

La géométrie grecque (1) : le livre I des *Eléments* d'Euclide

Sources :

[1] Euclide *Les Eléments*, traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes. Paris : PUF, 1990 (vol.1), 1994 (vol.2), 1998 (vol.3), 2001 (vol.4).

[2] Bernard Vitrac *Les géomètres de la Grèce antique*, dossier disponible sur le site Culturemath
<http://www.math.ens.fr/culturemath/>

[3] Euclide *Les œuvres d'Euclide*, traduction de François Peyrard, 3 volumes. Paris : chez M. Patris, 1814 (vol.1), 1816 (vol.2), 1818 (vol.3).

Disponible en ligne sur *Internet Archive* : <http://www.archive.org/details/lesuvresdeuclide01eucl>

[4] Serafina Cuomo *Les mathématiques classiques et hellénistiques*, in *La Mathématiques I, les lieux et les temps*, C. Bartocci et P. Odifredi (eds.). Paris : CNRS éditions, 2009. p.41-71.

Signalons deux ressources utiles, en ligne :

Une autre édition de l'Euclide de Peyrard, limitée à la géométrie, est disponible sur <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/euclide/table.htm> ou sur Gallica.

La traduction anglaise des *Eléments* par Heath (1908) est disponible sur <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>, avec des figures animées sous java.

Principaux écrits mathématiques grecs conservés¹

[-330; -150]

Aristarque de Samos
Autolycos de Pitane
Euclide

Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune
La sphère en mouvement ; Levers et couchers héliaques
Éléments (13 Livres)
Données
Division des figures (Extraits conservés en arabe)
Phénomènes
Optiques

Archimède de Syracuse

Écrits d'authenticité douteuse : *Division du canon. Catoptrique.*
Fragments "mécaniques" (conservés en latin)
Sphère et Cylindre (2 Livres)
Mesure du cercle
Quadrature de la Parabole
Spirales
Conoïdes et Sphéroïdes

¹ [2]

Méthode à Ératosthène

Construction de l'heptagone (Extraits conservés en arabe)

Sur les cercles mutuellement tangents (conservé en arabe)

Arénaire

Problème des bœufs

Equilibres des figures planes

Corps flottants

Écrit d'authenticité douteuse : *Livre des Lemmes* (conservé en arabe et en latin)

Aratos de Soles

Phénomènes

Philon de Byzance

Construction des machines de jet

Poliorcétique;

Pneumatiques (conservé en arabe); il s'agit d'extraits d'une *Syntaxe mécanique* en 8 ou 9 Livres au moins.

Apollonius de Pergè

Coniques (Livres I-IV conservés en grec; Livres V-VII en arabe; Livre VIII perdu)

De la section de rapport (conservé en arabe)

Dioclès

Sur les miroirs ardents (conservé en arabe)

Hypsiclès d'Alexandrie

Livre XIV des *Éléments* ;

Des ascensions

[-30; 400]

Héron d'Alexandrie

Métriques (3 Livres)

Définitiones

Sur la dioptré

Catoptrique

Mécaniques (3 Livres, conservé en arabe)

Pneumatiques

Sur la fabrication des automates

Sur la construction des machines de jet

Écrits d'authenticité douteuse : *Geometrica. Stereometrica I et II. De Mensuris*

Ménélaus d'Alexandrie

Sphériques (3 Livres, conservé en arabe)

Sur les corps mixtes et les densités spécifiques (conservé en arabe)

Nicomaque de Gérase

Introduction arithmétique

Manuel d'harmonique.

Théon de Smyrne

Exposition des connaissances mathématiques nécessaires à la lecture de Platon

Ptolémée d'Alexandrie

Almageste (13 Livres)

Tables manuelles

Hypothèses des planètes

Phases

Tetrabiblos

Analemme (conservé en latin)

Planisphaerium (conservé en arabe et en latin)

Géographie (8 Livres)

Harmoniques (3 Livres)

Optique (Livres II-V conservés en latin)

Diophante d'Alexandrie

Arithmétiques (10 Livres conservés sur 13 : 6 en grec; 4 en arabe)

Traité sur les nombres polygones

Sérénus d'Antinoé

De la section du cylindre

Pappus d'Alexandrie	<i>De la section du cône</i> <i>Collection mathématique</i> (7 Livres conservés sur 8) <i>Commentaires des Eléments d'Euclide, Livre X</i> (conservé en arabe) <i>Commentaires de l'Almageste de Ptolémée, Livres V-VI</i>
Théon d'Alexandrie	<i>Recension des Eléments et de l'Optique d'Euclide</i> <i>Commentaires de l'Almageste de Ptolémée.</i> (11 Livres conservés sur 13) <i>Grand</i> (5 Livres) <i>et petit</i> (1 Livre) <i>commentaires des Tables manuelles de Ptolémée</i>

[400; 550]

