

Autour de l'*Almageste* de Ptolémée (début II^e siècle de notre ère)

Sources :

Claude Ptolémée *Composition mathématique*, trad. M. Halma, en deux volumes. Paris : chez Henri Grand, 1813. Disponible en ligne sur Gallica¹.

Jean-Pierre Verdet *Une histoire de l'astronomie*, Points Sciences. Paris : éditions du Seuil, 1990.

Glen van Brummelen *The mathematics of the heavens and the earth : the early history of trigonometry*. Princeton (NJ): Princeton University Press, 2009.

1^{ère} partie : quelques faits d'observation en astronomie

On se limite aux faits observables à l'œil nu (avec instruments de visé) ou constatables dans des tables astronomiques de telles observations.

Ces faits sont connus de l'auteur de l'*Almageste* (sauf mention du contraire).

Nous utiliserons le logiciel libre <http://www.stellarium.org/fr/>

Mouvement diurne du soleil, observé à Paris :

- Le soleil se lève globalement à l'est et se couche globalement à l'ouest
- Varient : la position exacte des levers et couchers, la durée du jour et l'élévation maximale.
- Quatre situations remarquables :
 - Deux *équinoxes* : lever et coucher exactement à l'est et l'ouest (respectivement), égales durées du jour et de la nuit.
 - Deux *solstices*, un d'été, un d'hiver, correspondant aux durées maximales et minimales, et aux élévations maximales et minimales
- Ces quatre s'enchaînent de manière périodique, sur un cycle d'environ 365 jours (un peu plus) : c'est l'année *tropique*.
- Les quatre saisons ne sont pas d'égale durée : 94 jours (printemps), 92, 88, 90.
- Une partie de ces phénomènes dépend de la latitude (équateur, hémisphère sud ...)

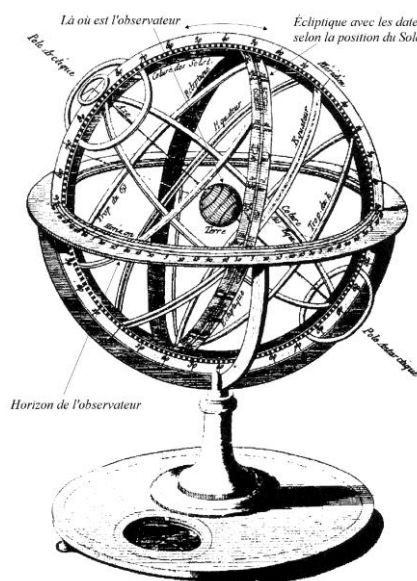
La Lune:

- Elle semble aussi tourner autour de la Terre, sans lien direct avec les mouvements du soleil (on la voit aussi le jour), mais se levant aussi à l'est et se couchant à l'ouest.
- Elle présente toujours la même *face*, mais présente des *phases*, sur un cycle d'environ 28 jours.
- De temps à autre on observe des éclipses :
 - Des éclipses de soleil : égalité des diamètres apparents ; une éclipse n'est pas visible partout sur terre
 - Des éclipses de lune : la lune tient entre trois et quatre fois dans la zone d'occultation

Les cercles dans le ciel :

¹ Version en mode texte sur <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/ptolemee/table.htm> , avec des risques d'erreurs dans le passage vers le mode texte.

