Trois textes sur l'aire du disque

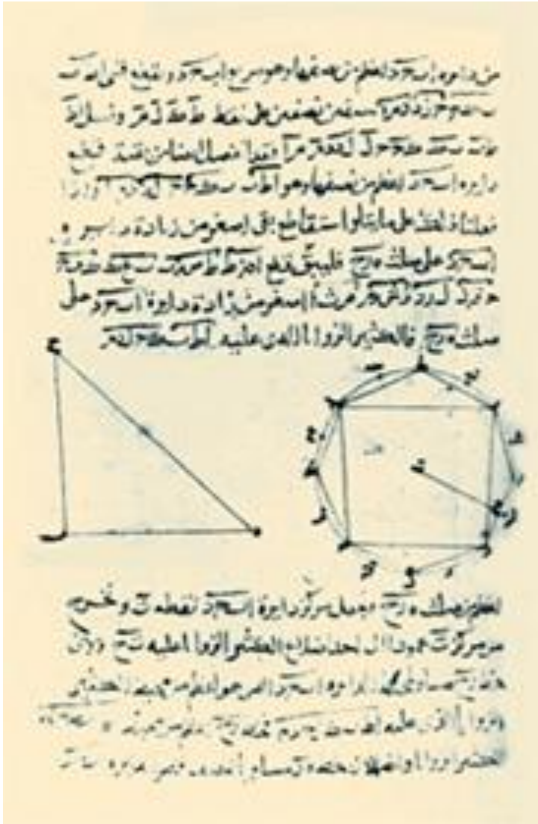
Renaud Chorlay

IREM de Paris
ESPE de Paris
LDAR

23e COLLOQUE INTER-IREM
ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
Poitiers 23-25 mai 2019

Archimède

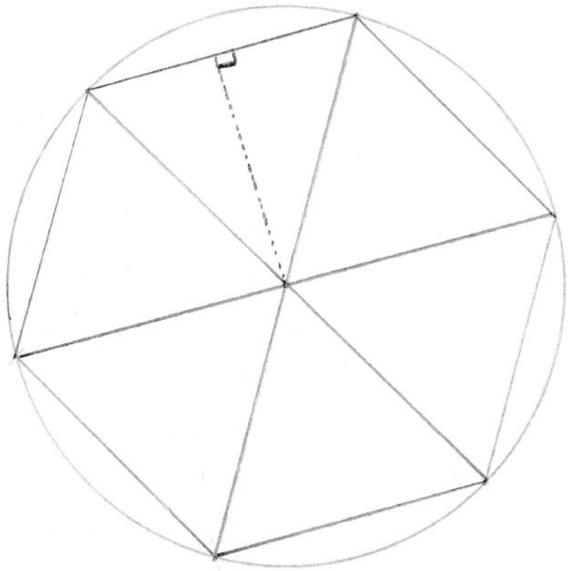
La mesure du cercle – Proposition 1



Source : site Culturemath, dossier de B. Vitrac *les géomètres de la Grèce antique*

Une heuristique qui <u>n'est pas</u> dans le texte d'Archimède :
comment transformer l'aire d'un disque en l'aire d'un triangle rectangle ?

Initialisation possible : avec un hexagone régulier
inscrits



Aire du 6-gone = 6 × aire d'un triangle
= 6 × ($\frac{1}{2}$ × base × hauteur)
= $\frac{1}{2}$ × (6 × base) × hauteur
= $\frac{1}{2}$ × longueur du polygone × hauteur
= aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droite ont pour longueurs respectives *longueur du polygone* et *hauteur*

Une heuristique qui <u>n’est pas</u> dans le texte d’Archimède :
comment transformer l’aire d’un disque en l’aire d’un triangle rectangle ?

