Un classique chinois : les *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*

九章算術 *jĭu zhāng sùan shù*

Sources :

[9] Karine Chemla et Guo Shuchun *Les neufs chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* (édition critique bilingue), Dunod, 2004.

Un dossier très riche sur les mathématiques chinoises a été préparé par K. Chemla sur le site Culturemath. En particulier : *Aperçu de l'histoire des mathématiques en Chine ancienne dans le contexte d'une histoire internationale* [10]

et *Relations entre procédure et démonstration : La mesure du cercle dans les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques et dans leur commentaire par Liu Hui (IIIe siècle)* [11]

Ainsi que la vidéo : http://www.math.ens.fr/culturemath/video/9chapitres/tableindex.html

[12**]** Jean-Claude Martzloff *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1987. *History of Chinese mathematics*, Springer, 1997.

Pour s'initier en ligne au calcul avec des baguettes, le site conçu par Andrea Bréard

http://mathschine.univ-lille1.fr/index.html?%22pages/intro.htm%22 [13]

Un premier survol des *Neuf Chapitres*

1. *Champ rectangulaire* : calcul sur les fractions et les nombres mixtes ; aire de figures rectilignes ; mesure du cercle : lien entre aire et périmètre, approximation de π.
2. *Petit mil et grains décortiqués* : la règle de trois (« procédure du supposons »).
3. *Parts pondérées en fonction des degrés* : partages en parts inégales de poids respectifs donnés.
4. *Petite largeur* : division entre nombres fractionnaires, extraction de racine carrée ou cubique dans le cadre de problèmes géométriques. Volume de la sphère.
5. *Discuter des travaux* : calcul de volumes : polyèdres et justification « par blocs standard », volumes à base circulaire; commentaires de Liu Hui avec des raisonnements de type passage à la limite.
6. *Paiement de l'impôt de manière égalitaire en fonction du transport* : semble être une collection de problèmes assez concrets reposant sur les chapitres 2 et 3.

7. *Excédent et déficit* : méthode de double fausse position ; quelques exemple d'application à des problèmes non linéaires (interprétable comme une interpolation linéaire).
8. *Fangcheng* : résolution de systèmes linéaires par élimination (pivot de Gauss) ; utilisation de nombres négatifs (baguettes rouges ou noires) comme intermédiaires de calculs ou comme coefficients de système ; « procédure du positif et du négatif » (règles d'addition et soustraction des relatifs).
9. *Base (gou) et hauteur (gu)* : triangle rectangle, théorème de Pythagore, carré et cercle inscrits dans un triangle rectangle. Calcul de distances inaccessibles.

Extraits des *Neuf Chapitres*

Le texte du classique est en donné en caractères droits, les commentaires de Liu Hui (occasionnellement, de Li Chunfeng) sont en italiques. Les coupures sont signalées par (…).

Calcul sur les fractions (extraits du chapitre 1)

(1.5) Supposons qu'on ait 12/18. On demande combien l'on obtient si on le simplifie.

Réponse : 2/3.

(…) *Commentaire : La raison pour laquelle on simplifie les parts, c'est qu'il n'est pas possible que les mesures des quantités des choses soient toutes des nombres entiers, qu'il faut donc recourir à des parts pour les exprimer. Or, quand des parts font la quantité, si elles sont trop complexes elles sont difficiles à utiliser. Supposons que l'on ait 2/4 (deux de quatre parts) ; si on le dit en compliquant, on peut aussi en faire 4/8 (quatre de huit parts), et si on le dit en simplifiant, 1/2 (un de deux parts). Quoique donc, leurs expressions diffèrent, pour ce qui est d'elles (les parts) en tant qu'elles font une quantité, cela revient au même.*

(…) Procédure de la simplification des parts :

(…) Si l'on peut diviser par deux, on divise par deux. Si l'on ne peut pas diviser par deux, on place en auxiliaire les valeurs du numérateur et du dénominateur des parts ; on soustrait le plus petit du plus grand, on les diminue en les soustrayant tour à tour l'un de l'autre jusqu'à trouver qu'ils soient égaux et on les (numérateur et dénominateur) simplifie par le nombre égal.