- Les positions des étoiles les unes par rapport aux autres ne varient pas, et aucune différence de distance entre la terre et les différentes étoiles n'est observable. On place les étoiles sur la *sphère céleste* ou *sphère des fixes*.
- En 24 heures, l'ensemble des fixes tourne autour de la terre de l'est vers l'ouest ; le soleil est globalement solidaire de ce mouvement, sa lumière le rendant inobservable dans la journée.
- Cette rotation détermine une sphère des fixes, un axe du monde, et un grand cercle sur la sphère : l'équateur céleste (qui coupe la terre selon l'équateur terrestre). Actuellement, l'étoile polaire est à peu près dans l'axe de rotation, du côté de l'hémisphère nord.
- A Paris, l'axe du monde (la direction de l'étoile polaire) est à environ 48° au dessus de l'*horizon*. C'est aussi la latitude de Paris (angle au centre avec l'équateur).
- La position du Soleil dans la sphère des fixes varie lentement : le soleil parcourt un grand cercle, l'*écliptique*. Il le parcourt dans le sens inverse du mouvement diurne, et ce parcours prend en gros un an (année *sidérale*). L'écliptique est incliné sur l'équateur de 23°
- La vitesse angulaire de la course annuelle du soleil est d'environ 1° d'arc par jour, mais varie légèrement (// différence de durée des saisons)
- La position, dans la sphère des fixes, du soleil au moment de l'équinoxe de printemps se décale très lentement (on ne peut le voir que sur plusieurs siècles de relevés d'observation) : d'environ 1° d'arc en 72 ans. Ce phénomène dit de *précession* des équinoxes fut remarqué par Hipparque (actif au moins entre 147 et 127 avant notre ère), et explique que la position du soleil dans le zodiaque (i.e. les constellations sur l'écliptique) ne soit plus celles indiquées sur les horoscopes.
- Pour un observateur, il y a donc trois cercles importants dans la sphère céleste : l'horizon (dépendant de sa position), l'équateur céleste, l'écliptique.
 - On représente cette disposition par la sphère armillaire ou astrolabe sphérique.
 - Depuis l'antiquité tardive, on utilise une représentation plane, l'astrolabe, qui est une projection de la sphère armillaire depuis le pôle sud (projection stéréographique)

Encyclopédie méthodique, xviii^e siècle

Les planètes :

- Il existe cinq objets célestes qui suivent des trajectoires plus complexes : Jupiter, Mars, Mercure, Vénus, Saturne. Ces astres sont dits *errants* (étymologie de *planète*)
- Ils se déplacent globalement le long de l'écliptique, dans le même sens que le soleil, mais les périodes diffèrent pour chaque planète.
- Ils ne se déplacent pas exactement dans le plan de l'écliptique mais, comme la lune, oscillent autour. Ce sont les variations en *latitude*.
- Leur mouvement en longitude connaît parfois des stations et de rétrogradations (pour mars : au printemps 2016).
- Mercure et Vénus ne s'éloignent jamais du soleil de plus d'un certain angle, il y a une élongation maximale (de 47° pour Vénus), contrairement à Mars, Jupiter et Saturne, qui peuvent se trouver en opposition par rapport au soleil.

Quelques systèmes du monde utilisant au maximum des cercles et des mouvements circulaires uniformes :

- Sphères concentriques et physique aristotélicienne : <http://www.luminarium.org/encyclopedia/blaeu.jpg>
- Théorie excentrique expliquant l'inégalité du soleil (durées inégales des saisons). Epicycles pour modéliser la trajectoire des errants.
- Modèle complexe (à point équiant) chez Ptolémée : <http://www.luminarium.org/encyclopedia/sacrobosco.jpg>
- Modèle de Copernic : *De revolutionibus orbium coelestium* (1543).
- Univers infini chez Thomas Digges (1576).

Images sur : Wikipédia, Google Images ...

2^{ème} partie : quelques pages de l'*Almageste*

Livre I^{er}, chapitre III : **La Terre est sensiblement de forme sphérique dans l'ensemble de toutes ses parties.**

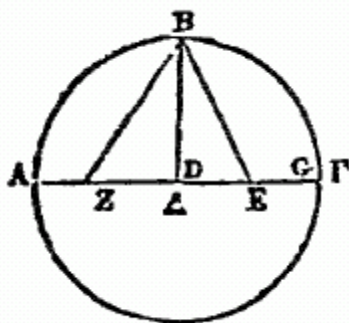
POUR concevoir que la terre est sensiblement de forme sphérique, il suffit d'observer que le soleil, la lune et les autres astres ne se lèvent et ne se couchent pas pour tous les habitants de la terre à la fois, mais d'abord pour ceux qui sont à l'orient, ensuite pour ceux qui sont à l'occident. Car nous trouvons que les phénomènes des éclipses, particulièrement de la lune, qui arrivent toujours dans le même temps absolu, pour tous les hommes, ne sont pourtant pas vues aux mêmes heures, relativement à celle de midi, c'est-à-dire, aux heures également éloignées du milieu du jour, mais que, partout, ces heures sont plus avancées pour les observateurs orientaux, et moins pour ceux qui sont plus à l'occident. Or, la différence entre les nombres des heures où les uns et les autres voient ces éclipses, étant proportionnelle aux distances de leurs lieux respectifs, on en conclura que la surface de la terre est certainement sphérique, et que de l'uniformité de sa courbure prise en totalité, il résulte que chacune de ses parties fait obstacle aux parties suivantes, et en borne la vue d'une manière semblable pour toutes. Il en serait tout autrement, si la terre avait une autre figure, comme on peut s'en convaincre par les réflexions suivantes.