Aire du *n*-gone régulier inscrit

$= \frac{1}{2} \times$ longueur du polygone $\times$ hauteur

= Aire d’un triangle rectangle dont les côtés de l’angle droit ont pour longueurs respectives *longueur du polygone* et *hauteur*

Passage (informel) à la limite

Aire du disque = $\frac{1}{2} \times$ longueur du cercle $\times$ rayon du cercle

= aire d’un triangle rectangle dont les côtés de l’angle droite ont pour longueurs respectives la *longueur du cercle* et le *rayon du cercle*

Le texte d'Archimède

PROPOSITION PREMIÈRE*. UN cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.*

Vérification

Aire du disque $= \frac{1}{2} \times$ longueur du cercle $\times$ rayon du cercle

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

Le texte d’Archimède

PROPOSITION PREMIÈRE*. UN cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.*

Conséquence n°1

Les deux problèmes

- de rectification du cercle
- de quadrature du disque

ne sont pas indépendants. Cette proposition réduit le second au premier (moyennant le proposition II.14 des Éléments d’Euclide).

Le texte d'Archimède

PROPOSITION PREMIÈRE*. UN cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon de ce cercle, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle.*

Conséquence n°2 : il n'y a qu'un seul π

Supposons que l'on a deux relations de proportionnalité :

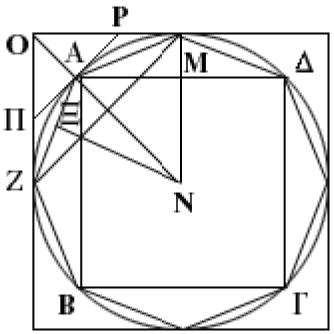
- Les longueurs des cercles sont proportionnelles aux diamètres $l = \pi\, d$
- Les aires des disques sont proportionnelles aux aires des carrés construits sur les rayons

  $A = \pi\, r^2$

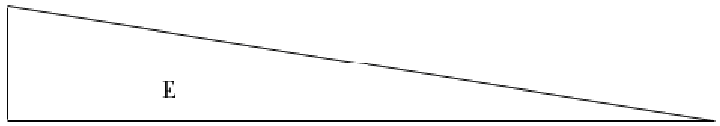
D'après la proposition 1 de la *Mesure du cercle* $A = \pi\, r^2 = \frac{1}{2}\pi\, d\, r = \pi\, r^2$

Donc $\pi = \pi$

La démonstration d’Archimède



Que ΑΒΓΔ soit le cercle proposé. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.



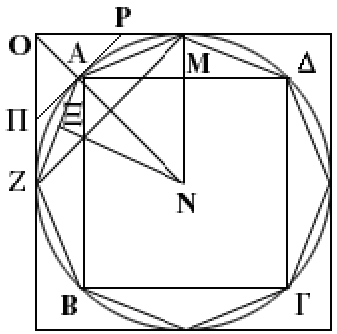
Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le carré ΑΓ, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segments restants soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle ; on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire NΞ ; la perpendiculaire NΞ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle. Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde.

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un carré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figuré OZAM. Que les segments restants soient tels que PZA et que la somme de ces segments soit moindre que l'excès du triangle E sur le cercle ΑΒΓΔ. La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle E. Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que NA est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

Donc le cercle est égal au triangle E.

La démonstration d'Archimède – Sa structure

Que ABΓΔ soit le cercle proposé. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.



Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le carré AΓ, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segments restants soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle ; on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire NΞ ; la perpendiculaire NΞ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle. Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde.

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un carré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure OZAM. Que les segments restants soient tels que PZA et que la somme de ces segments soit moindre que l'excès du triangle E sur le cercle ABΓΔ. La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle E. Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que NA est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

Donc le cercle est égal au triangle E.

La démonstration d’Archimède – 1ère partie

Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le carré ΑΓ, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segments restants soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle ; on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire ΝΞ ; la perpendiculaire ΝΞ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle. Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde.

Je nomme D l’aire du disque, E l’aire du triangle. On suppose ici $D > E$. L’excès du disque sur le triangle est donc $D - E$.

Soit A_1 l’aire du carré inscrit, A_2 l’aire de l’octogone régulier inscrit … A_n l’aire du 2^{n+1}-gone régulier inscrit.