« Le nombre égal les simplifie », c'est-à-dire les divise. La raison pour laquelle on soustrait l'un de l'autre, c'est que tous sont des superpositions réitérées du nombre égal, c'est pourquoi « on les simplifie par le nombre égal ».

(1.7) Supposons qu'on ait 1/3, 2/5. On demande combien l'on obtient si on les réunit.

Réponse : 11/15.

(…) (1.9) Supposons à nouveau qu'on ait 1/2, 2/3, 3/4, 4/5. On demande combien l'on obtient si on les réunit.

Réponse : on obtient 2 43/60.

Procédure de la réunion des parts :

(…) Les dénominateurs multiplient les numérateurs qui ne leurs correspondent pas ; on les somme et on prend ceci comme dividende. Les dénominateurs multipliés les uns par les autres font les diviseurs.

« Les dénominateurs multiplient les numérateurs qui ne leur correspondent pas » : les quantités que l'on dit en les simplifiant, leurs parts sont plus grossières ; les quantités que l'on dit en les compliquant, leurs parts sont plus fines. Quoique donc, les degrés de finesse diffèrent, pourtant les réalités auxquelles elles correspondent sont les mêmes. Quand de nombreuses parts disparates sont mêlées, si on ne les raffine pas, elles ne se rencontrent pas. Les désagréger en multipliant, c'est ainsi qu'on les fait communiquer. Quand on les a fait communiquer, on peut sommer. Chaque fois que « des dénominateurs multiplient un numérateur qui ne leur correspond pas », on appelle cela homogénéiser. Que l'ensemble des « dénominateurs soient multipliés les uns par les autres », on appelle cela égaliser. Egaliser, c'est faire que les parts, comme elles sont mises en relation avec les autres, communiquent, et ainsi elles partagent le même dénominateur. Homogénéiser, c'est faire que les numérateurs et les dénominateurs soient homogènes, et ainsi la situation ne peut avoir perdu les quantités de départ. (…) *Multiplier pour les désagréger, simplifier pour les réunir, homogénéiser, égaliser pour les faire communiquer, comment ne serait-ce pas les points-clefs des mathématiques.*

Pour ce qui est d'une autre procédure, on peut faire que les dénominateurs divisent l'égalisé pour faire les lü *et que les* lü *multiplient les numérateurs pour faire les homogénéisés*[1].

On effectue la division du dividende par le diviseur. La quantité qui ne remplit pas le diviseur est nommée au moyen du diviseur.

(…)

(1.17) Supposons que 7 personnes partagent 8 sapèques et 1/3 de sapèque. On demande combien une personne obtient.

Réponse : une personne obtient 1 sapèque et 4/21 de sapèque.

(… je coupe l'énoncé et le commentaire de la « procédure du partage des parts »…)

(1.19) Supposons qu'on ait un champ de 4/7 de *bu* de largeur, et de 3/5 de *bu* de longueur. On demande combien fait le champ.

Réponse : 12/35 de *bu*.

[1] « chaque fois que des quantités *(shu*) sont données en relation les unes avec les autres, on les appelle des *lü* » (Liu Hui, p.167).

(…) Procédure de la multiplication des parts :

(…) Les dénominateurs multipliés l'un par l'autre font le diviseur ; les numérateurs multipliés l'un par l'autre font le dividende. On effectue la division du dividende par le diviseur.

