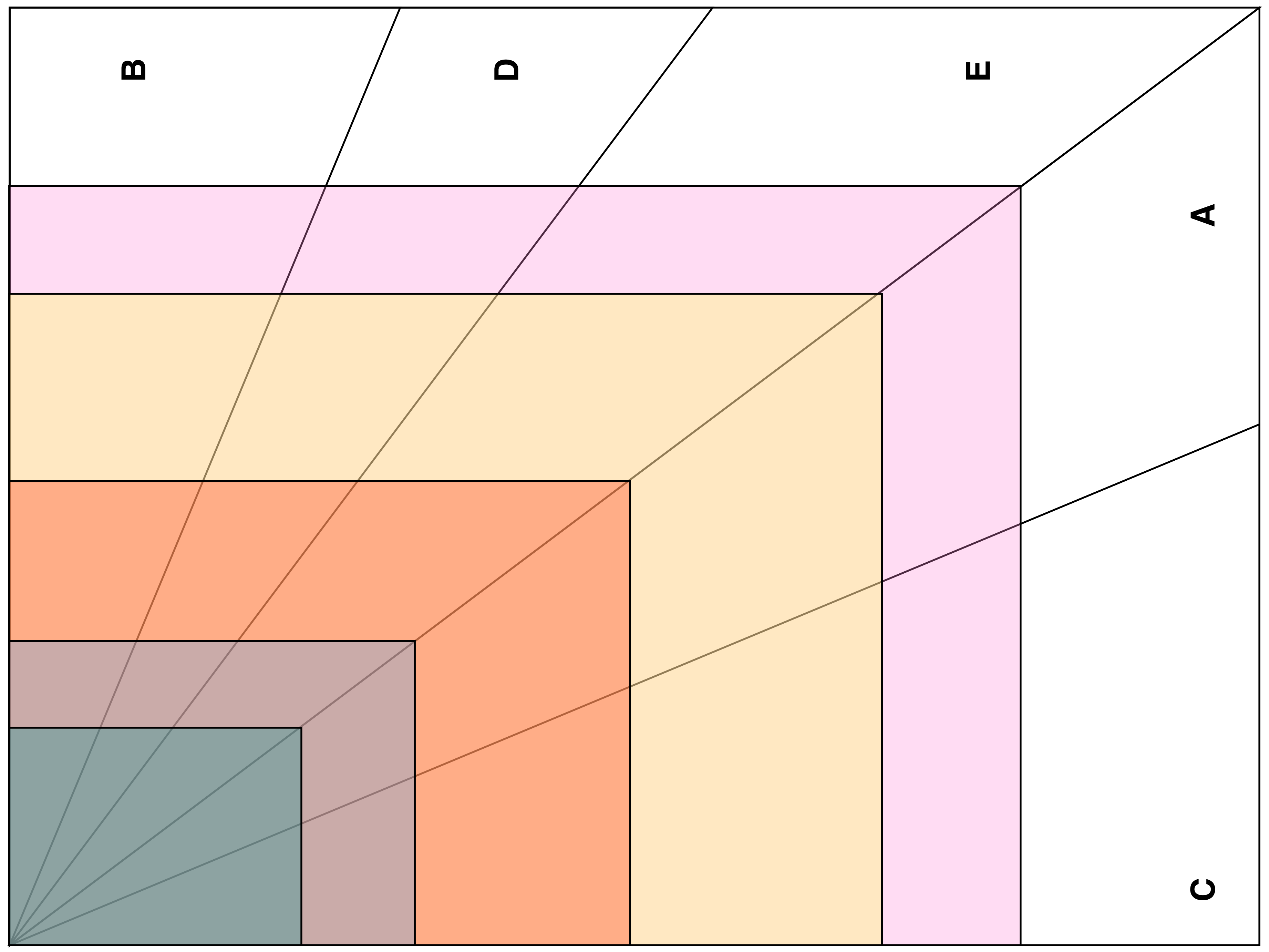
# THÉORÈME DE THALES

Superposons maintenant tous les rectangles réduits.



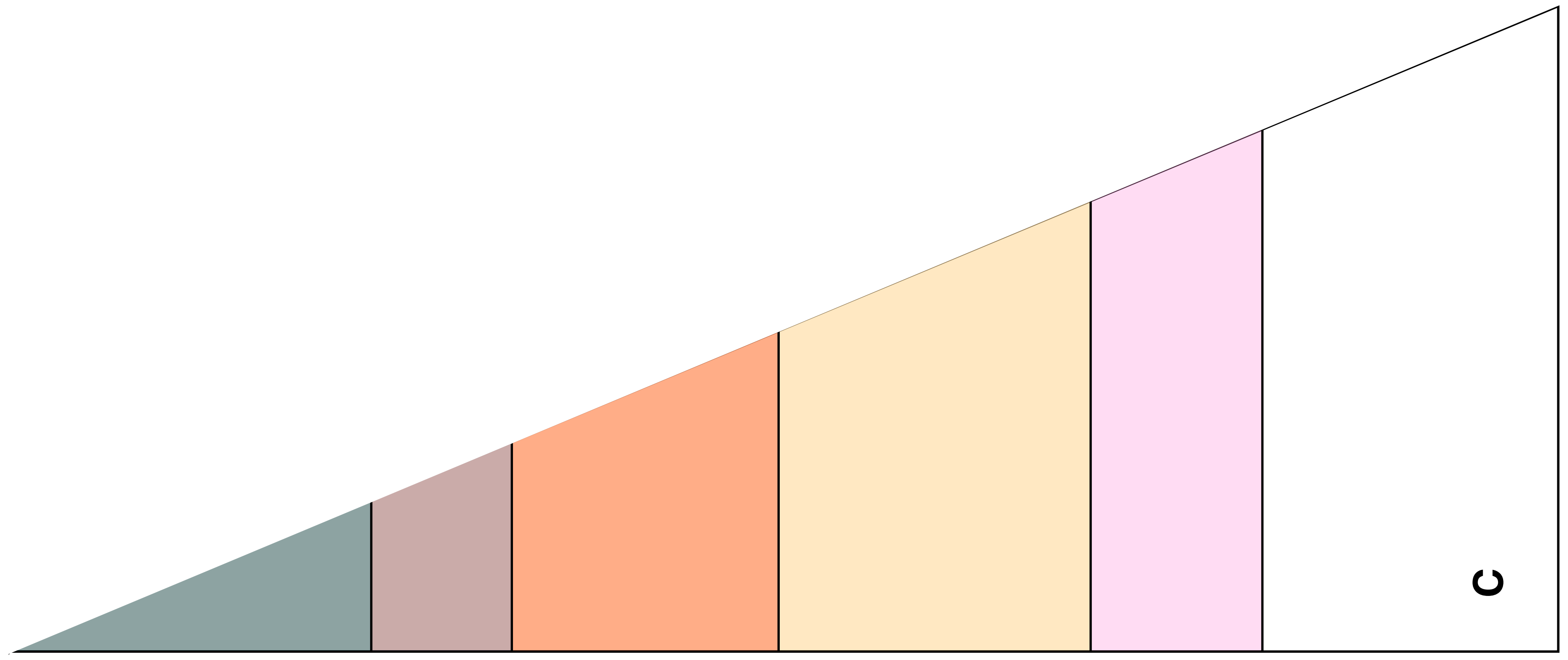
# THÉORÈME DE THALES

Regardons triangle par triangle.