Proclus de Lycie	<i>Commentaires des Eléments d'Euclide, Livre I</i> <i>Résumé des hypothèses astronomiques</i>
Eutocius d'Ascalon	<i>Commentaires de Sphère et Cylindre, Mesure du cercle, Équilibres-plans d'Archimède</i> <i>Rédition et commentaires des Livres I-IV des Coniques d'Apollonius</i>
VI e s. ?	<i>Introduction anonyme à l'Almageste</i> <i>Livre XV des Eléments</i>

Les géomètres de la Grèce antique : Chronologie²**Époque archaïque**

	Evènements socio-politiques	Culture et sciences
VIII s.	Institution des Jeux Olympiques, 776 Fondation des premières "colonies" occidentales, vers 750	Emprunt et adaptation de l'alphabet nord-sémitique Composition de l'épopée (Homère) Premiers temples monumentaux
VII s.		Poésie didactique, poésie lyrique. Hésiode
VI s.	Premières monnaies frappées par Egine Archontat de Solon à Athènes, 594 Réformes démocratiques de la constitution à Athènes par Clisthène, 508	Tradition des "sept" sages, dont Thalès de Milet et Solon Débuts de la philosophie naturelle (Thalès, Anaximandre) Début du théâtre, v. 530 Alcée, Sappho, puis Anacréon, Simonide, Théognis, Xénophane, Pythagore .

Époque classique

V s.	Guerres médiques (490-479) Ligue de Délos et Empire athénien (478 - 404)	Héraclite d'Ephèse, (fl. v. 500), Parménide d'Elée, (fl. v. 480) Age d'or de la tragédie à Athènes (v. 475 - 405) Développement de la littérature technique en prose Première Sophistique. Alcméon de Croton, Anaxagore, Empédocle,
-------------	---	--

² Résumé du document disponible dans [2]

	<p>Guerre du Péloponnèse (431 - 404)</p> <p>Achèvement du Parthénon, 432</p> <p>Mort de Périclès, 429</p>	<p>Leucippe, Zénon d'Elée, Protagoras, Hérodote, Hippocrate de Cos (médecine). Méton d'Athènes, astronome, observe en 432</p> <p>Socrate (v. 470-399), Aristophane (v. 450-385)</p> <p>Hippocrate de Chio, Théodore de Cyrène</p>
IV s.	<p>Procès et mort de Socrate, 399</p> <p>Alexandre le Grand, 336 - 323</p> <p>Fondation d'Alexandrie, 332-331.</p> <p>Fin de la démocratie à Athènes, 322</p>	<p>Platon (429-347)</p> <p>Eudoxe de Cnide (fl. v. 350), école à Cyzique</p> <p>Ménechme, Dinostrate, Callippe, ses disciples</p> <p>Démosthène, Aristote (384 - 322)</p> <p>Eudème de Rhodes, Théophraste (v. 372 - 285), Autolykos de Pitane (fl. v. 320)</p> <p>Zénon, fonde de l'école stoïcienne à Athènes, v. 310. Ecole d'Epicure à Athènes, 306</p>

Époque hellénistique

III s.	<p>Fondation du Musée et de sa Bibliothèque, à Alexandrie</p> <p>Ptolémée II Philadelphe, roi en 283</p> <p>Phare d'Alexandrie, v. 280</p> <p>Fin de la conquête romaine de la Grande-Grèce, 272</p> <p>Prise de Syracuse par les Romains, 212</p>	<p>Éléments d'Euclide (vers 300 ?)</p> <p>Aristarque de Samos (v. 310-230)</p> <p>Conon de Samos, Callimaque (v. 305 - 240)</p> <p>Dosithee de Péluse, Apollonius de Rhodes</p> <p>Eratosthène, Archimède (v. 287-212)</p> <p>Philon de Byzance (Syntaxe mécanique), Dioclès (Miroirs ardents), Nicomède (conchoïde), Eudème de Pergame</p>
II s.	<p>Victoire romaine sur la Macédoine, 171-168</p> <p>La Grèce devient province romaine, 146. Ptolémée VIII disperse les savants du Musée, 145</p>	<p>Apollonius de Perge rédige ses coniques (200-195), Zénodote (figures isopérimétriques), Hypsiclès (polyèdres réguliers)</p> <p>Hipparque de Nicée (v. 180-125 ?) développe l'astronomie quantitative, Théodose de Bithynie (Sphériques) et ses fils, Posidonius d'Apamée (v. 135-50)</p>
I s.	<p>César, dictateur à vie, 45</p> <p>L'Égypte devient province romaine</p> <p>Octave accepte le titre d'Auguste, 27 avant J.C</p>	<p>Cicéron (106-43), Lucrèce (99/98-54/53), Virgile (70-19) Ovide (43-17), Tite-Live (59 av. -17 ap.)</p> <p>Géminus de Rhodes (fl. v. 70). Diodore d'Alexandrie, gnomonicien. Strabon d'Amaseia, (63 av. - 19 ap.), géographe</p> <p>Composition du <i>De Architectura</i> de Vitruve</p>