Dans chacun des cas où un dividende ne remplit pas un diviseur, alors ils ont les noms de dénominateur et de numérateur. S'il y a des parts, on dilate le dividende correspondant par multiplication, alors, au cas où il remplit le diviseur, par suite (la division) ne fait plus qu'un entier. Si, de plus, on multiplie quelque chose par le numérateur, le dénominateur doit en conséquence diviser (le produit) en retour[2]*. Diviser en retour, c'est « effectuer la division du dividende par le diviseur ». A présent « les numérateurs sont multipliés l'un par l'autre », donc les dénominateurs doivent chacun diviser en retour. D'où l'on fait se multiplier l'un par l'autre les dénominateurs et on divise d'un coup (par leur produit).*

Si, ici, l'on utilise la formulation d'un champ ayant longueur et largeur, il est difficile de faire comprendre (la procédure) dans toute sa généralité. Supposons que l'on demande : 20 chevaux valant 12 jin *d'or, si l'on vend les 20 chevaux, et que 35 personnes se partagent (le gain), combien une personne obtient-t-elle ? Réponse : 12/35 de* jin.

Si, pour le résoudre, il faut suivre la procédure du partage des parts, on prend 12 jin *d'or comme dividende, et 35 personnes comme diviseur. Supposons qu'en modifiant (le problème), on dise : 5 chevaux valent 3* jin *d'or. Si on vend 4 chevaux et que 7 personnes partagent (le gain), combien une personne obtient-elle ? Réponse : 12/35 de* jin.

Pour le résoudre, il faut homogénéiser ces quantités de personnes et d'or, et c'est alors en tout point conforme au premier problème et relève du partage des parts.

S'il en est ainsi, le fait de « multiplier l'un par l'autre les numérateurs pour faire le dividende », c'est comme homogénéiser cette (quantité) d'or ; le fait de « multiplier l'un par l'autre les dénominateurs pour faire le diviseur », c'est comme homogénéiser cette (quantité) de personnes. Si on égalise les dénominateurs, cela fait 20, mais que les chevaux soient égalisés, cela ne joue aucun rôle : on veut seulement trouver les homogénéisés, c'est tout.

De plus, que 5 chevaux valent 3 jin *d'or, ce sont les* lü *en nombres entiers. Si on les exprime en parts, alors cela fait qu'un cheval vaut 3/5 de* jin *d'or. Que 7 personnes vendent 4 chevaux, c'est qu'une personne vend 4/7 de cheval. Les quantités d'or et de personnes par croisement s'engendrent respectivement l'une l'autre.*

Si l'on s'en tient à l'expression, c'est différent, mais pour ce qui est des quantités calculées, les trois procédures reviennent au même.

[2] Diviser en retour (*baochu*) « désigne une opération de division qui trouve sa justification dans le fait qu'ayant auparavant multiplié par un facteur excédentaire, il faut, pour compenser, diviser maintenant par ce même facteur (4.16), ou encore qu'ayant multiplié par une quantité elle-même trop grande d'un facteur multiplicatif donné, il faut diviser ensuite par ce facteur. » ([9] p.900)

Aire du disque (extraits du chapitre 1)[3]

(1.31) Supposons qu'on ait un champ circulaire de 30 *bu* de circonférence et de 10 *bu* de diamètre.

<u>Li Chunfeng et ses associés commentent respectueusement</u> : l'idée de la procédure est de prendre, comme lü, 3 *pour la circonférence et* 1 *pour le diamètre : une circonférence de* 30 bu *correspond à un diamètre de* 10 bu. *Si maintenant on s'appuie sur les* lü *plus précis, cela correspond à un diamètre de* 9 bu 6/11 *de* bu.

On demande combien fait le champ.

Réponse : 75 *bu*.

Avec ma procédure, ceci devrait faire un champ de 71 bu 103/157 *de* bu.