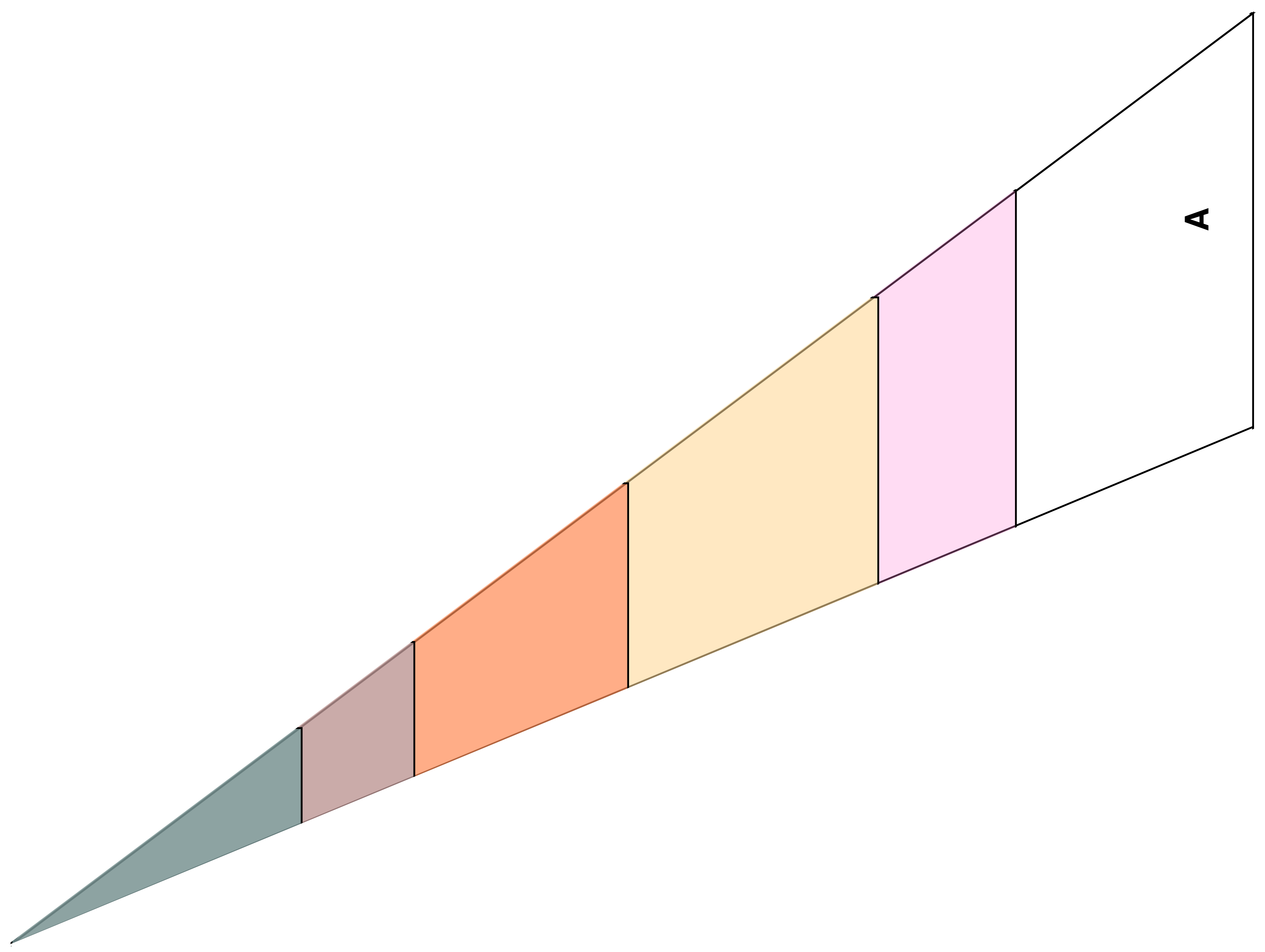


# THÉORÈME DE THALES

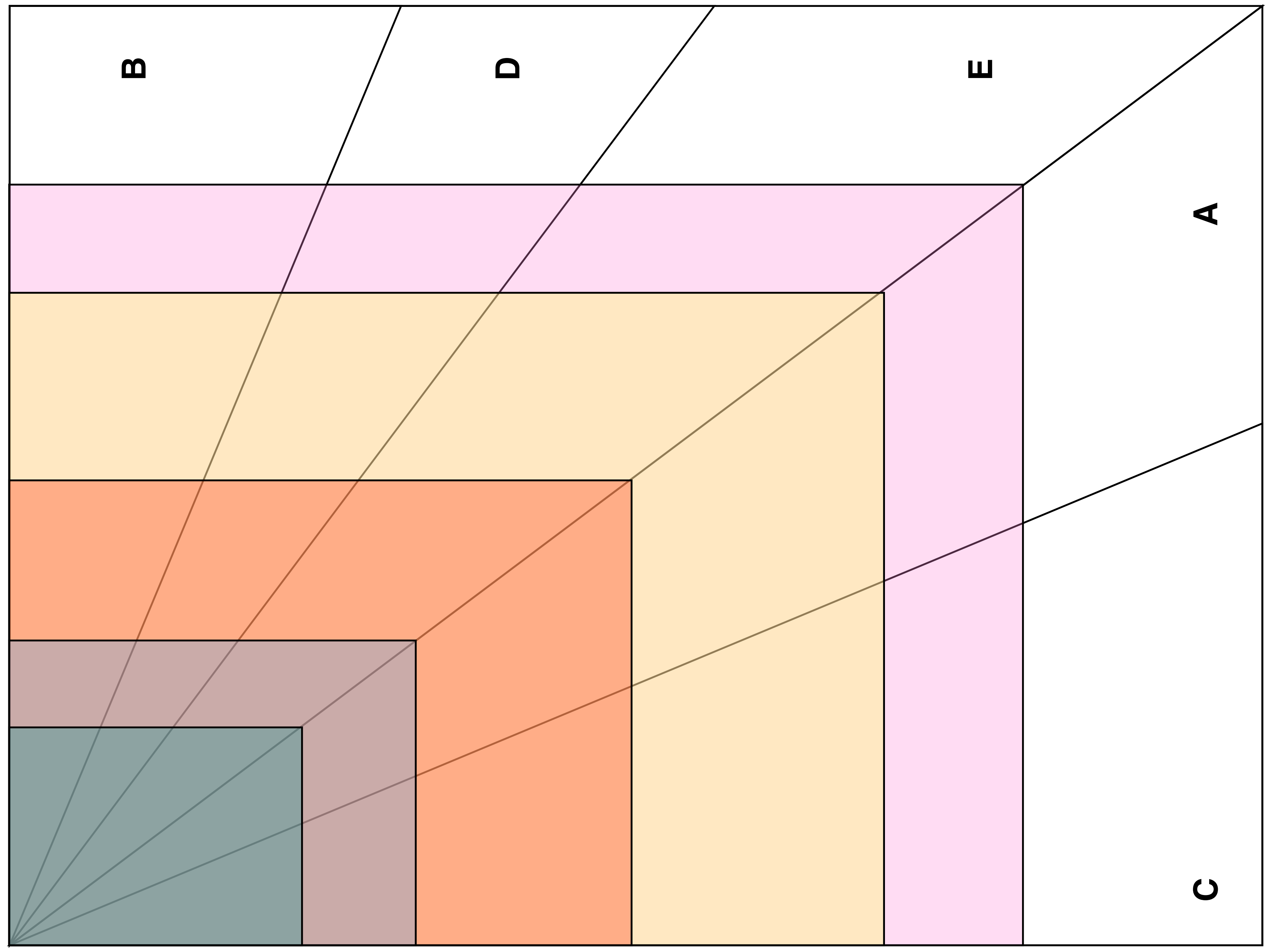
Regardons triangle par triangle.