Si la surface terrestre était concave, les habitants de ses parties occidentales seraient les premiers qui verraient les astres se lever ; si elle était plane, tous ses habitants ensemble et à la fois les verraient se lever et se coucher ; si elle était composée de triangles, de quadrilatères ou de polygones de quelque autre figure, tous les habitants d'une même face plane verraient les phénomènes dans le même temps, chose qui toutefois ne paraît pas avoir lieu. Il est certain aussi, que la terre n'est pas un cylindre dont la surface regarde le levant et le couchant, et dont les bases soient tournées vers les pôles du monde, conjecture qu'on pourrait juger plus vraisemblable ; car, si cela était, les habitants de la surface convexe ne verraient pas perpétuellement de certaines étoiles ; mais ou elles se lèveraient et se coucheraient entièrement, ou les mêmes à égale distance les unes d'un pôle, les autres de l'autre, seraient toujours invisibles pour tous. Cependant plus nous avançons vers les ourses, plus nous découvrons d'étoiles qui ne se couchent jamais, tandis que les australes disparaissent à nos yeux dans la même proportion. En sorte qu'il est encore évident, qu'ici, par un effet de la courbure uniforme de la terre, chaque partie fait obstacle aux parties latérales suivantes, de la même manière ; ce qui prouve que la terre a dans tous les sens une courbure sphérique. Enfin, sur mer si, de quelque point que ce soit, et dans toute direction quelconque, nous voguons vers des montagnes, ou d'autres lieux élevés, nous voyons ces objets comme sortir de la mer où ils étaient auparavant cachés par la courbure de la surface de l'eau.

(...)

Livre I^{er} chapitre IX : **Evaluation des droites inscrites dans le cercle** (extraits)

POUR la facilité de la pratique, nous allons maintenant construire une table des valeurs de ces droites, en partageant la circonférence en 360 degrés. Tous les arcs de notre table iront en croissant d'un demi-degré, constamment, et nous donnerons pour chacun de ces arcs la valeur, de la soutendante, en supposant le diamètre partagé en 120 parties. On verra par l'usage, que ce nombre était le plus commode qu'on pût choisir. Nous montrerons d'abord comment, au moyen d'un nombre, le plus petit possible, de théorèmes, qui sont toujours les mêmes, on se fait une méthode générale et prompte pour obtenir ces valeurs. Nous ne nous bornerons pas à la table où l'on pourrait prendre, ces valeurs sans en connaître la théorie, mais nous faciliterons les moyens de les éprouver et de les vérifier, en donnant les méthodes de construction. Nous emploierons en général la numération sexagésimale, pour éviter l'embarras des fractions ; et, dans les multiplications et les divisions, nous prendrons toujours les résultats les plus approchés, de manière que ce que nous négligerons ne les empêchera d'être sensiblement justes.

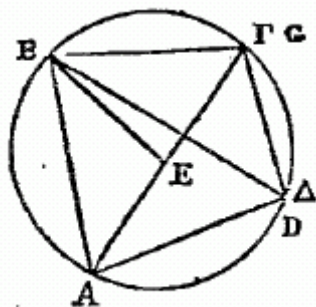


Soit d'abord le demi-cercle ABG décrit sur le diamètre ADG autour du centre D, et soit élevé, à angles droits, de D, sur AG, le rayon DB ; soit DG coupée en son milieu au point E ; joignez EB, et prenez EZ égale à EB ; enfin, joignez ZB ; je dis que ZD est le côté d'un décagone, et BZ celui d'un pentagone. (...)