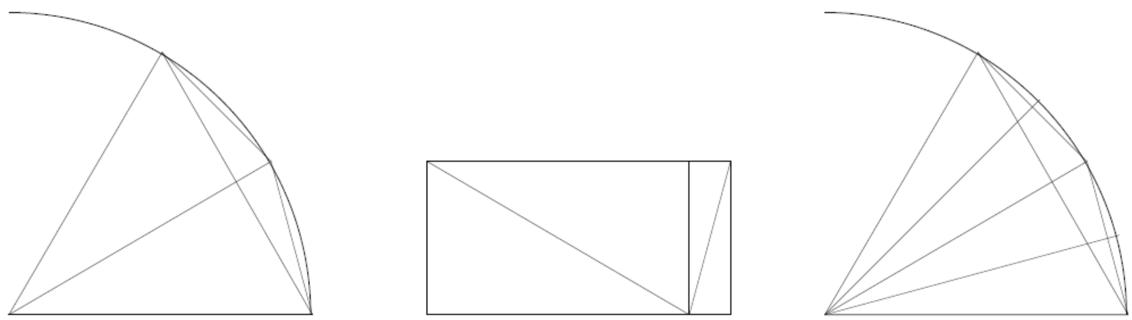
(…) Procédure : la moitié de la circonférence et la moitié du diamètre étant multipliées l'une par l'autre, on obtient les *bu* du produit.

Commentaire : La moitié de la circonférence fait la longueur et la moitié du diamètre fait la largeur. Par conséquent, la largeur et la longueur étant multipliées l'une par l'autre, cela fait les bu *du produit. Supposons que le diamètre du cercle soit de 2* chi. *Les valeurs d'un côté de l'hexagone inscrit dans le cercle et du demi-diamètre sont égales. Cela correspond au fait que, lorsque le* lü *du diamètre vaut* 1, *par suite le* lü *de la circonférence correspondant aux segments circulaires vaut* 3.

Commentaire additionnel : Faisons une figure. Si l'on multiplie par un côté de l'hexagone le demi-diamètre du cercle correspondant au segment circulaire, et que l'on multiplie ceci par trois, on obtient l'aire du dodécagone[4]*. Si, à nouveau, on coupe celui-ci, puis que l'on multiplie par un côté du dodécagone le demi-diamètre pour un segment circulaire, et qu'on multiplie ceci par 6, alors on obtient l'aire du* 24-*gone.*

Plus l'on coupe fin, plus ce qui est perdu est petit. On coupe ceux-ci (les polygones) et on les recoupe jusqu'à atteindre ce que l'on ne peut pas couper. Alors le corps en coïncide avec la circonférence du cercle et il n'y a rien qui soit perdu. A l'extérieur des côtés du polygone, il y

[3] [9] p.177-178. Par insertion de polygones réguliers (des 6.2^n-gones), Liu Hui arrive à approcher π par 157/50, puis par 3927/1250 ([9] p.183).
[4] [11] p. 301.



a encore du diamètre de reste. Si l'on multiplie par les côtés le diamètre de reste, alors l'aire déborde à l'extérieur des segments circulaires[5]*. Pour ce qui est du polygone dont le degré de finesse est tel que son corps coïncide avec le cercle, à l'extérieur (de ses côtés), il n'y a, par suite, pas de diamètre de reste. Si, à l'extérieur, il n'y a pas de diamètre de reste, alors l'aire ne déborde pas au-dehors. Multiplier le côté par le demi-diamètre, cela revient à trancher chaque quartier du polygone et chaque morceau est dans tous les cas obtenu deux fois. C'est pourquoi quand on multiplie la moitié du diamètre par la moitié de la circonférence, alors cela fait l'aire du cercle.*

Parts pondérées selon les degrés (extrait du chapitre 3)[6]

Procédure des parts pondérées selon les degrés : on place respectivement la rangée des coefficients de la pondération en fonction des degrés et on somme en auxiliaire, ce qui fait le diviseur. On multiplie par ce que l'on partage, les coefficients que l'on avait avant qu'ils ne soient sommés, ce qui fait respectivement les dividendes. Et on effectue la division des dividendes par le diviseur. Les quantités qui ne remplissent pas le diviseur sont nommées à l'aide du diviseur.