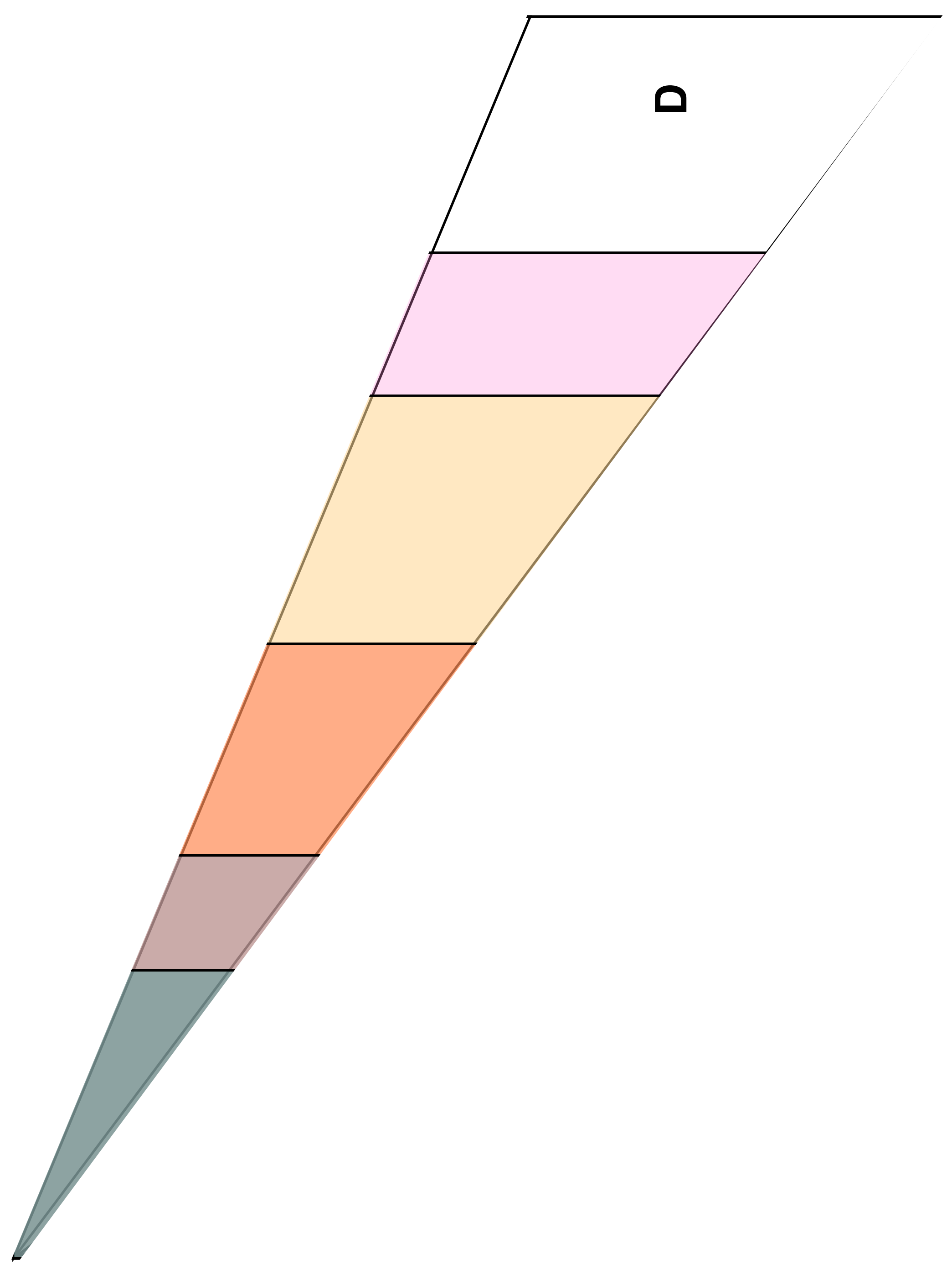
# THÉORÈME DE THALES



# THÉORÈME DE THALES



# THÉORÈME DE THALES



# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

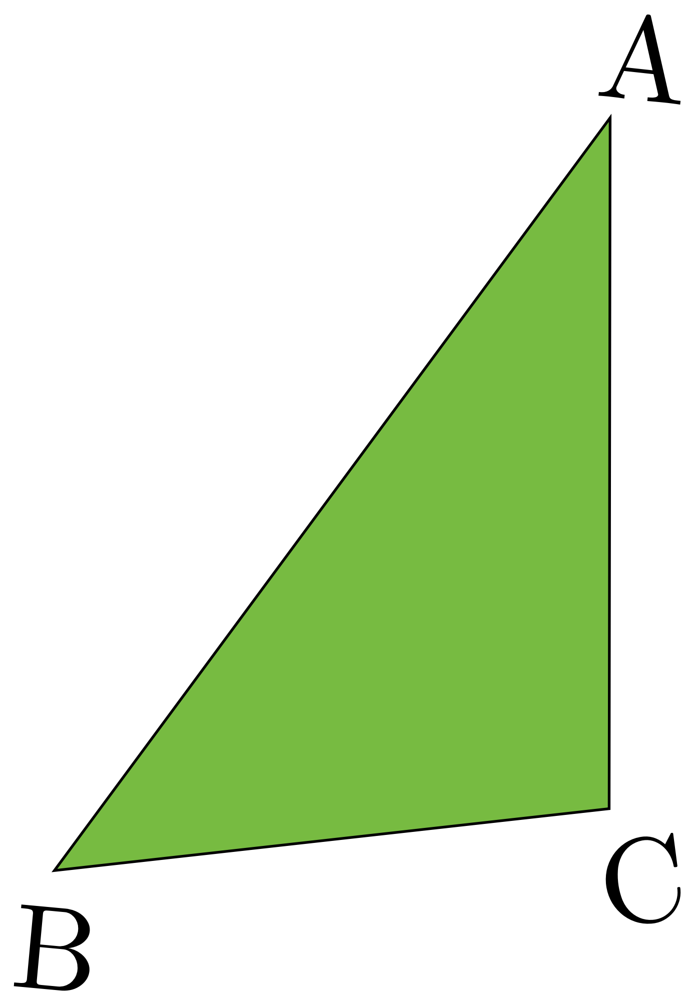
Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un côté de manière parallèle ».

# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un côté de manière parallèle ».

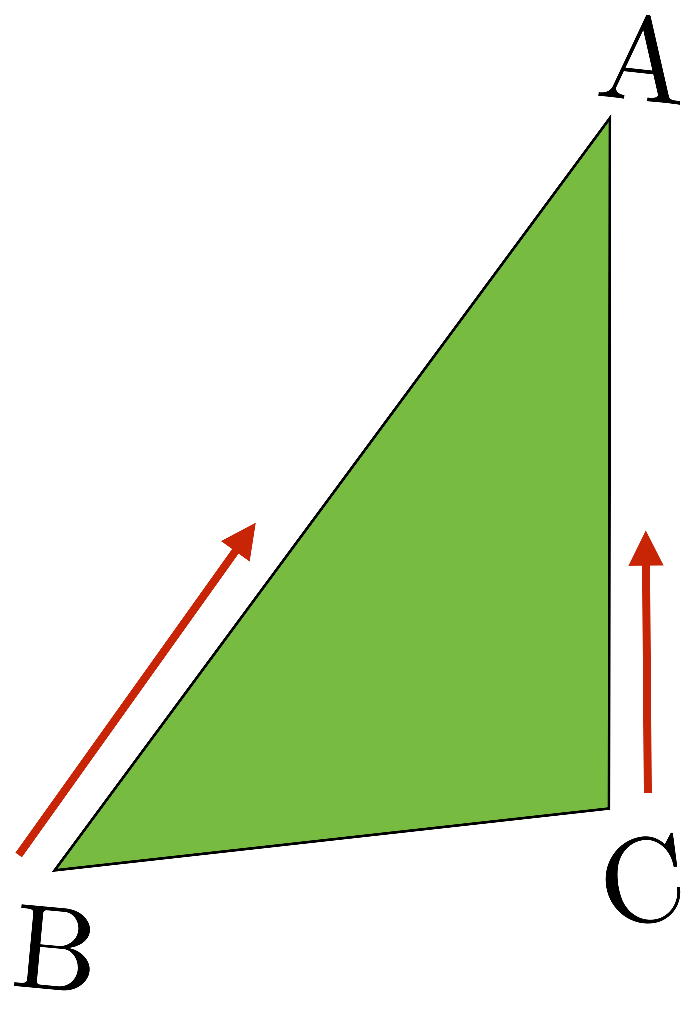


# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un côté de manière parallèle ».