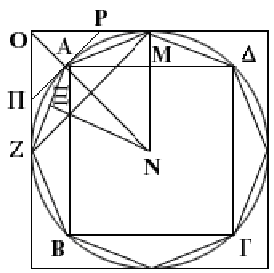
On admet qu’il existe *n* tel que $D - A_n < D - E$ on a donc $A_n > E$.

Mais A_n = Aire d’un triangle rectangle sur l’apotome et le périmètre du A_n

Or apotome de A_n < rayon du cercle et périmètre de A_n < périmètre du cercle

Donc $A_n < E$, ce qui est absurde.

La démonstration d’Archimède – 1ère partie



Que ΑΒΓΔ soit le cercle proposé. Je dis que ce cercle est égal au triangle E.

Que le cercle soit plus grand, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le carré ΑΓ, et partageons les arcs en deux parties égales jusqu'à ce que la somme des segments restants soit plus petite que l'excès du cercle sur le triangle ; on aura une figure rectiligne qui sera encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N, et menons la perpendiculaire NΞ ; la perpendiculaire NΞ sera plus petite qu'un des côtés de l'angle droit du triangle E. Mais le contour de la figure rectiligne est encore plus petit que l'autre côté de l'angle droit de ce même triangle, puisque le contour de cette figure est plus petit que la circonférence du cercle. Donc la figure rectiligne est plus petite que le triangle, ce qui est absurde.

La 1ère partie de la proposition 1 contient donc une lacune.

La démonstration d'Archimède – 2ème partie

Que le cercle soit plus petit que le triangle E, si cela est possible. Circonscrivons un carré à ce cercle, et partageons les arcs en deux parties égales, et par les points de division, menons des tangentes. Puisque l'angle OAP est droit, la droite OP est plus grande que la droite MP, à cause que MP est égal à PA. Donc le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure OZAM. *Que les segments restants soient tels que PZA et que la somme de ces segments soit moindre que l'excès du triangle E sur le cercle ΑΒΓΔ. La figure rectiligne sera encore plus petite que le triangle E. Ce qui est absurde, puisque cette figure est plus grande, à cause que* NA est égale à la hauteur du triangle, et que le contour de cette figure est plus grand que la base de ce même triangle.

On suppose ici D < E. L'excès du disque sur le triangle est donc E-D.

On considère le carré circonscrit, d'aire A_1, puis l'octogone régulier circonscrit, d'aire A_2 etc.

Admettons qu'il existe n tel que $A_n – D < E – D$, on a donc $A_n < E$.

Mais $A_n =$ Aire d'un triangle rectangle sur l'apotome et le périmètre du A_n

Or apotome de A_n = rayon du cercle et périmètre de A_n > périmètre du cercle

Donc $A_n > E$, ce qui est absurde.

La démonstration d'Archimède – 2ème partie

Que reste-t-il à justifier ?

On suppose ici D < E. L'excès du disque sur le triangle est donc E-D.

On considère le carré circonscrit, d'aire A_1, puis l'octogone régulier circonscrit, d'aire A_2 etc.

Admettons qu'**il existe *n* tel que $A_n - D < E - D$**, on a donc $A_n < E$.

Mais $A_n =$ Aire d'un triangle rectangle sur l'apotome et le périmètre du A_n

Or apotome de $A_n >$ rayon du cercle et **périmètre de $A_n >$ périmètre du cercle**

Donc $A_n > E$, ce qui est absurde.

Justification de : **il existe n tel que $A_n - D < E - D$**

Introduisons la suite $e_n = A_n - D$, suite des excès des polygones circonscrits par rapport au disque. On veut montrer que, E-D étant (par hypothèse) une aire non nulle, il existe un rang n pour lequel $e_n <$ E-D.

L'argument d'Archimède est : *le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure OZAM*

Archimède utilise (implicitement) un argument explicité dans les *Eléments* d'Euclide[1] :

> *Livre X, proposition 1: Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une grandeur plus grande que sa moitié, puis du reste une grandeur plus grande que sa moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée.*

[1] [1] vol.3, p.87.