Époque impériale

I s.	Prédication de Jésus, v. 30 Éruption du Vésuve et destruction de Pompéï et Herculanium, 79	Géographie de Strabon, 7. Encyclopédie médicale de Celse, 20. Sénèque († 65), <i>Histoire naturelle</i> de Pline l'ancien, 77. Héron d'Alexandrie (fl. 62 ?) : mécanique et géométrie Débuts du passage du rouleau au codex (v. 80 ?) Ménélaus d'Alexandrie (fl. v. 100)
II s.	Extension maximale de l'Empire romain	Nicomaque de Gérase Théon de Smyrne (fl. v. 140 ?) Claude Ptolémée (v. 100- 175)
III s.	Edit de Caracalla : la citoyenneté romaine est conférée à tous les hommes libres de l'Empire, 212 Persécution générale contre les Chrétiens, 250 Premières invasions barbares, 253-276	<i>Vies et opinions des philosophes</i> de Diogène Laërce Plotin (205-270) ouvre son école à Rome, v. 244 Diophante d'Alexandrie (fl. v. 250) : arithmétique
IV s.	Edit de Milan, 313 : Constantin le Grand autorise le christianisme Réunification de l'empire, 324 Byzance devient la capitale de l'Empire romain, 324. En 330 elle est prend le nom de Constantinople. Interdiction des cultes païens, 391. Partage officiel de l'Empire entre Orient et Occident, 395	Pappus d'Alexandrie (v. 310) : Collection mathématique commente Euclide et Ptolémée. Théon d'Alexandrie (fl. v. 365), membre du Musée réédite Euclide. Commente Ptolémée. Synésius de Cyrène (v. 373-414) étudie à Alexandrie avec Hypatie, fille de Théon (assassinée en 415). Destruction du Sérapieion (et de sa bibliothèque ?) à Alexandrie, 391

Antiquité tardive

V s.	Sac de Rome par les Wisigoths d'Alaric, 410 Clovis, roi des Francs, 481-511 Première rupture entre églises d'Orient et d'Occident, 484	<i>La cité de Dieu</i> d'Augustin, 413 Proclus de Lycie (410-485) succède à Syrianus à la tête de l'école néoplatonicienne, v. 438. Il commente les <i>El.</i> d'Euclide Son disciple Marinus de Nauplie commente les <i>Data</i> d'Euclide. Domninos de Larissa, <i>Manuel d'introduction arithmétique</i> Boèce (470-525) traduit en latin l' <i>Introduction</i> de Porphyre à l' <i>Organon</i> d'Aristote
VI- VII s	Retour de Mahomet à la Mecque, 630 Conquête arabes (Perse, Palestine, Egypte) 634-651	Eutocius d'Ascalon (fl. 510), réédite Apollonius. Commente Archimède. Isidore de Séville, († 636)

Survol des 13 livres des *Eléments* (d'après Vitrac [2])

Livre I	Constructions fondamentales. De l'égalité des triangles et des parallélogrammes
Livre II	Section d'une droite et égalités d'aires associées. De la quadrature d'une aire rectiligne
Livre III	Le cercle et ses segments. Tangence.
Livre IV	Des figures inscrites et circonscrites relativement à un cercle
Livre V	Théorie générale de la proportionnalité entre grandeurs
Livre VI	Des figures rectilignes planes semblables. De l'application des aires
Livre VII	Nombres entiers (PGCD, proportionnalité et rapports de nombres, PPCM)
Livre VIII	De la proportionnalité continue entre nombres. Nombres carrés, cubes, plans et solides semblables
Livre IX	Proportionnalité continue et nombres premiers. Théorie du pair et de l'impair. Nombres parfaits
Livre X	Commensurabilité et incommensurabilité des grandeurs. Classification de droites irrationnelles
Livre XI	Constructions stéréométriques fondamentales. Égalité et similitude des parallélépipèdes.
Livre XII	Pyramides et prismes. Proportionnalité dans les cercles, les cônes, les cylindres et les sphères
Livre XIII	Section en extrême et moyenne raison. Construction et comparaison des cinq polyèdres réguliers

Parcours du livre I des *Eléments* ³

DEFINITIONS

1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les limites d'une ligne sont des points.
4. Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
5. Une surface est ce qui a seulement largeur et longueur.
6. Les limites d'une surface sont des lignes.
7. Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles.
8. Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
9. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne.
10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
11. Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. Une frontière est ce qui est limite de quelque chose.
14. Une figure est ce qui contenu par quelque ou quelques frontière(s).

³ Les définitions, demandes et notions communes sont ici données intégralement, depuis l'édition Vitrac [1]. Pour les propositions : tous les énoncés sont donnés, mais on a omis la plupart des démonstrations ; le texte utilisé est celui de Peyrard [3].

15. Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles.
16. Et le point est appelé centre du cercle.
17. Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.
19. Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de quatre.
20. Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux ; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement ; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
21. De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit ; obtusangle celle qui a un angle obtus ; acutangle, celle qui a trois angles aigus.
22. Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange est celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un rhomboïde, celle qui les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèze les quadrilatères autres que ceux-là.
23. Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

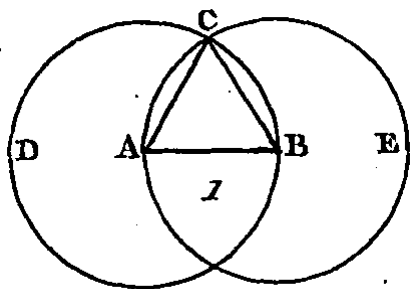
DEMANDES (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petit que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

NOTIONS COMMUNES (axiomes)

1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. {Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les tous sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.}
7. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.
9. {Et deux droites ne contiennent pas une aire.}

PROPOSITION PREMIÈRE. PROBLÈME. *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*



Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.

Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE, et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB (dem. 1).

Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA; mais il a été démontré que la droite CA était égale à la droite AB : donc chacune des droites CA, CB est égale à la

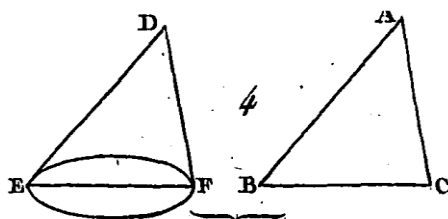
droite AB ; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles ; donc la droite CA est égale à la droite CB : donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.

Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION II. PROBLÈME. *D'un point donné conduire une droite égale à une droite donnée.*

PROPOSITION III. PROBLÈME. *Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.*

PROPOSITION IV. THÉORÈME. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les côtés égaux est égal dans les deux triangles, la base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entre eux.*

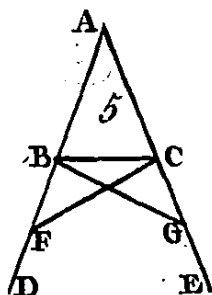


Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. 4) dont les deux côtés AB, AC sont égaux aux deux côtés DE, DF chacun à chacun, savoir, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF ; que l'angle BAC soit aussi égal à l'angle EDF : je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF, et que les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux chacun à chacun; l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point B tombera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE ; mais la droite AC s'appliquera exactement sur la droite DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF ; le point C tombera sur le point F, parce que la ligne AC est égale à la ligne DF ; mais le point B tombe sur le point E : donc la base BC est égale à la base EF, car si le point B tombant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BC ne s'applique pas exactement sur la base EF, il faut nécessairement que deux lignes droites comprennent un espace, ce qui est impossible (axiome 12) ; donc la base BC s'appliquera exactement sur la base EF, et lui sera égale ; donc aussi le triangle entier ABC s'appliquera exactement sur le triangle entier DEF et lui sera égale. Par conséquent les autres angles de l'un des triangles s'appliqueront exactement sur les autres angles de l'autre triangle et seront par conséquent égaux aussi entre eux ; c'est-à-dire l'angle ABC sera égal l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Donc si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les côtés égaux est égal dans les deux triangles, la base de l'un sera égale à la base de l'autre ; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux des deux triangles seront aussi égaux entre eux ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V. THÉORÈME. *Dans les triangles isocèles les angles placés sur la base sont égaux entre eux et les côtés égaux étant prolongés, les angles placés au-dessous de la base seront aussi égaux entre eux.*



Soit le triangle isocèle ABC (fig. 5) dont le côté AB est égal au côté AC; prolongez les droites AB, AC, vers D et vers E (dem. 2) : je dis que l'angle ABC est égal à l'angle ACB et que l'angle CBD est encore égal à l'angle BCE.

Car prenons sur la droite BD un point quelconque F, et de la droite AE retranchons la droite AG égale à la droite AF, qui est plus petite que la droite AE (prop. 3), et conduisons les droites FC et GB.

Puisque la droite AF est égale à la droite AG et la droite AB à la droite AC, les deux droites FA, CA seront égales aux deux droites GA, BA chacune à chacune ; mais ces droites comprennent l'angle commun FAG: donc (prop. 4) la base FC sera égale à la base GB ; le triangle AFG sera égal au triangle AGB et les

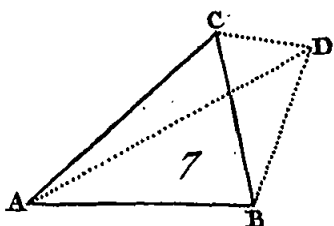
autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entre eux, c'est-à-dire, l'angle ACF égal à l'angle ABG, et l'angle AFC à l'angle AGB ; mais comme la droite AF est égale à la droite AG et la droite AB à la droite AC, la droite BF égalera la droite CG (axiome 5), mais il a été démontré que la droite FC est égale à la droite GB : donc les deux droites BF, FC sont égales aux droites CG, GB chacune à chacune; mais l'angle BFC est égal à l'angle CGB et la droite BC est la base commune de ces deux triangles : donc le triangle BFC sera égal au triangle CGB et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux chacun à chacun (prop. 4) donc l'angle FBC est égal à l'angle GCB, et l'angle BCF égal aussi à l'angle CBG. Mais comme il a été démontré que l'angle total ABG était égal à l'angle total ACF et que l'angle CBG était aussi égal à l'angle BCF, l'angle restant ABC (axiome 3) et l'angle restant ACB placés sur la base seront égaux. Il a été démontré aussi que les angles FBC et GCB placés au-dessous de la base étaient aussi égaux.