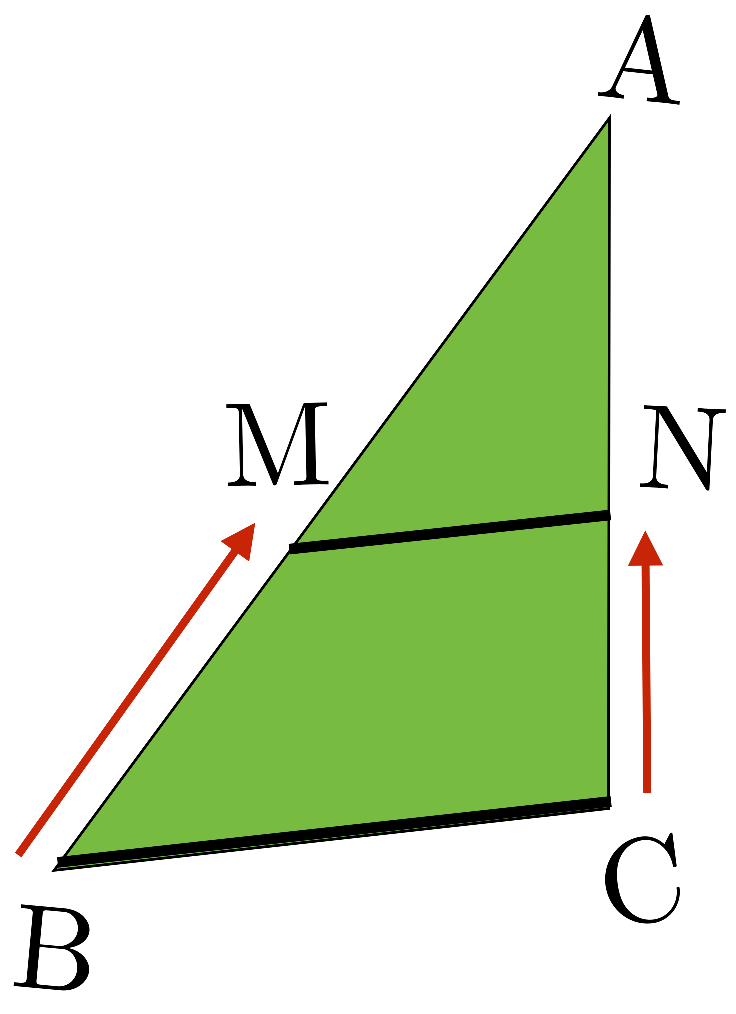


# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un côté de manière parallèle ».

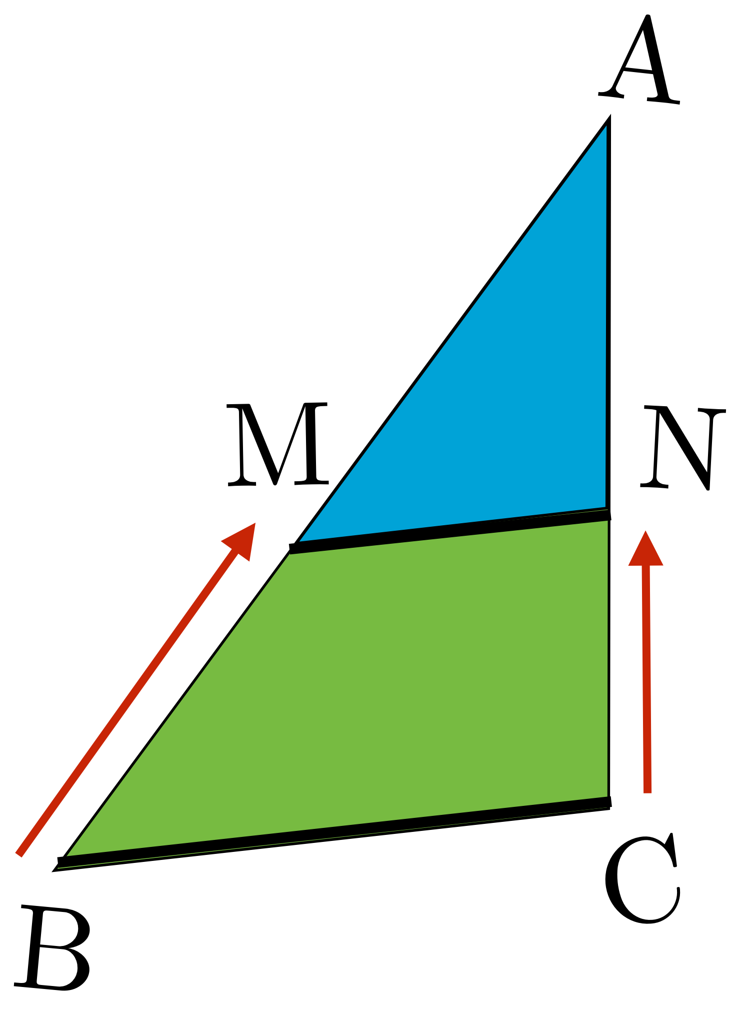


# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un  côté de manière parallèle ».




Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.

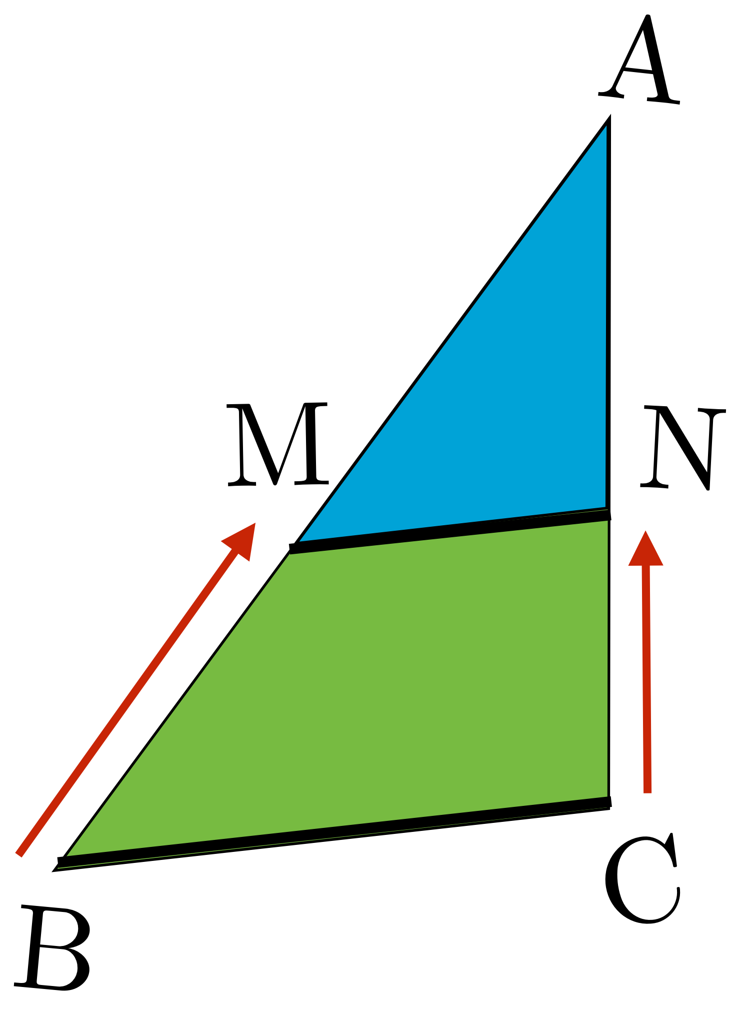
# THÉORÈME DE THALES

**Bilan à retenir :**

**Attention, il y a une deuxième séance pour amener les élèves à identifier de la proprotionnalité (voir brochure de l'Irem de Paris)**

Lors d'une réduction (ou d'un agrandissement) d'une figure,
les angles sont conservés et les longueurs sont réduites.

Dans le cas où la figure est un triangle, pour construire le triangle réduit,
il suffit de « déplacer un côté de manière parallèle ».




Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.