La démonstration d’Archimède – 2ème partie

Justification de : **il existe n tel que $A_n - D < E - D$**

Livre X, proposition 1: Deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une grandeur plus grande que sa moitié, puis du reste une grandeur plus grande que sa moitié, et que ceci soit toujours poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée.

Si, pour une suite de grandeurs, on a

$e_2 < \frac{1}{2}e_1$ et $e_3 < \frac{1}{2}e_2$ et $e_4 < \frac{1}{2}e_3$ ... plus généralement $e_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e_1$

alors, pour toute grandeur ε de la même espèce, il existe un rang n tel que $e_n < \varepsilon$.

On dispose donc d’une condition suffisante de convergence vers 0 pour les suites de grandeurs ; pour nous, le critère de convergence vers 0 étant équivalent à la notion de limite nulle. La démonstration d’Euclide repose sur le caractère archimédien de l’ordre (*Eléments*, livre V, définition 4):

Des grandeurs sont dites avoir un rapport l’une relativement à l’autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l’une l’autre.

La démonstration d'Archimède – 2ème partie

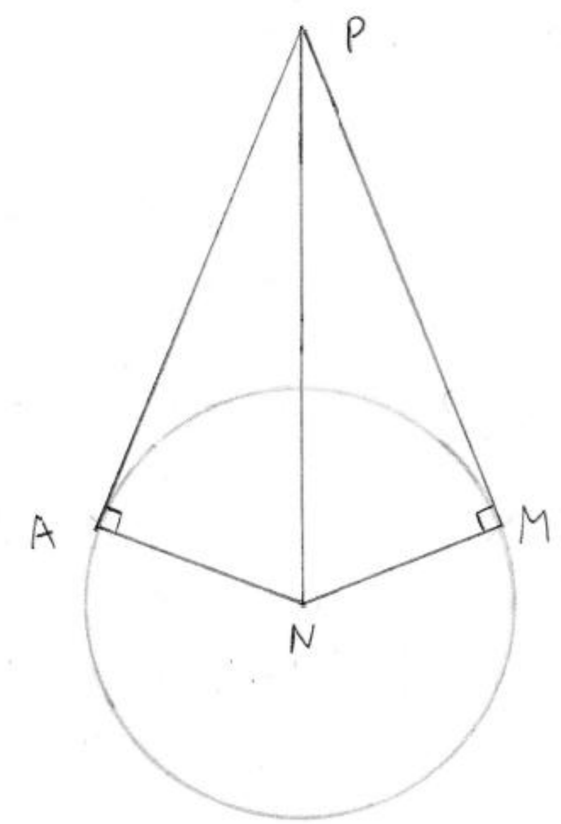
Il suffit donc de montrer que, pour tout entier non nul n, $e_{n+1} < \frac{1}{2} e_n$.

Le texte explicite le raisonnement géométrique dans le cas $e_2 < \frac{1}{2} e_1$.

Il utilise un lemme sur les tangentes à un cercle

issues d'un même point :

PA = PM



La démonstration d’Archimède – 2ème partie

On veut montrer que $e_2 < \frac{1}{2} e_1$. Travaillons dans un quart de cercle :