Supposons qu'un dignitaire du cinquième ordre (*dafu*), un dignitaire du quatrième ordre (*bugeng*), un dignitaire du troisième ordre (*zanniao*), un dignitaire du second ordre (*shangzao*) et un dignitaire du premier ordre (*gongshi*), soit en tout 5 personnes, chassant ensemble, capturent 5 cerfs. Si l'on veut partager ceux-ci en fonction des grades associés à leurs titres de noblesse, on demande ce que chacun obtient.

Réponse : Le dignitaire du cinquième ordre obtient 1 cerf 2/3 de cerf ;

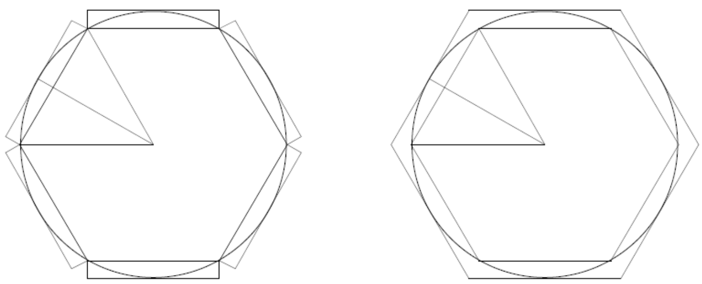
Le dignitaire du quatrième ordre obtient 1 cerf 1/3 de cerf ;

Le dignitaire du troisième ordre obtient 1 cerf ;

Le dignitaire du second ordre obtient 2/3 de cerf ;

Le dignitaire du premier ordre obtient 1/3 de cerf.

[5] [11] p. 308.



Liu Hui Archimède

[6] Je ne donne ici que le texte du classique ([9] p.283-285), et coupe les commentaires de Liu Hui.

Deux problèmes à résoudre par *Fangcheng* (extraits du chapitre 8)[7]

Supposons que 3 *bing* de millet de qualité supérieure, 2 *bing* de millet de qualité moyenne, 1 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 39 *dou* ; que 2 *bing* de millet de qualité supérieure, 3 *bing* de millet de qualité moyenne, 1 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 34 *dou* ; que 1 *bing* de millet de qualité supérieure, 2 *bing* de millet de qualité moyenne, 3 *bing* de millet de qualité inférieure produisent 26 *dou* ; on demande combien produisent respectivement un *bing* de millet de qualité supérieure, de qualité moyenne, de qualité inférieure.

Réponse : Un *bing* de millet de qualité supérieure 9 *dou* ¼ de *dou* ;

Un *bing* de millet de qualité moyenne 4 *dou* ¼ de *dou* ;

Un *bing* de millet de qualité inférieure 2 *dou* ¾ de *dou*.

(…)

Supposons que 5 moineaux et 6 hirondelles se réunissent sur le fléau d'une balance et que l'ensemble des moineaux soit plus lourd que l'ensemble des hirondelles. Si un moineau et une hirondelle échangent leur place, le fléau est juste à l'horizontale. Si l'on assemble moineaux et hirondelles, le poids est de 1 *jin*. On demande combien respectivement un moineau et une hirondelle.

Base (*gou*) et hauteur (*gu*) (extraits du chapitre 9)

<u>Extrait n°1</u> [8]

Supposons que la base (*gou*) soit de 3 *chi* et la hauteur (*gu*) de 4 *chi*. On demande combien fait l'hypoténuse (*xian*).

Réponse : 5 *chi*.

Supposons que l'hypoténuse soit de 5 *chi* et la base de 3 *chi*. On demande combien fait la hauteur.

Réponse : 4 *chi*.

Supposons que la hauteur soit de 4 *chi* et l'hypoténuse de 5 *chi*. On demande combien fait la base.

Procédure de la base et de la hauteur :

---

[7] Ici je ne donne que l'énoncé de deux problèmes ([9] p.617 et 637), je coupe l'énoncé de la procédure et sa justification en commentaire.

[8] [9] p.705

Le côté le plus court est appelé la base ; le côté le plus long est appelé la hauteur ; ce qui lie les coins de l'un à l'autre est appelé hypoténuse.