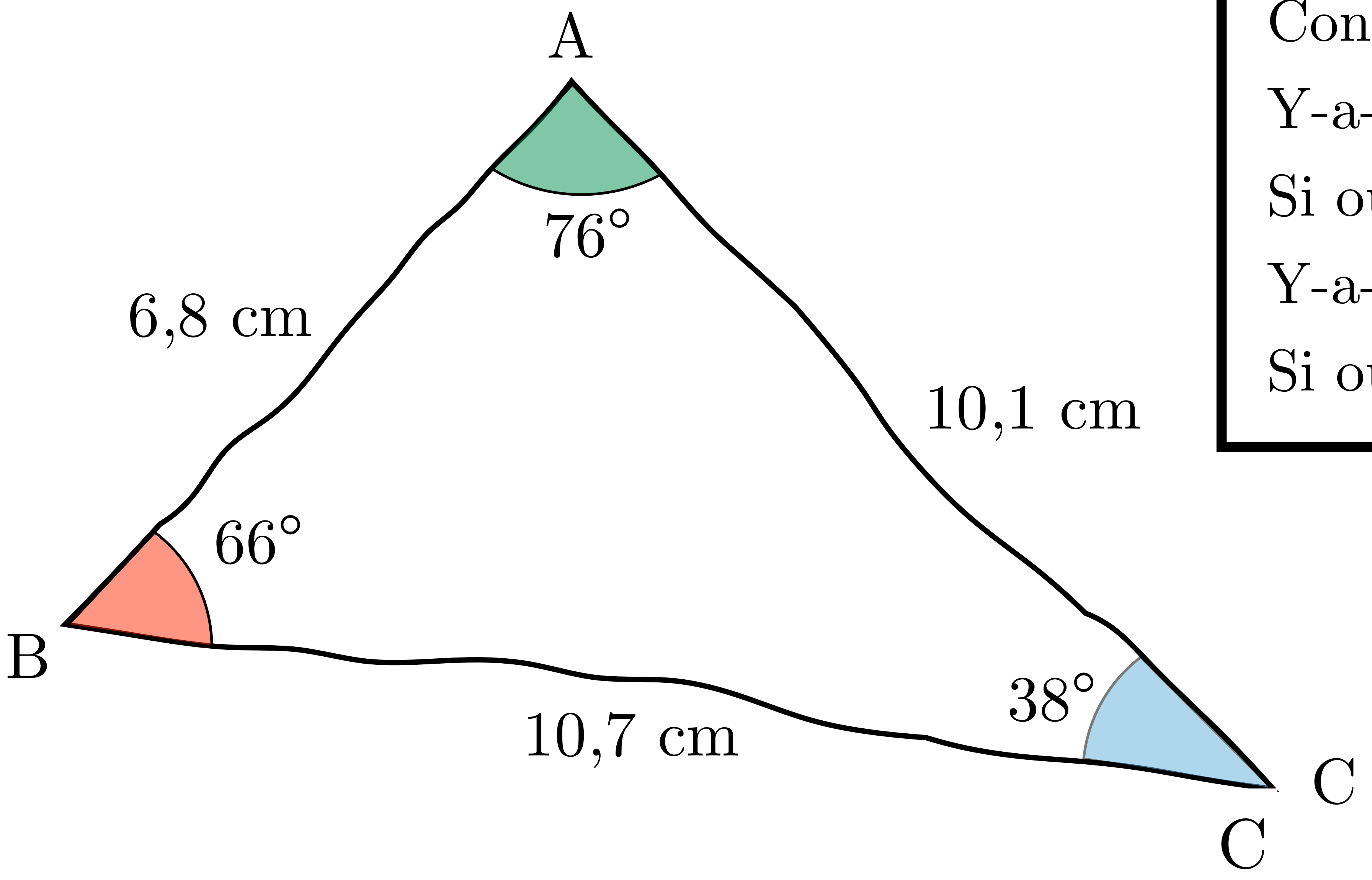
Ecriture mathématique de « déplacer un côté de manière parallèle ».

$$M \in [AB],\ N \in [AC] \text{ et } (MN) // (BC)$$

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

**Emetteur 1 :**

On considère le triangle ABC suivant :




Ecrire un texte contenant le moins de données possibles.

En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.

**Récepteur :**

Construire le triangle contenu dans le message reçu.

Y-a-t-il des données dans le texte reçu que tu n'as pas utilisées pour construire le triangle

Si oui, lesquelles ?

Y-a-t-il des données dans le texte reçu qui t'ont manquées pour construire le triangle ?

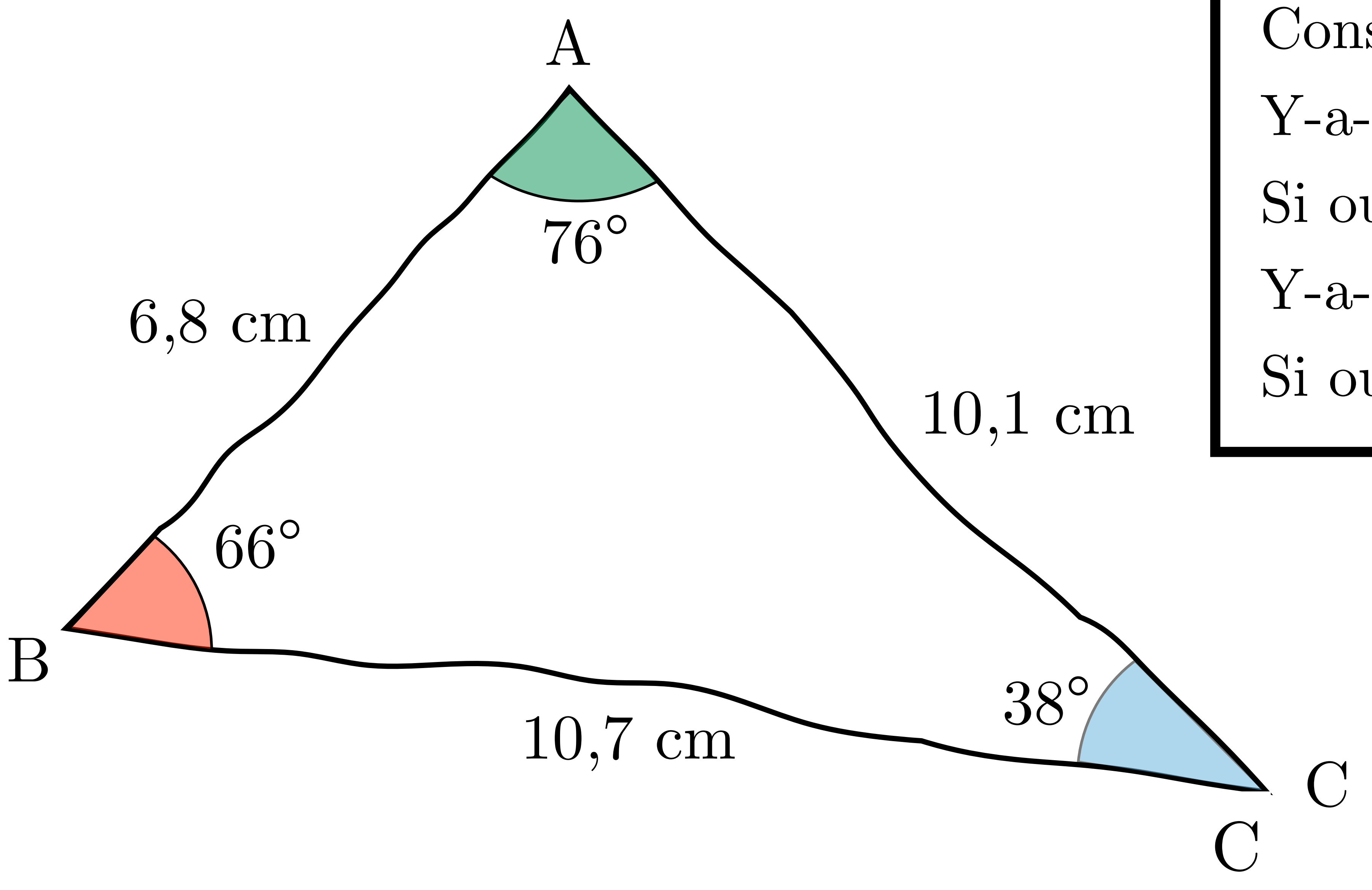
Si oui, lesquelles ?

**Voir brochure de l'Irem de Paris et ou petit'x n°117 pour plus de détails**

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

**<u>Emetteur 1 :</u>**

On considère le triangle ABC suivant :




Ecrire un texte <u>contenant le moins de données possibles</u>.

En lisant ton texte, une personne doit pouvoir construire ce triangle.

**<u>Récepteur :</u>**

Construire le triangle contenu dans le message reçu.