Donc dans les triangles isocèles les angles placés sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles placés au-dessous de la base seront aussi égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI. THÉORÈME. *Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux seront aussi égaux entre eux.*

PROPOSITION VII. THÉORÈME. *Ayant conduit par les extrémités d'une droite deux droites qui se rencontrent, il est impossible de mener des mêmes extrémités deux autres droites qui leur soient égales chacune à chacune, si le point où se rencontrent les deux dernières droites est placé du même côté et s'il n'est pas le même que celui où se rencontrent les deux premières.*

Supposons qu'il soit possible de conduire par les extrémités A, B de la droite AB (fig. 7), deux droites AD, DB égales chacune à chacune à deux autres droites AC, CB conduites aussi par les mêmes extrémités A, B et se rencontrant au point C qui est placé du même côté et qui n'est pas le même que celui où se rencontrent les deux droites AD, DB, de manière que les deux droites CA, DA partant de la même extrémité A soient égales entre elles, et que les deux droites CB, DB partant de la même extrémité B soient aussi égales entre elles ; conduisez la droite CD.



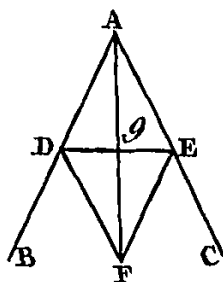
Puis donc que la droite AC est égale à la droite AD, l'angle ACD est égal à l'angle ADG (prop. 5) ; d'où il suit que l'angle ADC est plus grand que l'angle DCB, et que l'angle CDB est beaucoup plus grand que DCB; de plus puisque la droite CB est égale à la droite DB, l'angle CDB sera égal à l'angle DCB; mais il a été démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible.

Donc ayant conduit par les extrémités d'une droite deux droites qui se rencontrent, il est impossible de conduire par les mêmes extrémités deux autres droites qui leur soient égales chacune à chacune, lorsque le point où se rencontrent ces deux dernières droites est placé du même côté et qu'il n'est pas le même que celui où se rencontrent les deux premières ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII. THÉORÈME. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle, chacun à chacun, et si la base de l'un est égale à la base de l'autre, l'angle compris entre les côtés égaux est égal dans les deux triangles.*

PROPOSITION IX. PROBLÈME. *Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.*

Soit BAC (fig. 9) l'angle rectiligne donné: il faut le partager en deux parties égales.



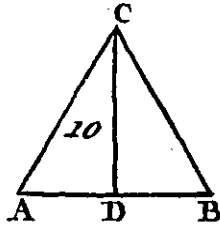
Prenez sur la droite AB un point quelconque D, retranchez de la droite AC la droite AE égale à la droite AD (prop. 3), conduisez la droite DE, sur la droite DE construisez le triangle équilatéral DEF (prop. 1), et conduisez la droite AF : je dis que l'angle BAC est partagé en deux parties égales par la droite AF.

Puisque la droite AD est égale à la droite AE et que la droite AF est commune, les deux droites DA, AF seront égales aux deux droites EA, AF, chacune à chacune ; mais la base DF est égale à la base EF : donc l'angle DAF

est égal à l'angle EAF (prop. 8) : donc l'angle rectiligne donné BAC est partagé en deux parties égales par la ligne AF ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X. PROBLÈME. *Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.*

Soit AB (fig. 10) la droite donnée et finie : il faut partager cette droite AB en deux parties égales.



Construisez sur cette ligne un triangle équilatéral ABC (prop. 1), et partagez l'angle ACB en deux parties égales (prop. 9) ; je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point D.

Car puisque la droite AC est égale à la droite CB, et que la droite CD est commune, les deux droites AC, CD sont égales aux deux droites BC, CD, chacune à chacune ; mais l'angle ACD est égal à l'angle BCD : donc la base AD est égale à la base BD (prop. 4).

Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point D ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI. PROBLÈME. *Sur une droite donnée et d'un point donné dans cette ligne, conduire une droite qui fasse deux angles droits avec la droite donnée.*

PROPOSITION XII. PROBLÈME. *Sur une droite donnée et indéfinie et d'un point placé hors d'elle, mener une perpendiculaire.*

PROPOSITION XIII. THÉORÈME. *Si une droite placée sur une autre droite fait des angles, elle fera avec elle ou deux angles droits ou deux angles égaux à deux angles droits.*

PROPOSITION XIV. THÉORÈME. *Si dans un point quelconque d'une ligne droite, deux droites placées de différents côtés font avec elle deux angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction, c'est-à-dire qu'elles ne formeront qu'une seule et même droite.*

PROPOSITION XV. THÉORÈME. *Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.*

COROLLAIRE. De là il suit manifestement que quel que soit le nombre des lignes qui se coupent en un point, les angles au point de section sont égaux à quatre angles droits.

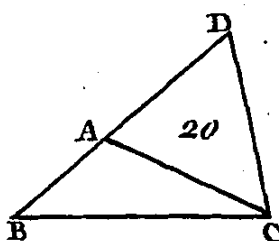
PROPOSITION XVI. THÉORÈME. *Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.*

PROPOSITION XVII. THÉORÈME. *Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.*

PROPOSITION XVIII. THÉORÈME. *Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.*

PROPOSITION XIX. THÉORÈME. *Dans tout triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.*

PROPOSITION XX. THÉORÈME. *Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris sont plus grands que le côté restant.*



Car soit le triangle ABC (fig. 20) : je dis que deux côtés du triangle ABC, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant ; c'est-

à-dire que les côtés BA, AC sont plus grands que le côté BC ; les côtés AB, BC plus grands que le côté AC, et les côtés BC, CA plus grands que le côté AB.

Prolongez le côté AB vers le point D, faites la droite DA égale à la droite CA (prop. 3), et conduisez la droite DC.

Puisque la droite DA est égale à la droite AC, l'angle ADC sera égal à l'angle ACD (prop. 5) ; mais l'angle BCD est plus grand que l'angle ACD (ax. 9) ; donc l'angle BCD est plus grand que l'angle ADC : donc, puisque dans le triangle DCB, l'angle BCD est plus grand que l'angle BDC, et qu'un plus grand côté est opposé à un plus grand angle (prop. 19), le côté DB sera plus grand que le côté BC ; mais la droite DB est égale aux côtés AB, AC ; donc les côtés AB, AC sont plus grands que le côté BC. Nous démontrerons de la même manière que les côtés AB, BC sont plus grands que le côté CA, et les côtés BC, CA plus grands que le côté AB.

Donc deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI. THÉORÈME. *Si des extrémités d'un côté d'un triangle on mène deux droites qui se rencontrent dans ce triangle, ces deux droites seront plus courtes que les deux autres cotés du triangle, mais elles comprendront un angle plus grand.*

PROPOSITION XXII. PROBLÈME. *Avec trois droites égales à trois droites données construire un triangle ; il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième.*

PROPOSITION XXIII. PROBLÈME. *Sur une droite donnée et à un point donné dans cette droite, construire un angle égal à un angle donné.*

PROPOSITION XXIV. THÉORÈME. *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si l'un des angles compris entre ces côtés égaux est plus grand que l'autre, la base de l'un de ces triangles sera aussi plus grande que la base de l'autre.*

PROPOSITION XXV. THÉORÈME. *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et si la base de l'un est plus grande que la base de l'autre, ils auront aussi les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.*

PROPOSITION XXVI. THÉORÈME. *Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, s'ils ont de plus un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et le troisième angle de l'un sera encore égal au troisième angle de l'autre.*

PROPOSITION XXVII. THÉORÈME. *Si une droite tombant sur deux autres droites fait les angles alternes égaux entre eux, ces deux droites seront parallèles.*

PROPOSITION XXVIII. THÉORÈME. *Si une droite tombant sur deux autres droites fait un angle extérieur égal à un angle intérieur opposé et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droites, ces deux droites seront parallèles.*

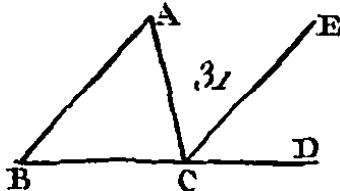
PROPOSITION XXIX. THÉORÈME. *Si une droite tombe sur deux parallèles, les angles alternes sont égaux entre eux, l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté sont égaux à deux droites.*

PROPOSITION XXX. THÉORÈME. *Les droites qui sont parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

PROPOSITION XXXI. PROBLÈME. *Par un point donné conduire une droite parallèle à une droite donnée.*

PROPOSITION XXXII. THÉORÈME. *Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.*

Soit le triangle ABC (fig. 31) ; prolongez le côté BC vers D : je dis que l'angle extérieur ACD est égal aux deux angles intérieurs et opposés CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs ABC, BCA, CAB sont égaux à deux droits.



