

## La géométrie grecque (2) :

### aperçus sur la théorie des proportions dans les *Eléments* d'Euclide

#### Extraits du livre V <sup>1</sup>

##### Définitions

1. Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.
2. Et multiple, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.
3. Un rapport ( $\lambda\omicron\gamma\omicron\zeta$ ) est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre.
4. Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.
5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, et pris de manière correspondante.
6. Et des grandeurs qui ont le même rapport sont dites en proportion ( $\alpha\nu\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ ).

(...)

#### Extraits du livre VI

##### Définitions <sup>2</sup>

1. Des figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux pris un par un et dont les côtés autour des angles égaux sont en proportion.
2. (...)
3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est tout entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand segment relativement au plus petit.
4. Une hauteur, dans toute figure, est la perpendiculaire menée à partir d'un sommet sur une base.
5. (...)

---

<sup>1</sup> [1] vol.2

<sup>2</sup> [1] vol.2

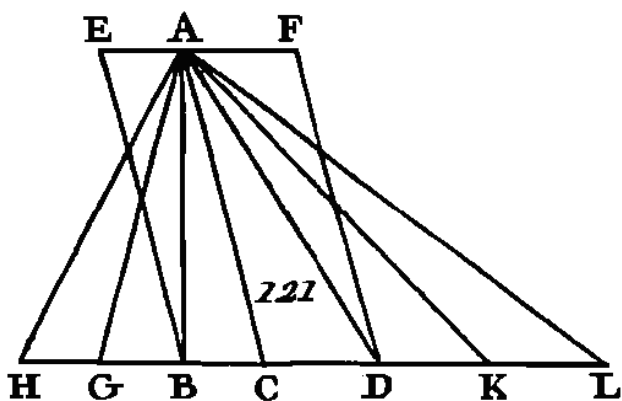
Propositions <sup>3</sup>

## PROPOSITION PREMIÈRE. THÉORÈME.

*Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Soient les triangles ABC, ACD (fig. 121) et les parallélogrammes EC, CF qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point A sur la droite BD : je dis que le triangle ABC est au triangle ACD et que le parallélogramme EC est au parallélogramme CF comme la base BC est à la base CD.

Prolongez la droite BD de part et d'autre vers les points H, L, et faites les droites BG, GH égales chacune à la base BC ; faites aussi les droites DK, KL égales chacune à la base CD, et menez les droites AG, AH, AK, AL.



Puisque les droites CB, BG, GH sont égales entre elles, les triangles AGH, AGB, ABC seront égaux entre eux (prop. 38. I) : donc le triangle AHC contient le triangle ABC autant de fois que la base HC contient la base BC. Par la même raison le triangle ALC contient le triangle ACD autant de fois que la base LC contient la base CD. Si la base HC est égale à la base

CL, le triangle AHC sera égal au triangle ABC (prop. 38. I) ; si la base HC surpasse la base CL, le triangle AHC surpassera le triangle ALC, et si cette base est plus petite le triangle sera plus petit. Ayant donc quatre quantités, savoir, les deux bases BC, CD et, les deux triangles ABC, ACD, on a pris des équimultiples de la base BC et du triangle ABC, savoir, la base HC et le triangle AHC ; on a pris aussi d'autres équimultiples de la base CD et du triangle ACD, savoir, la base CL et le triangle ALC ; et l'on a démontré que si la base HC surpasse la base CL, le triangle AHC surpassera le triangle ALC; que si la base HC est égale à la base CL, le triangle AHC sera égal au triangle ALC, et que si la base HC est plus petite que la base GL, le triangle AHC sera plus petit que le triangle ALC : donc le triangle ABC est au triangle ACD comme la base BC et la base CD (déf. 5. 5).

Puisque le parallélogramme EC est double du triangle ABC, que le parallélogramme FC est double aussi du triangle ACD (prop. 41. I), et à cause que les parties ont entre elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15. V), le parallélogramme EC sera un parallélogramme FC comme le triangle ABC est un triangle ACD : donc puisqu'on a démontré que le triangle ABC est au triangle ACD comme la base BC est à la base CD; et à cause que le parallélogramme EC est au parallélogramme FC comme le triangle ABC est au triangle ACD, le parallélogramme EC sera au parallélogramme FC comme la base BC est à la base CD (prop. 11. V).