Y-a-t-il des données dans le texte reçu que tu n'as pas utilisées pour construire le triangle

Si oui, lesquelles ?

Y-a-t-il des données dans le texte reçu qui t'ont manquées pour construire le triangle ?

Si oui, lesquelles ?

| | Mesures choisies pour les triangles | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | AB | BC | AC | $\widehat{BAC}$ | $\widehat{ABC}$ | $\widehat{BCA}$ |
| Triangle 1 | 6,8 cm | 10,7 cm | 10,1 cm | 76° | 66° | 38° |
| Triangle 2 | 5,6 cm | 7,4 cm | 6,1 cm | 78° | 54° | 48° |
| Triangle 3 | 6,8 cm | 8 cm | 7,1 cm | 70° | 57° | 53° |
| Triangle 4 | 5 cm | 7,1 cm | 5,8 cm | 82° | 54° | 44° |

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

## Situation d'émetteur-récepteur avec des triangles

- **1ère phase** (Production d'un texte de construction)
  Tous les élèves sont émetteurs et écrivent un texte permettant de construire à l'identique le triangle qu'ils ont
- **2ème phase** (Échange des messages puis constructions des triangles)
  Tous les élèves sont récepteurs et suivent le message qu'ils ont reçu
- **3ème phase** (Mise en commun)
  Validation de la construction et/ou du message par confrontation
  Analyse de certains messages pour faire émerger les cas d'égalité des triangles

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

## Gestion des messages lors de la phase 2

**Critères retenus pour l'échange des messages :**

- Ne pas donner à un élève un message portant sur le triangle qu'il avait à la phase 1
- Ne pas donner à un élève un message portant sur la construction qu'il a utilisée à la phase 1 pour écrire son message
- Donner les messages incomplets ou comportant trop d'informations à des élèves ayant de bonnes capacités d'analyse.

**Remarques :**

1) Ces critères ne peuvent pas être mis en œuvre si le professeur ne dispose pas d'un temps (environ 30 minutes) pour analyser les messages (environ 15).
2) Une grille où sont récoltées toutes les informations contenues dans les messages est sans doute indispensable.

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

**Situation d'émetteur-récepteur avec des triangles**

Dans cette activité, il y a trois choix possibles pour l'enseignant :

- Imposer un seul triangle à toute la classe ?
- Laisser les élèves choisir leur triangle ?
- Imposer plusieurs triangles à toute la classe ?

# CAS D’ÉGALITÉ DES TRIANGLES

**<u>Situation d’émetteur-récepteur avec des triangles</u>**

Dans cette activité, il y a trois choix possibles pour l’enseignant :

- Imposer un seul triangle à toute la classe ?
- Laisser les élèves choisir leur triangle ?
- Imposer plusieurs triangles à toute la classe ?

<u>Un seul triangle à toute la classe ?</u>

Peu motivant pour les élèves de suivre un message dont on connait l’issue

Difficile pour le professeur de savoir si les élèves suivent le message reçu

Difficile de généraliser à partir d’un seul exemple

# CAS D’ÉGALITÉ DES TRIANGLES

## Situation d’émetteur-récepteur avec des triangles

Dans cette activité, il y a trois choix possibles pour l’enseignant :

- Imposer un seul triangle à toute la classe ?
- Laisser les élèves choisir leur triangle ?
- Imposer plusieurs triangles à toute la classe ?

Laisser les élèves choisir leur triangle :

Impossible pour le professeur d’éviter les cas particuliers

Impossible de comparer plusieurs messages pour un même triangle

Comment impliquer les élèves lors des comparaisons si leurs triangles n’apparaissent pas ?

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

**<u>Situation d'émetteur-récepteur avec des triangles</u>**

Dans cette activité, il y a trois choix possibles pour l'enseignant :

- Imposer un seul triangle à toute la classe ?
- Laisser les élèves choisir leur triangle ?
- Imposer plusieurs triangles à toute la classe ?

<u>Imposer plusieurs triangles à toute la classe :</u>

Les inconvénients des autres choix disparaissent

Quel(s) triangles choisir ? Et combien ? **4 triangles permet assez de variété**

Gestion des messages complexe pour l'enseignant **Création d'une grille ?**

**A cheval sur deux séances ?**

**Travail en binôme**

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

## Choix des messages :

ABC est un triangle quelconque
AB = 5,6 cm ; $\widehat{BAC} = 78°$
AC = 6,1 ; $\widehat{ACB} = 48°$

Tracer un segment BC de 7,1 cm puis faites l'angle $\widehat{ABC}$ de 54° et l'angle $\widehat{BCA}$ de 44°

BA = 5cm , AC = 5,8 cm , BC = 7,1 cm

Tracer l'angle $\widehat{ABC}$ de 66°, $\widehat{BCA}$ de 38° et $\widehat{CAB}$ de 76°.

AC = 6,1cm L'angle $\widehat{ACB} = 48°$
BC = 7,4cm , L'angle $\widehat{CBA} = 54°$
AB = 5,6cm

construire un triangle, ABC dont l'angle ABC fait 66° et segment [AC] fait 10,1 cm

Tracer le segment [BC] 10,7 cm.
Tracer l'angle $\widehat{BCA}$ 38°, prolonger.
Tracer l'angle $\widehat{ABC}$ 66° prolonger.
Nommer les sommets.

Construire un triangle ABC tel que : AB = 5 cm - BC = 7,1 cm
$\widehat{ACB} = 44°$

Tracer un segment [BC] de 8 cm.
L'angle C mesure 53°. Tracer un segment [AB] de 6,8 cm

Tracer AB tel que AB égal 6,8 cm, puis tracer AC tel que AC égal 7,1 et l'angle $\widehat{BAC} = 70°$.

# SOMME DES ANGLES DANS UN TRIANGLE

**Partie I :**

Voici trois morceaux d'un triangle.

1) Reconstituer le triangle en manipulant ces trois morceaux.

2) a) Manipuler ces trois morceaux pour que les trois angles de ce triangle soient adjacents.

b) Émettre une conjecture.

**Partie II :**

1) Utilisons un logiciel de géométrie pour disposer de plus d'exemples et avoir des mesures plus précises.

| | $\widehat{ABC}$ | $\widehat{BAC}$ | $\widehat{ACB}$ |
|---|---|---|---|
| Triangle n°1 | | | |
| Triangle n°2 | | | |
| Triangle n°3 | | | |
| Triangle n°4 | | | |

2) La conjecture est-elle confirmée ?

3) Démontrerons cette conjecture.

**Partie III :**

Utiliser votre conjecture dans les situations suivantes.