Menez par le point C la droite CE parallèle à la droite AB (prop. 21),

Puisque la droite CE est parallèle à la droite AB et que la droite AC tombe sur ces deux droites, les angles alternes BAC, ACE sont égaux entre eux (prop. 29). De plus, puisque la droite AB est parallèle à la droite CE et que la droite BD tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ECD est égal à l'angle intérieur et opposé

ABC. Or il a été démontré que l'angle ACE est égal à l'angle BAC : donc l'angle extérieur total ACD est égal aux deux angles intérieurs et opposés BAC, ABC.

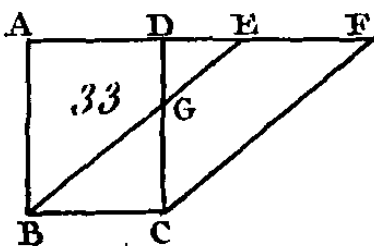
Donc si on ajoute un angle commun ACB, les angles ACD, ACB seront égaux aux trois angles ACB, BCA, CAB; mais les angles ACD, ACB sont égaux à deux droits (prop. 13) : donc les angles ACB, CBA, CAB sont égaux à deux droits.

Donc, ayant prolongé un côté de tout triangle, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÈME. *Les droites qui joignent des mêmes côtés des droites égales et parallèles sont elles-mêmes égales et parallèles.*

PROPOSITION XXXIV. THÉORÈME. *Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux, et la diagonale les partage en deux parties égales.*

PROPOSITION XXXV. THÉORÈME. *Les parallélogrammes qui sont construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

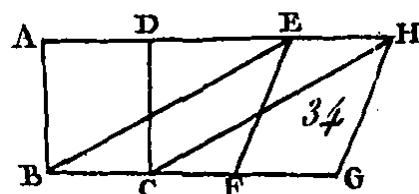


Soient les parallélogrammes ABCD, EBCF (fig. 33) construits sur la même base BC et entre les mêmes parallèles AF, BC : je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF.

Car puisque ABCD est un parallélogramme, la droite AD est égale à la droite BC (prop. 34), et par la même raison la droite EF est aussi égale à la droite BC : donc la droite AD est égale à la droite EF : donc, si on ajoute une droite commune DE, la droite totale AE sera égale à la droite totale DF (axiome 2) ; mais la droite AB est égale à la droite DC : donc les deux droites EA, AB sont égales aux deux droites FD, DC, chacune à chacune ; mais l'angle extérieur FDC est égal à l'angle intérieur EAB (prop. 29) : donc la base EB est égale à la base FC (prop. 4), et le triangle EAB égal au triangle FDC ; donc si l'on retranche la partie commune DGE, le trapèze restant ABGD sera égal au trapèze restant EGCF. Donc si on leur ajoute le triangle commun GBC, le parallélogramme total ABCD sera égal au parallélogramme total EBCF.

Donc les parallélogrammes construits sur les mêmes bases et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVI. THÉORÈME. *Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*



PROPOSITION XXXVII. THÉORÈME. *Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux.*

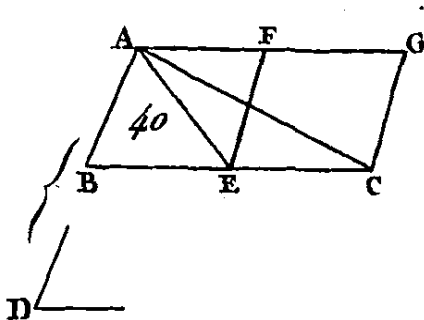
PROPOSITION XXXVIII. THÉORÈME. *Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

PROPOSITION XXXIX. THÉORÈME. *Les triangles égaux qui sont construits sur la même base et qui sont placés du même côté sont compris entre les mêmes parallèles.*

PROPOSITION XL. THÉORÈME. *Les triangles égaux qui sont construits sur des bases égales et qui sont placés du même côté sont compris entre les mêmes parallèles.*

PROPOSITION XLI. THÉORÈME. *Si un parallélogramme et un triangle ont la même base et sont compris entre les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.*

PROPOSITION XLII. PROBLÈME. *Construire dans un angle donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.*



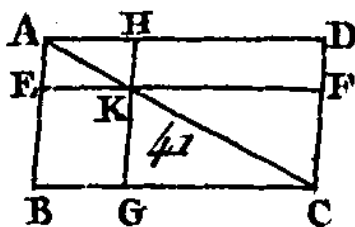
Soit ABC (fig. 40) le triangle donné et D l'angle donné : il faut construire un parallélogramme qui soit égal au triangle ABC dans un angle égal à l'angle donné D.

Partagez la droite BC en deux parties égales au point E et conduisez la droite AE ; sur la droite EC et au point E construisez un angle CEF égal à l'angle D (prop. 23), par le point A conduisez une droite AG parallèle à la droite EC (prop. 31), et par le point C conduisez aussi une droite CG parallèle à la droite FE : la figure FECD sera un parallélogramme.