(…)

Base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) et on divise ceci par extraction de racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse.

La base multipliée par elle-même fait le carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compense l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. « En divisant ceci par extraction de racine carrée cela donne l'hypoténuse ».

<u>Extrait n°2 </u>: chapitre 9, problème 14 [9]

Supposons que la base vaille 5 *bu* et la hauteur 12 *bu*. On demande combien vaut le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

Réponse : le côté du carré vaut 3 *bu* 9/17 de *bu.*

Procédure : on somme la base et la hauteur, ce qui fait le diviseur. Base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre, ce qui fait le dividende. Et en effectuant la division du dividende par le diviseur, on obtient le côté du carré en *bu*.

Quand « base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre », cela fait la surface vermillon, bleu-vert et jaune, chacune en 2 exemplaires. Si l'on fait en sorte que les longueurs des surfaces jaunes forment la longueur aux extrémités, que celles (les surfaces) qui sont vermillon et bleu-vert, chacune selon les catégories qui leur correspondent, se conforment aux deux transverses qui leur correspondent, en tout, cela engendre la surface d'un rectangle. Le côté du carré inscrit, jaune, en fait la largeur ; la somme de la base et de la hauteur en fait la longueur. C'est pourquoi « sommer base et hauteur fait le diviseur ».

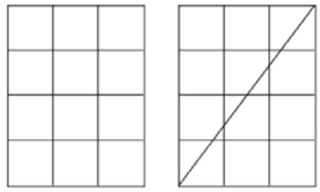
Dans la figure de l'aire, si le carré est situé à l'intérieur de la base, alors de chacun des deux côtés du carré, sont respectivement engendrées une petite base et une petite hauteur, et la situation de leur relation l'une avec l'autre n'a pas perdu les lü d'origine. Les petites bases et hauteur du côté de la hauteur (…), *ont* (…) *pour somme le l*ü *du côté du carré inscrit. Si l'on fait en sorte que la hauteur fasse le* lü *du côté du carré inscrit, que la somme de la base et de la hauteur fasse le lü, et si, étant donné que la base réelle vaut 5 bu, on applique à ceux-ci l'opération du « supposons », on obtient le côté du carré inscrit*[10].

[9] [9] p.727.
[10] Rappelons l'énoncé de la « procédure du supposons » (règle de trois, chapitre 2) : on multiplie par la quantité de ce que l'on a, le *lü* de ce qu'on cherche, ce qui fait le dividende. On prend le *lü* de ce qu'on a comme diviseur. [9] p.225.

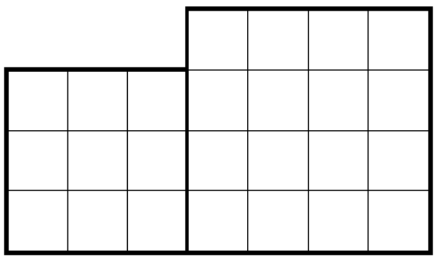
Annexe 1 : le « théorème de Pythagore » dans le *Gnomon des Zhou* (*Zhoubi*)[11].

Ce texte est contemporain des *Neuf Chapitres* (1er siècle avant ou de notre ère), et a été commenté à la même période (commentaire de Zhao Shuang, 3ème siècle de notre ère). Tout comme les *Neuf chapitres*, le *Zhoubi*, quoique concernant principalement la géométrie et l'astronomie, ne contient pas de figures ; on pense que des figures matérielles étaient manipulées, auxquelles le texte fait référence. Voici une reconstitution de Li Jimin (1993) de l'argument du classique relatif au « théorème de Pythagore ».