---

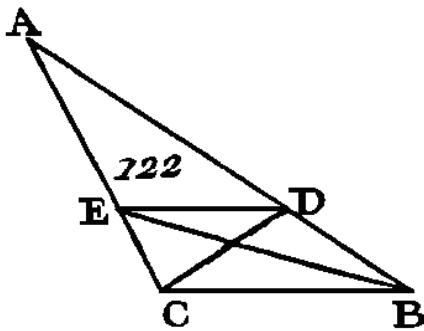
<sup>3</sup> [3]

Donc les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ; ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION II. THÉORÈME.

*Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.*

Que l'on mène la droite DE (fig. 122) de manière qu'elle soit parallèle à un des côtés du triangle ABC : je dis que CE est à EA comme BD est à DA. Menez les droites BE, CD.



Le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop. 37. I), parce qu'ils ont la même base et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles.

Mais deux quantités égales ont la même raison avec une même quantité (prop. 7. V) : donc le triangle CDE est au triangle ADE comme le triangle BDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA : car ces deux triangles,

qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la base AB, sont entre eux comme leurs bases (prop. 1. VI). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA : donc BD est à DA comme CE est à EA (prop. 11. V).

Si les côtés AB, AC du triangle ABC sont coupés proportionnellement aux points D, E de manière que BD soit à DA comme CE est à EA, et si l'on mène la droite DE : je dis que la droite DE est parallèle à la droite BC.

Faites la même construction. Puisque BD est à DA comme CE est à EA, que BD est à DA comme le triangle BDE est au triangle ADE (prop. 1. VI), et que CE est à EA comme le triangle CDE est au triangle ADE; le triangle BDE sera au triangle ADE comme le triangle CDE est au triangle ADE (prop. 11. V) : donc chacun des triangles BDE, CDE a la même raison avec le triangle ADE : donc le triangle BDE est égal au triangle CDE (prop. 9, V), et ils ont la même base. Mais des triangles égaux et construits sur la même base sont compris entre les mêmes parallèles (prop. 39. I) : donc la droite DE est parallèle à la droite BC.

Donc si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant de ce triangle ; ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION III. THÉORÈME.

*Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les autres côtés de ce triangle ; et si les segments de la base ont la même raison que*

*les autres côtés du triangle, la droite qui est menée du sommet à la section partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales. (...)*

**PROPOSITION IV. THÉORÈME.** *Dans les triangles équiangles, les côtés qui sont autour des angles égaux sont proportionnels ; et on appelle côtés homologues ceux qui sous-tendent des angles égaux. (...)*

**PROPOSITION V. THÉORÈME.** *Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ces deux triangles seront équiangles et les angles sous-tendus par les côtés homologues seront égaux.*

(...)

## Extraits du livre VII

### Définitions <sup>4</sup>

1. Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dit une.
2. Et un nombre ( $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\zeta$ ) est la multitude composée d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure le plus grand.
4. Et des parties quand il ne le mesure pas.
5. Et un multiple, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.
6. Un nombre pair est celui qui est divisible en deux parties égales.
7. Et un impair, le non-divisible en deux, ou celui qui diffère d'une unité d'un nombre pair.

(...)

12. Un nombre premier est celui qui est mesuré par une seule unité<sup>5</sup>.
13. Des nombres premiers entre eux sont ceux qui sont mesurés par une seule unité comme mesure.
14. Un nombre composé est celui qui est mesuré par un certain nombre.
15. Et des nombres composés entre eux sont ceux qui sont mesurés par un certain nombre comme commune mesure.
16. Un nombre est dit multiplier un nombre, autant qu'il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté à lui-même, et qu'il est produit un certain nombre<sup>6</sup>.
17. Et quand deux nombres, s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain nombre, le produit est appelé plan, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses côtés.
18. (...)
19. Un nombre carré est celui qui est égal un nombre égal de fois, ou celui qui est contenu par deux nombres égaux.
20. (...)
21. Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième du quatrième, sont équi-multiples, ou la même partie, ou les mêmes parties<sup>7</sup>.