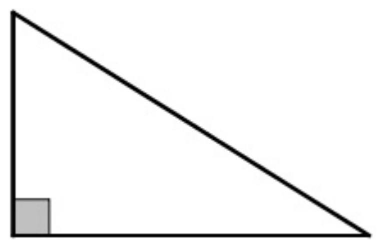
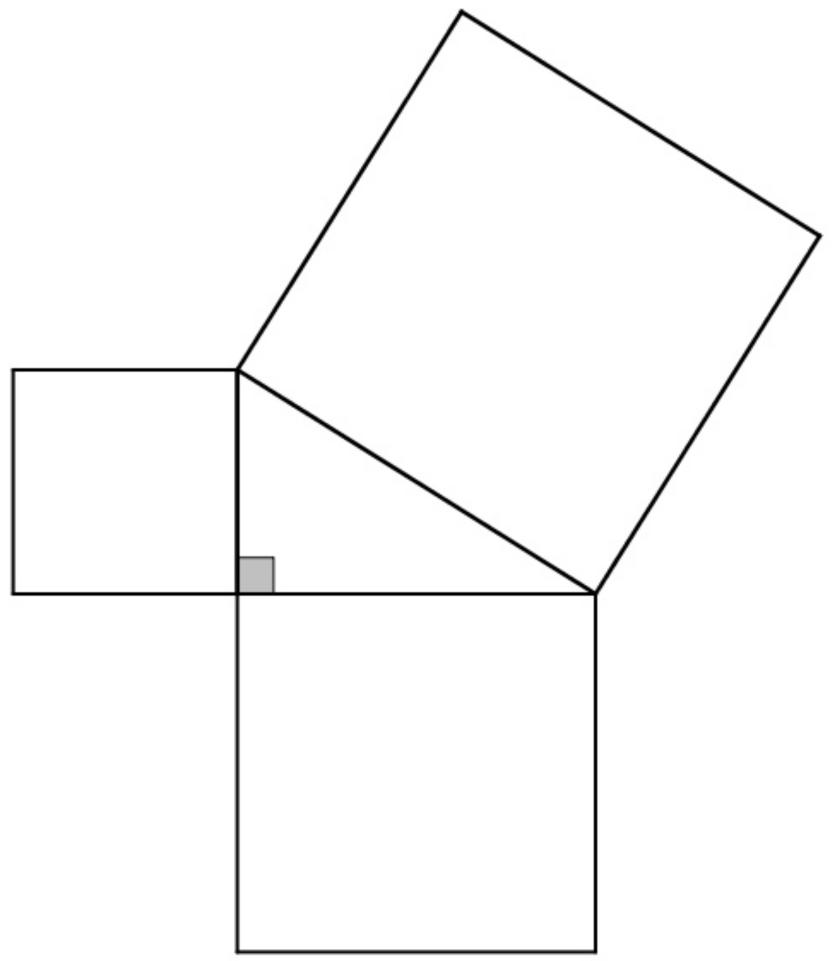
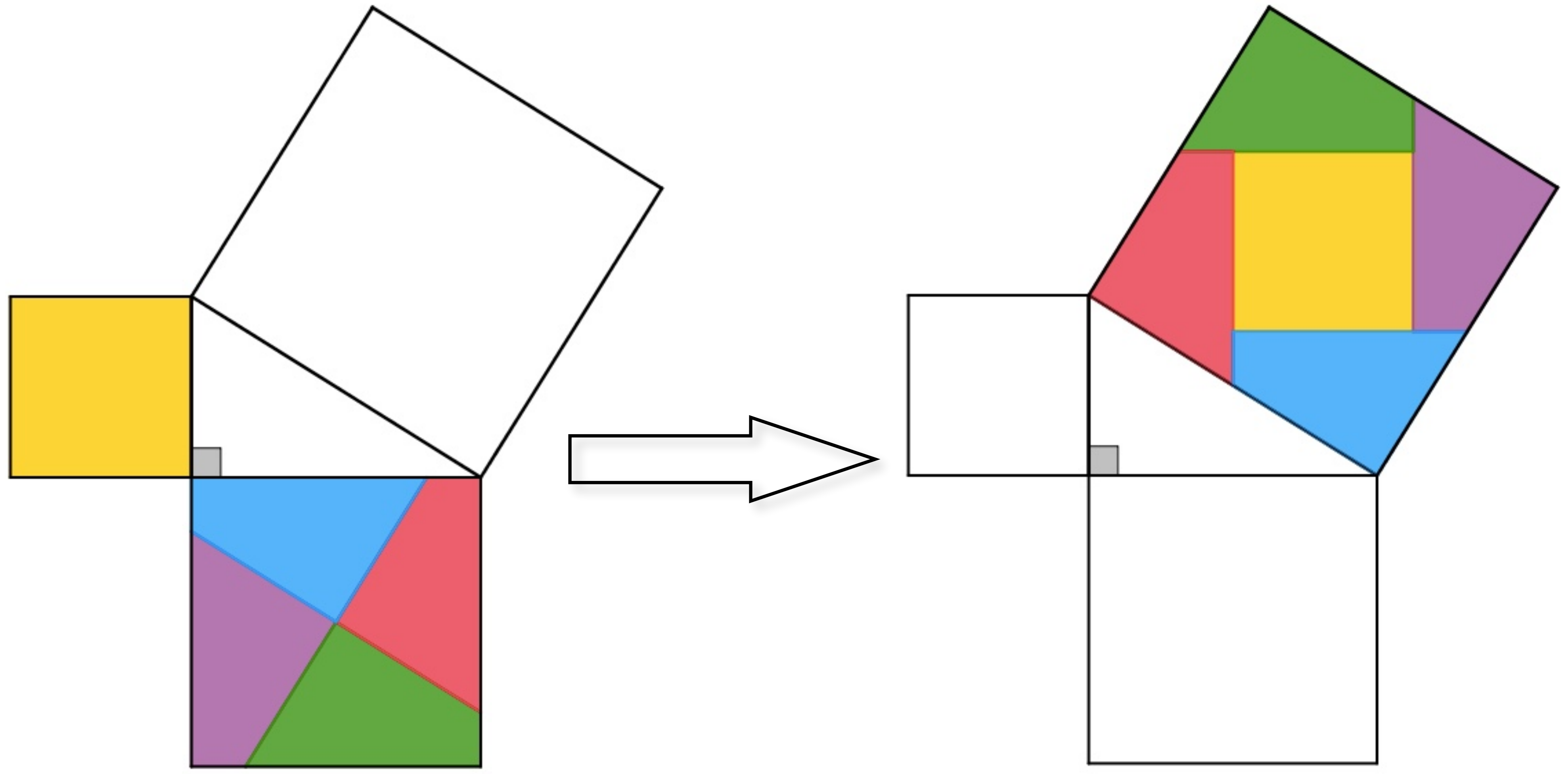
a) Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{ABC} = 78°$ et $\widehat{ACB} = 35°$.

b) Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $\widehat{ABC} = 48°$.

c) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\widehat{ABC} = 64°$.

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

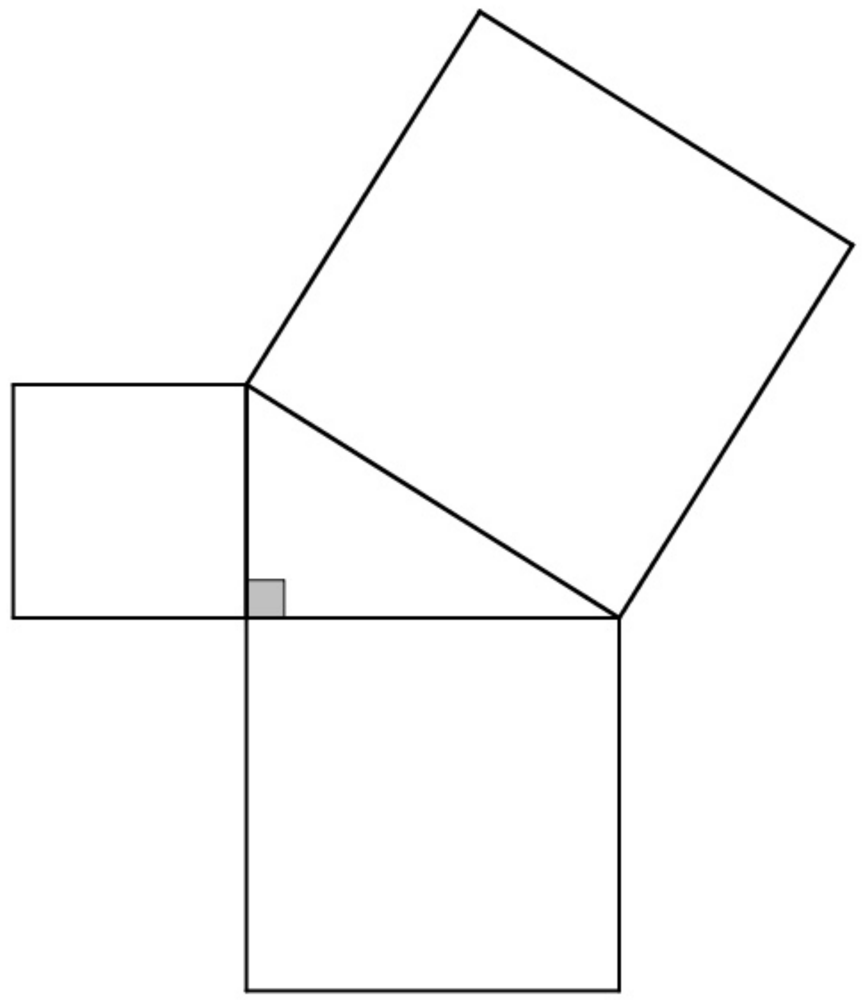
Un mathématicien s'est intéressé aux triangles rectangles.
Il a découvert une propriété concernant les 3 carrés extérieurs d'un triangle rectangle.

| | | |
|---|---|---|
|  Un triangle rectangle |  les 3 carrés extérieurs au triangle rectangle | **Représentation géométrique de la propriété découverte par le mathématicien**  |

1) Ecrire une égalité traduisant la propriété découverte par ce mathématicien.