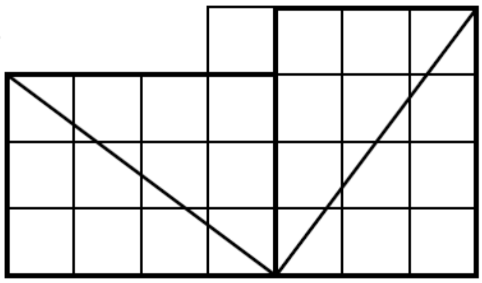
C'est le cas du triangle de dimensions 3, 4, 5 qui est traité. Le triangle rectangle est vu comme un demi-rectangle.



On accole le carré de côté 3 et celui de côté 4, et on fait apparaître deux triangles de 3 sur 4 et leurs diagonales.

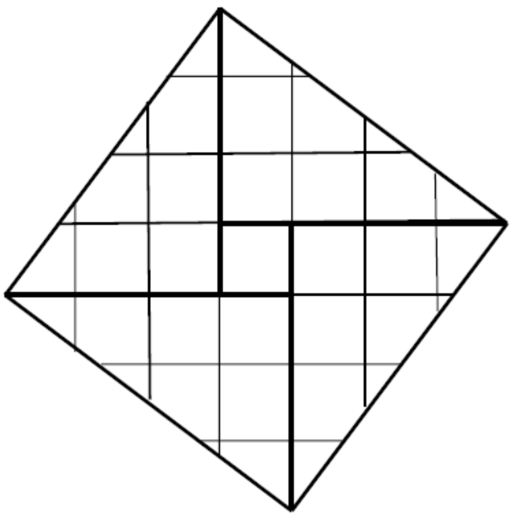


a



On remarque que cette relecture de la figure a fait apparaître un carré unité « isolé »[12].

Le triangle en bas à gauche et celui en bas à droite sont découpés et recollés au dessus pour former le carré construit sur l'hypoténuse.



Donc : la somme des carrés de la base et de la hauteur (figure a) est égale à quatre fois l'aire du triangle plus un carré unité (figure b), ce qui est égal au carré construit sur l'hypoténuse.

[11] Source : K. Chemla *General Figures and Generality in Ancient China and Beyond : Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra*, Science in Context **18**(1) 2005, p.123-166. Ici p.136-137.

[12] Cette relecture de la figure met en évidence l'identité $a^2 + b^2 = 2\ ab + 1$, valable car $a = 3$ et $b = 4$. C'est toutefois général : avec a et b quelconques ($a<b$) on fait apparaître un carré central de côté b-a.

Annexe 2 : un peu de *fangcheng*[13]

Procédure du *fangcheng* (voir plus haut l'énoncé du problème) :

On place 3 *bing* de millet de qualité supérieure, 2 *bing* de millet de qualité moyenne, 1 *bing* de millet de qualité inférieure et le dividende 39 *dou* à droite. Les millets sont disposés dans les colonnes centrales et de gauche comme ils l'ont été à droite.

On multiplie l'ensemble de la colonne centrale par le millet de qualité supérieure de la colonne de droite, puis, avec (la colonne de droite), on élimine entre quantités qui se font face.

A nouveau, on en multiplie les colonnes suivantes et on élimine également avec (la colonne de droite) entre quantités qui se font face.

Ensuite on multiplie l'ensemble de la colonne de gauche par le millet de qualité moyenne de la colonne centrale, s'il n'a pas été épuisé, puis avec (la colonne centrale), on élimine entre quantités qui se font face.

Si à gauche le millet de qualité inférieure n'a pas été épuisé, le haut est pris comme diviseur, le bas comme dividende. Le dividende est alors le dividende du millet de qualité inférieure.

Pour chercher le millet de qualité moyenne, on multiplie, par le diviseur, le dividende d'en dessous de la colonne centrale et on élimine le dividende du millet de qualité inférieure.

Le reste est divisé par la quantité de *bing* du millet de qualité moyenne, ce qui donne le dividende du millet de qualité moyenne.

Pour chercher le millet de qualité supérieure, on multiplie également, par le diviseur, le dividende d'en dessous de la colonne de droite et on élimine les dividendes des millets de qualités inférieures et moyennes.

[13] [9] p.617