<sup>4</sup> [1] vol.2

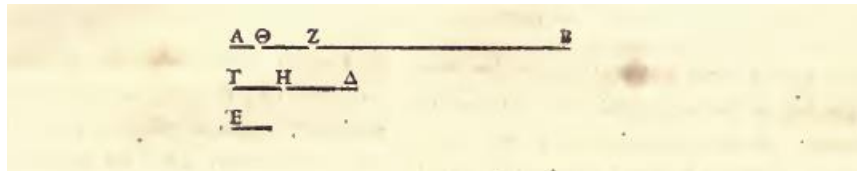
<sup>5</sup> Dans [3] : Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

<sup>6</sup> Dans [3] : Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

(...)

### Propositions<sup>8</sup>

Des nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand de façon réitéré et en alternance, si le reste ne mesure jamais le reste précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.



Soient les deux nombres inégaux  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

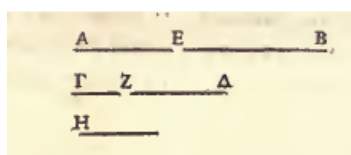
Car si les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $E$ ; que  $\Gamma\Delta$  mesurant  $AB$  laisse  $ZA$  plus petit que lui-même; que  $ZA$  mesurant  $\Delta\Gamma$  laisse  $H\Gamma$  plus petit que lui-même; et qu'enfin  $H\Gamma$  mesurant  $ZA$  laisse l'unité  $\Theta A$ .

Puisque  $E$  mesure  $\Gamma\Delta$ , et que  $\Gamma\Delta$  mesure  $ZB$ , le nombre  $E$  mesure  $ZP$ . Mais

il mesure  $AB$  tout entier; donc il mesurera le reste  $AZ$ . Mais  $AZ$  mesure  $\Delta H$ ; donc  $E$  mesurera  $\Delta H$ . Mais il mesure  $\Gamma\Delta$  tout entier; donc il mesurera le reste  $\Gamma H$ . Mais  $\Gamma H$  mesure  $Z\Theta$ ; donc  $E$  mesurera  $Z\Theta$ . Mais il mesure  $ZA$  tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante  $\Theta A$ , ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Donc les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.



<sup>7</sup> Dans [3] : Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

<sup>8</sup> Énoncé pris dans [1], démonstration dans [3]

Soient donnés les deux nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  non premiers entr'eux, et que  $\Gamma\Delta$  soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ .

Si  $\Gamma\Delta$  mesure  $AB$ , le nombre  $\Gamma\Delta$  sera une commune mesure des nombres  $\Gamma\Delta$ ,  $AB$ , parce que  $\Gamma\Delta$  se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que  $\Gamma\Delta$  ne peut mesurer  $\Gamma\Delta$ .

Mais si  $\Gamma\Delta$  ne mesure pas  $AB$ , et si on retranche toujours le plus petit des nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que  $\Gamma\Delta$  mesurant  $AB$  laisse  $EA$  plus petit que lui-même; que  $EA$  mesurant  $\Delta\Gamma$  laisse  $Z\Gamma$  plus petit que lui-même; et enfin que  $\Gamma Z$  mesure  $EA$ . Puisque  $\Gamma Z$  mesure  $EA$ , et que  $EA$  mesure  $\Delta Z$ , le nombre  $\Gamma Z$  mesurera  $\Delta Z$ . Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera  $\Gamma\Delta$  tout entier. Mais  $\Gamma\Delta$  mesure  $BE$ ; donc  $\Gamma Z$  mesure  $BE$ . Mais il mesure  $EA$ ; donc il mesurera  $BA$  tout entier. Mais il mesure  $\Gamma\Delta$ ; donc  $\Gamma Z$  mesure  $AB$  et  $\Gamma\Delta$ ; donc  $\Gamma Z$  est une commune mesure des nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si  $\Gamma Z$  n'est pas la plus grande commune mesure des nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , quelque nombre plus grand que  $\Gamma Z$  mesurera les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit  $H$ . Puisque  $H$  mesure  $\Gamma\Delta$ , et que  $\Gamma\Delta$  mesure  $BE$ , le nombre  $H$  mesurera  $BE$ . Mais il mesure  $BA$  tout entier; donc il mesurera le reste

$AE$ . Mais  $AE$  mesure  $\Delta Z$ ; donc  $H$  mesure  $\Delta Z$ . Mais il mesure  $\Delta\Gamma$  tout entier; donc il mesurera le reste  $\Gamma Z$ , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que  $\Gamma Z$  ne mesurera pas les nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ; donc  $\Gamma Z$  est la plus grande commune mesure des nombres  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Ce qu'il fallait démontrer.