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

2) Soit ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm.
Utiliser dans cette situation la propriété découverte par ce mathématicien.



3) Calculer la longueur manquante dans les triangles suivants :

a) ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 5 cm et BC = 13 cm.

b) ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4,8 cm et AC = 2 cm.

c) ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 7 cm et AC = 6 cm.

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

**Analyse *a priori* :**

- Les élèves sont obligés d'utiliser par eux-mêmes le théorème de Pythagore mais sans le formalisme qui est remis à plus tard.
- La question 1 ne fait pas intervenir de mesure (cadre uniquement géométrique)
- La question 1 nécessite deux pré-requis : le calcul de l'aire d'un carré et **le principe de décomposition et recomposition pour l'aire d'une figure.**
- Les questions 2 et 3 sont de difficulté croissante et sont pertinentes. Par exemple, la question 3c) permet d'introduire les nombres irrationnels.
- Demande du matériel à construire et à plastifier soi-même si l'on fait le choix que les élèves peuvent manipuler les pièces du puzzle (de Périgal)

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

## Les étapes pour mettre en œuvre cette situation

- S'assurer que les pré-requis sont disponibles chez les élèves

## ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

1) Voici deux figures :

Figure A Figure B

Sans faire de calcul, comparer les aires des figures A et B. Expliquer votre méthode.

2) L'égalité $1+9\times7=10\times(5+2)$ est-elle vérifiée ? Justifier.

3) Calculer l'aire d'un carré de côté 5 cm.

4) Calculer $4^2+3^2=$

5) Calculer la longueur du côté d'un carré d'aire 64 cm².

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

## Les étapes pour mettre en œuvre cette situation

**Prévoir une animation GeoGebra**
**Donner les pièces du puzzles aux élèves**

- Pour la question 1 : travail individuel
  laisser un temps de recherche de plusieurs minutes
  mise en commun les idées des élèves (instaurer un débat)
  tester oralement la compréhension des élèves sur des exemples

- Pour la question 2 : travail individuel, calculatrice autorisée
  à distribuer aux élèves après la fin de la question 1
  laisser un temps de recherche de plusieurs minutes
  mise en commun des idées des élèves (instaurer un débat)

- Pour les questions 3a) et 3b) : même mise en œuvre que la question 2

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

## Les étapes pour mettre en œuvre cette situation

- Pour la question 3c : travail individuel

laisser un temps de recherche de plusieurs minutes

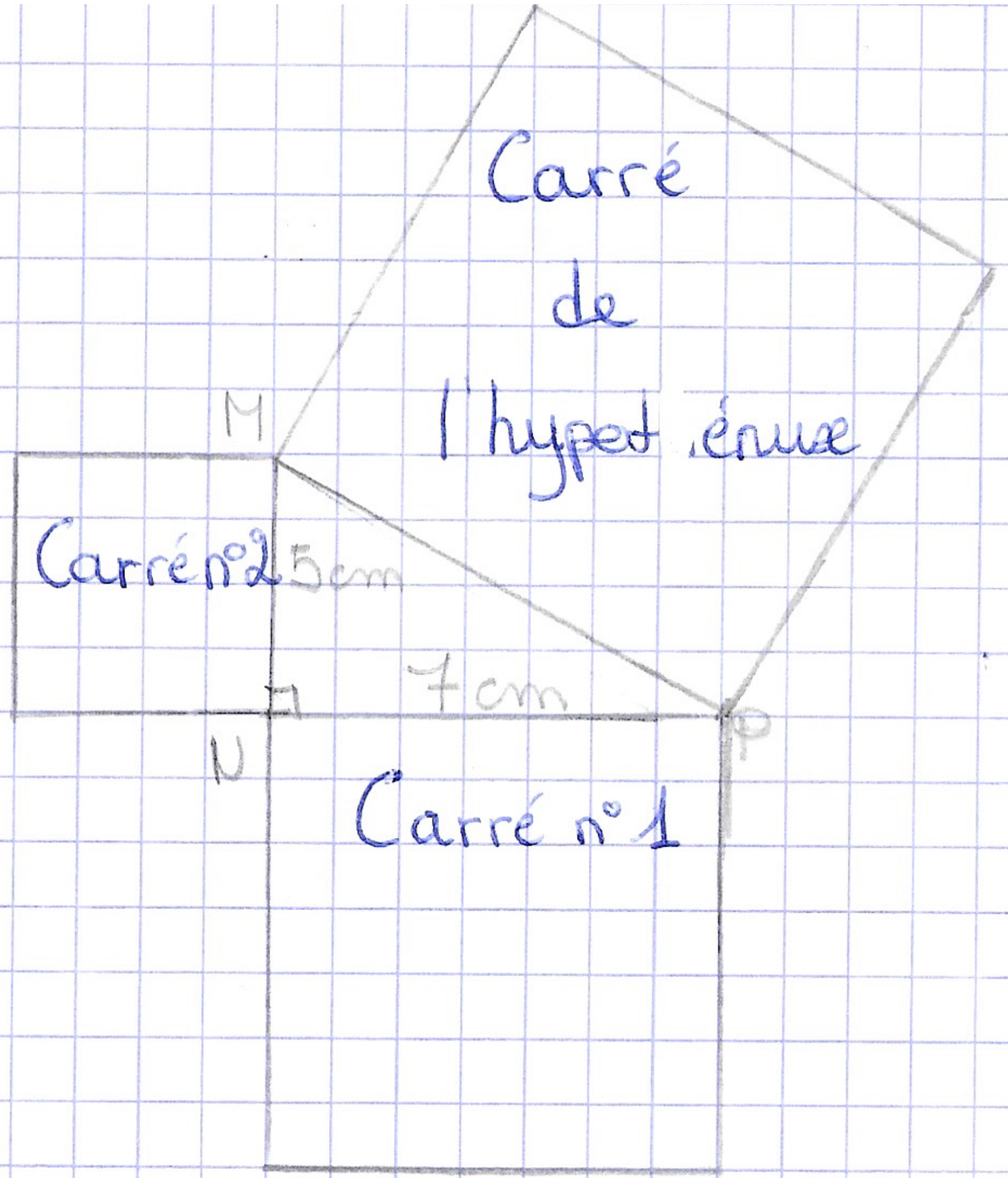
mise en commun les idées des élèves (instaurer un débat)

faire comprendre aux élèves que les nombres rationnels

ne permettent pas de répondre à la question.

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

c)




Aire carré n°1 : 7x7 : 49 cm²

Aire carré n°2 : 5x5 : 25 cm²

Aire carré de l'hypoténuse : 49+25 : 74 cm²

x = 74 cm²

8x8=64
9x9 : 81
8,5x8,5 : 72,25
8,6x8,6 : 73,96
8,61x8,61 : 74,1321
8,605x8,605 : 74,046025

Demander aux élèves d'écrire leurs essais

# THÉORÈME DE PYTHAGORE

## Exemple de bilan à la fin de la question 3c

$8,602\,325\,267 \times 8,602\,325\,267 = 74$

La calculatrice affiche une valeur fausse
Posons la multiplication.

$$
\begin{array}{r}
8,602\,325267 \\
\times\ 8,602\,325267 \\
\hline
60216276869 \\
+\ 516139516020 \\
+\ 1720465053400 \\
000 \\
0000 \\
\hline
289
\end{array}
$$

Les mathématiciens, pour résoudre ce problème, ont inventés des nouveaux : les racines carrés.

$\sqrt{74}$ se dit "racine carré de 74.

$\sqrt{74}$ est le nombre qui multiplié par lui-même est égale à 74

$? \times ? = 74 = \sqrt{74} \times \sqrt{74} = 74$

Donc $MP = \sqrt{74}$ cm $\simeq 8,602\,325\,267$ cm

valeur exacte — valeur approché