Faisant donc, comme je l'ai dit, le diamètre du cercle de 120 parties, DE qui est la moitié du rayon, sera de 30, et son carré sera de 900. Le rayon BD est de 60, et son carré est de 3600 ; mais le carré de EB, c'est-à-dire celui de EZ, est de 4500 : par conséquent, la longueur de cette ligne EZ est de $67^{\text{P}}, 4', 55''$, à très peu près, et DZ est de $37^{\text{P}}, 4', 55''$; donc le côté du décagone qui soutend un arc, de 36 des degrés dont la circonférence en contient 360, est de $37^{\text{P}}, 4', 55''$ des parties dont le diamètre en contient 120^{P} . (...) Ainsi le côté du pentagone qui soutend 72 des degrés dont la circonférence en contient 360, contient $70^{\text{P}}, 32', 3''$, des parties dont le diamètre en contient 120^{P} . Or il est évident que le côté de l'hexagone qui soutend 60 degrés, et qui est égal au rayon, est de 60 parties. De même, le carré du côté du quadrilatère qui soutend 90 degrés de la

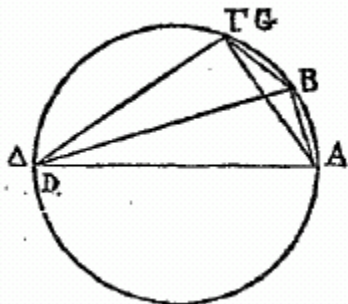
circonférence, est égal au double carré du rayon ; et le carré du côté du triangle qui soutend 120 de ces mêmes degrés, est égal au triple carré du rayon. (...)

Nous montrerons dans la suite comment les autres soutendantes se déduisent de celles-ci, quand nous aurons exposé un lemme qui en facilitera la pratique.



Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD ; soient menées les diagonales AG, BD : il s'agit de prouver que le rectangle, construit sur AG et BD, est égal aux deux rectangles des côtés opposés AB GD, et AD BG. Soit fait l'angle ABE égal à l'angle DBG ; si nous ajoutons à chacun l'angle commun EBD, l'angle ABD égalera l'angle EBG. Mais BDA est égal à BGE ; car ces deux angles sont inscrits et appuyés sur le même arc ; donc le triangle ABD est équiangle au triangle BGE. On a donc l'analogie : BG est à GE, comme BD est à DA : par conséquent, le produit de BG multiplié par AD est égal à celui de BD multiplié par GE.

Maintenant puisque l'angle ABE est égal à l'angle DBG, et que l'angle BAE est égal à l'angle BDG, le triangle ABE est équiangle au triangle BGD ; on a donc l'analogie : BD est à DG, comme BA est à AE, donc le rectangle BA DG est égal au rectangle BD AE. Or il a été prouvé que le rectangle BG AD est égal au rectangle BD GE ; par conséquent le rectangle entier AG BD, est égal aux deux rectangles AB DG, et AD BG. Ce qu'il fallait démontrer.



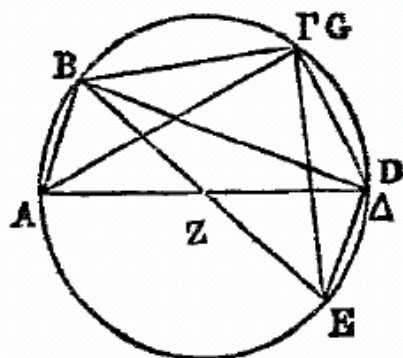
Cela posé, soit décrit un demi-cercle ABGD sur le diamètre AD ; soient menées du point A les deux droites AB, AG, données de grandeur chacune en parties du diamètre donné de 120 parties, et joignez BG ; je dis que cette ligne est aussi donnée : car soient menées les droites BD GD ; elles sont aussi données, parcequ'elles sont soutendantes du reste de la demi-circonférence. Mais le quadrilatère ABGD étant inscrit dans le cercle, il s'ensuit que la somme des rectangles AB GD et AD BG est égale au rectangle AG BD. Or le rectangle construit sur AG et BD est donné, ainsi que le rectangle sur AB et GD, donc AD BG

est aussi donné ; mais AD est le diamètre, donc la droite BG se trouve par là donnée. Ainsi nous voyons clairement que si deux arcs sont donnés avec leurs soutendantes, la droite qui soutend la différence de ces deux arcs sera aussi donnée ; et il est évident que, par le moyen de ce théorème, nous inscrirons beaucoup d'autres droites qui soutendent les différences des deux arcs dont les soutendantes seront données, et que par conséquent, nous trouverons facilement celle qui soutend 12 parties de la circonférence, puisque nous avons celle de 60 et celle de 72 degrés. (...)