(...)

Proposition 32. Tout nombre est soit premier soit mesuré par un certain nombre premier.

(...)

### Extrait du livre IX

Proposition 20<sup>9</sup>

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers.

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Soit pris le plus petit nombre mesuré par les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  (38. 7)<sup>1</sup>, et que ce nombre soit  $\Delta E$ ; ajoutons à  $\Delta E$  l'unité  $\Delta Z$ ; le nombre  $E Z$  sera un nombre

<sup>9</sup> [3]

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers  $A, B, \Gamma, EZ$  qui sont en plus grande quantité que les nombres  $A, B, \Gamma$ .

Mais que  $EZ$  ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (53. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier  $H$ ; je dis que  $H$  n'est aucun des nombres  $A, B, \Gamma$ . Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres  $A, B, \Gamma$  mesurent  $\Delta E$ , le nombre  $H$  mesurera  $\Delta E$ . Mais  $H$  mesure  $EZ$ ; donc  $H$ , qui est un nombre, mesurera l'unité restante  $\Delta Z$ , ce qui est absurde; donc  $H$  n'est aucun des nombres  $A, B, \Gamma$ . Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers  $A, B, \Gamma, H$ , que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres  $A, B, \Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.

### Extraits du livre X

Définitions.<sup>10</sup>

1. Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.

(...)

Proposition 2. Si, de deux grandeurs inégales proposées, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs sont incommensurables. (...)

Proposition 3. Etant donnée deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure. (...)

Proposition 5. Les grandeurs commensurables ont comme rapport l'une par rapport à l'autre celui d'un nombre relativement à un autre nombre.

### Un extrait de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase<sup>11</sup>

Si on nous fixe deux nombres impairs et que l'on propose et enjoigne de discerner s'ils sont premiers entre eux et non composés ou seconds et composés, et, s'ils sont seconds et composés, quel nombre est leur commune mesure, il faut comparer les nombres proposés et retirer toujours le plus petit du plus grand, autant de fois que c'est possible, puis, le plus petit étant retiré, soustraire à son tour du nombre restant, autant de fois que cela est possible; car l'alternance elle-même et la soustraction réciproque cesseront nécessairement soit à l'unité, soit à un unique nombre nécessairement impair.

Lors donc que les soustractions s'achèvent à l'unité, ils montrent que les nombres sont premiers et non composés entre eux, mais lorsqu'elles vont vers un autre nombre impair, qui s'écrit deux fois en quotité, dis que ces nombres sont seconds entre eux et composés et que leur commune mesure est ce nombre qui s'écrit deux fois; par exemple, si on nous

<sup>10</sup> [1] vol.3

<sup>11</sup> Trad. Bertier; cité dans [4], p.58-59.

propose 23 et 45, retire 23 de 45, il restera 22 ; en retirant à son tour ce nombre de 23, le reste est l'unité ; en retirant celle-ci de 22 autant de fois qu'il est possible, tu cesseras à l'unité ; ces pourquoi ces nombres sont premiers et non composés entre eux, et leur commune mesure est l'unité qui reste.

Mais si on propose d'autres nombres, 21 et 49, retire le plus petit du plus grand : reste 28 ; ensuite, de nouveau, retire de celui-ci le même nombre 21 (car c'est possible), reste 7 ; je retire 7 de 21, reste 14 ; de nouveau j'en retire 7 (car c'est possible), restera 7, mais il n'est pas possible de retirer une hebdomade d'une hebdomade ; la cessation du processus est achevé à 7 qui s'écrit deux fois ; proclame que les nombres initiaux 21 et 49 sont seconds et composés entre eux, et que leur commune mesure, en plus de l'unité universelle, est 7.