PM = PA

$\widehat{OAP}$ est droit donc OP > PA

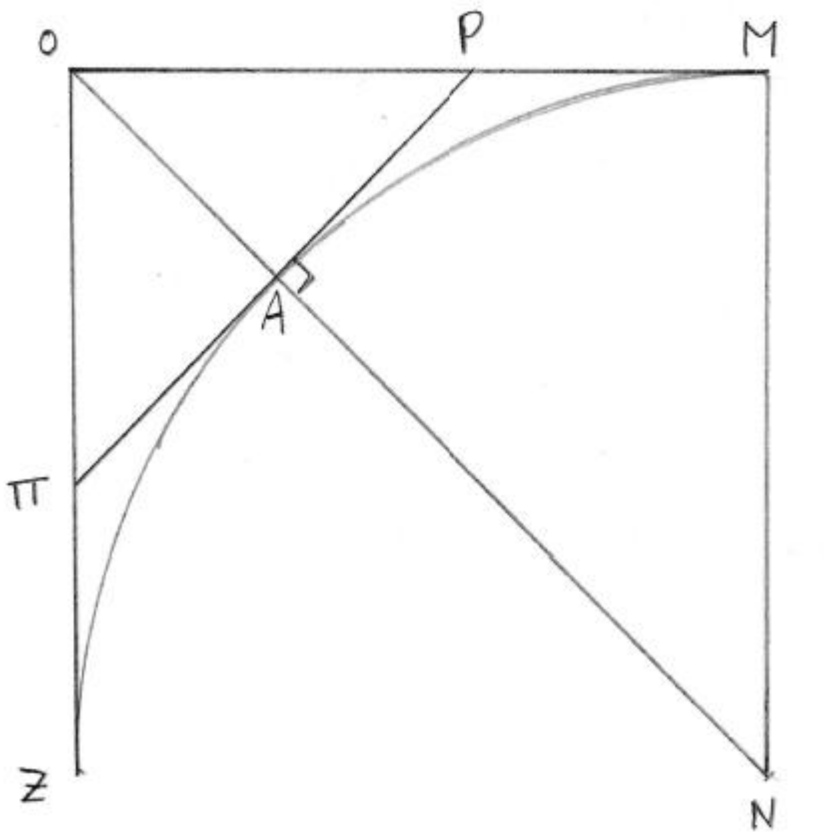
Donc OP > PM

Or OAP et PMA ont même hauteur issue de A, leurs aires sont donc rangées comme leurs bases : Aire OAP > aire PAM

Or Aire PAM > Aire P*AM*

e_1 = Aire OAP + aire P*AM*

> 2 Aire P*AM*



Complément n°1 :
La proposition 3 de la *Mesure du cercle* d'Archimède

PROPOSITION III. *La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les 10/71*^{e} *de ce même diamètre.*

Pour tout disque, le périmètre est proportionnel au diamètre, et

$$3+\frac{10}{71} \quad < \quad \frac{périmètre}{diamètre} \quad < \quad 3+\frac{1}{7}$$

Complément n°2:
À la même période, en Chine

Supposons qu'on ait un champ circulaire de 30 bu *de circonférence et de 10* bu *de diamètre.*
On demande combien fait le champ.
Réponse : 75 bu.
(…) *Procédure : la moitié de la circonférence et la moitié du diamètre étant multipliées l'une par l'autre, on obtient les* bu *du produit.*

Source :
Karine Chemla et Guo Shuchun *Les neufs chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* (édition critique bilingue), Dunod, 2004.

Arnauld : *Nouveaux éléments de géométrie* (1667)

LIVRE QUINZIEME.

DE LA MESURE
DE L'AIRE DES PARALLELOGRAMMES,
DES TRIANGLES, ET AUTRES POLYGONES.

Un exposé dédoublé :

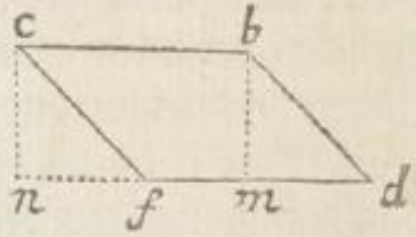
Neanmoins pour plus grande certitude on peut employer deux voies pour prouver cette propoſition : l'une nouvelle appellée la *Geometrie des indiviſibles* : & l'autre ancienne & plus commune. Nous expliquerons l'une & l'autre.

L'aire du parallélogramme

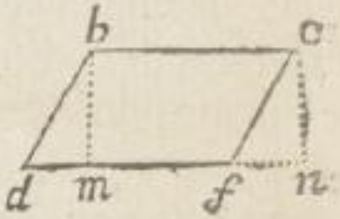
Par la voie *ancienne et commune*

Tout parallelogramme eſt égal au rectangle de ſa hauteur & de ſa baſe.