Soit encore proposé, étant donnée une droite inscrite dans un cercle, de trouver la soutendante de la moitié de l'arc soutendu par cette droite. (...)

Ce théorème servira à faire trouver la plupart des autres soutendantes en prenant les moitiés des arcs donnés. Par exemple, au moyen de la droite qui soutend l'arc de 12 degrés, on trouvera celles des arcs de 6^d, de 3^d, de 1 1/2^d et de 1/2 1/4 d'un seul degré. Or nous trouvons par le calcul, que la soutendante de 1 1/2^d contiendra très peu près 1^p34' 15", des parties dont le diamètre en contient 120, et que celle de 1/2 1/4 en contient 0^p 47' 8".

Soit encore le cercle A B G D autour du diamètre AD, et du centre Z. Soient pris depuis le point A les deux arcs donnés consécutifs AB, BG, et joignons leurs soutendantes données AB, BG : je dis que, si nous joignons les points A et G par la droite AG, cette droite sera aussi donnée. (...)



Il est évident que, si nous ajoutons à toutes les soutendantes (cordes) prises précédemment, celle de 1 1/2 degré, et que nous prenions les soutendantes de ces sommes, nous inscrirons aisément toutes celles qui, rendues doubles, pourront être divisées juste par 3. Il ne restera d'omisées encore que celles qui seront dans les intervalles des

accroissements par $1 \frac{1}{2}$, deux en chaque ; attendu que nous inscrivons par demi-degrés. C'est pourquoi, quand nous aurons trouvé la corde d'un demi-degré, cette corde combinée, par addition et par soustraction, avec les cordes données qui embrassent ces intervalles, nous servira à compléter toutes les autres intermédiaires. Mais parce que la soutendante de l'arc de $1 \frac{1}{2}$ étant donnée, celle qui soutend le tiers de cet arc n'est pas pour cela donnée par les lignes; car, si elle l'était, nous aurions par cela même la corde de $1 \frac{1}{2}^d$; nous chercherons d'abord la corde de 1^d , par le moyen de celle de $1 \frac{1}{2}$ degré et de celle de $1/2 \frac{1}{4}$, à l'aide d'un lemme qui, quoiqu'il ne puisse pas donner la juste valeur d'une droite inscrite dans le cercle, donne au moins les plus petites avec assez de précision, pour qu'il n'y ait pas de différence sensible d'avec celles que l'on déterminerait rigoureusement.

(...) Telle est, à mon avis, la manière la plus facile de trouver toutes les droites inscrites dans le cercle. Mais, comme je l'ai dit, afin d'avoir sous la main les valeurs toutes prêtes de ces droites pour tous les cas où l'on en a besoin, nous placerons, ci-dessous, des tables de 45 lignes chacune, disposées en trois colonnes, dont la première contiendra les grandeurs des arcs croissant successivement par demi-degrés ; la seconde donnera leurs soutendantes évaluées en parties dont le diamètre en contient 120 ; et la troisième offrira le trentième des accroissements de ces soutendantes pour chaque demi-degré ; de sorte, qu'ayant ainsi l'augmentation moyenne, pour un soixantième, sensiblement égale à l'augmentation juste, nous pourrons calculer promptement les parties proportionnelles qui conviendront à chacune des soutendantes des arcs intermédiaires à ceux qui sont marqués dans ces tables, de demi en demi-degrés. Il est aisé de voir que, si l'on était dans le doute de quelque faute de copie, pour quelqu'une de ces soutendantes, on pourroit en faire aisément la vérification ou la correction à l'aide des théorèmes précédents, soit par celui qui donne la soutendante de l'arc double, soit par celui qui donne celle de la somme ou de la différence, soit enfin par celui qui donne la soutendante du supplément au demi-cercle. Voici maintenant ces tables toutes dressées.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.								
ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47