Soit le parallelogramme $b\,c\,d\,f$, tirant ſes perpendiculaires $b\,m$ & $c\,n$ ſur la baſe $d\,f$, prolongée autant qu'il eſt neceſſaire; je dis que le rectangle $b\,c\,m\,n$, qui eſt le rectangle de la baſe & de la hauteur de $b\,c\,d\,f$, eſt égal à $b\,c\,d\,f$.



Car $b\,c$ eſtant égale tant à $d\,f$ qu'à $m\,n$, $d\,f$ eſt égale à $m\,n$. Donc oſtant $m\,f$, commune de l'une & de l'autre, $d\,m$ demeurera égale à $f\,n$. Et ainſy $b\,d$ eſtant égale à $c\,f$, & $b\,m$ à $c\,n$, les triangles $b\,d\,m$ & $c\,f\,n$ ſont égaux par le Lemme precedent. Et ainſy ajoûtant à l'un & à l'autre le trapeze commun $b\,m\,c\,f$, $b\,c\,d\,f$ ſera égal à $b\,m\,c\,n$. Ce qu'il falloit demonſtrer.

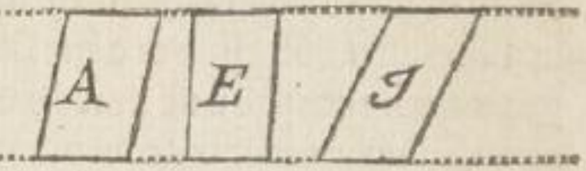


L’aire du parallélogramme

Par la voie *géométrie des indivisibles*

Tous les parallelogrammes de baſe égale & de même hauteur ſont égaux entr’eux.

Soient divers parallelogrammes, comme *A*, *E*, *I*, enfermez dans le même eſpace parallele (comme



ils le peuvent eſtre, puiſqu’ils ſont ſuppoſez de même hauteur) & ayant tous les baſes égales, il eſt clair que toutes les paralleles qui peuvent remplir cet eſpace, rempliront tous ces parallelogrammes; & qu’ainſy ils ſeront tous remplis d’une ſomme égale de lignes, cette ſomme eſtant meſurée dans tous par la perpendiculaire qui meſure la hauteur de ces rectangles, qui eſt la même en tous, puiſqu’ils ſont de même hauteur?

De plus, toutes ces lignes eſtant paralleles à la baſe dans tous ces rectangles, ſont égales en tous, puiſqu’elles ſont en tous égales à la baſe, & que les baſes ſont ſuppoſées égales.

Donc il y a par tout ſomme égale de lignes égales.

Extension au cas de cercles « parallèles »

CINQUIEME THEOREME.

LE cercle eſt égal au triangle rectangle, qui a pour coſtez de ſon angle droit le raion du cercle, & une ligne égale à la circonference du cercle.

Soit le cercle *d*, le raion *d b*, la tangente *b c*, égale à la circonference & l'hypothenuſe *d c*.

Si on tire de tous les points du raion des circonferences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, & elles ſeront paralleles entr'elles, en la maniere que les circonferences le peuvent eſtre, & coupées perpendiculairement par le raion.

Si on tire aussy de tous ces mêmes points du raion par lesquels auront passé ces circonferences des paralleles à *b c*, jusques en *d c*, ces paralleles rempliront le triangle. Et ainsy la somme de ces circonferences & de ces paralleles sera égale, estant determinée de part & d'autre par les points du même raion, estant clair que l'on ne sçauroit tirer une circonference par aucun point, qu'on ne tire aussy une parallele à *d c* par ce même point; & au contraire.

Or la circonference & la parallele tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra : par exemple celle du point *b*. Car

$$bd.\ df :: \begin{cases} \text{circonf. } b. & \text{circonf. } f. \\ bc. & fg. \end{cases}$$

Donc circonf. *b*. circonf. *f* :: *b c*. *f g*.

Donc *alternando* circonf. *b*. *b c* :: circonf. *f*. *f g*.

Or par l'hypothese la circonference *b*, qui est celle du cercle, est égale au costé du triangle *b c*.

Donc la circonference passant par le point *f*, est égale à *f g*, parallele à *b c*.