Puisque la droite BE est égale à la droite EC, le triangle ABE sera égal au triangle AEC (prop. 38), car ces deux triangles sont construits sur des bases égales BE, EC, et compris entre les mêmes parallèles BC, AG : donc le triangle ABC est double du triangle AEC ; mais le parallélogramme FECD est double du triangle AEC, car ils ont la même base et ils sont compris entre les mêmes parallèles : donc le parallélogramme FECD est égal au triangle ABC (ax. 6), et il a un angle égal à l'angle D.

Donc le parallélogramme FECD a été construit égal au triangle ABC dans un angle CEF égal à l'angle donné D ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLIII. THÉORÈME. *Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux.*

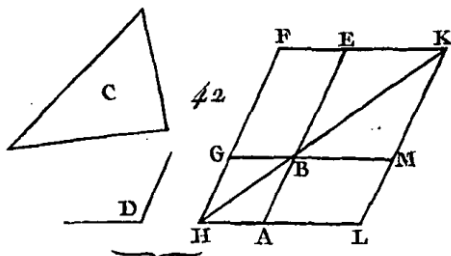


Soit le parallélogramme ABCD (fig. 41) dont AC est la diagonale autour de laquelle sont les parallélogrammes EH, FG, et les parallélogrammes BK, KD qu'on appelle compléments : je dis que le complément BK est égal au complément KD.

Car puisque la figure ABCD est un parallélogramme dont la droite AC est la diagonale, le triangle ABC est égal au triangle ADC (prop. 34). De plus, puisque la figure EKHA est un parallélogramme dont la droite AK est la diagonale, le triangle AEK est égal au triangle AHK ; le triangle KFG est égal au triangle EGC, par la même raison : donc puisque le triangle AEK est égal au triangle AHK, et que le triangle KFC est aussi égal au triangle KGC, le triangle AEK, réuni avec le triangle KGC, est égal au triangle AHK réuni avec le triangle KFC ; mais le triangle total ABC est égal au triangle total ADC : donc les restes BK, KD, qu'on appelle compléments, sont égaux entre eux (axiome 3).

Donc dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIV. PROBLÈME. *Sur une droite donnée et dans un angle donné, construire un parallélogramme qui soit égal à un triangle donné.*



Soient donnés la droite AB (fig. 42), le triangle C et l'angle D : il faut sur la droite AB et dans un angle égal à l'angle D, construire un parallélogramme égal au triangle donné C.

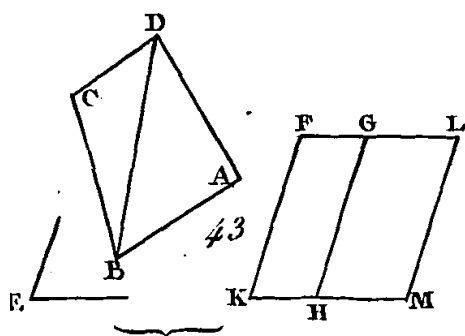
Construisez un parallélogramme BEFG égal au triangle C ; dans un angle EBG égal à l'angle D (prop. 42); placez la droite BE dans la direction de la droite AB; prolongez la droite FG vers H ; et par le point A conduisez la droite AH parallèle à la droite BG ou à la droite EF (prop. 31), et menez la droite GB. Puisque la droite HF tombe sur les parallèles AH, EF, les angles AHF, HFE sont égaux à deux angles droits (prop. 29) : donc les

angles BHG, GFE sont moindres que deux angles droits; mais les droites qui sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits se rencontrent (ax. 11) : donc les droites HB, FE se rencontreront étant prolongées ; que ces deux droites soient prolongées (dem. 2), et supposons qu'elles se rencontrent en K; par le point K conduisez la droite KL parallèle à la droite EA ou à la droite FH (prop. 31), et prolongez les droites AH, GB vers les points L, M.

La figure HLKF est un parallélogramme dont HK est la diagonale ; autour de la diagonale, HK sont les parallélogrammes AG, ME, et les parallélogrammes LB, BF, qu'on nomme compléments: donc le parallélogramme LB est égal au parallélogramme BF (prop. 43); mais le parallélogramme BF est égal au triangle C ; donc le parallélogramme LB sera égal au triangle C ; et puisque l'angle GBE est égal à l'angle ABM (prop. 15) et que l'angle GBE est égal à l'angle D, l'angle ABM sera égal à l'angle D.

Donc sur la droite donnée AB et dans un angle ABM égal à l'angle D, le parallélogramme LB a été construit égal au triangle donné C ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV. PROBLÈME. *Construire, dans un angle donné, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée.*



Soit ABCD (fig. 43) la figure rectiligne donnée et E l'angle donné : il faut, dans un angle égal à l'angle E, construire un parallélogramme qui soit égal à la figure ABCD.

Conduisez la droite DB, et construisez dans l'angle HKF égal à l'angle E, un parallélogramme FH qui soit égal au triangle ADB, et sur la droite GH construisez ensuite dans l'angle GHM égal à l'angle E, un parallélogramme GM qui soit égal au triangle DBC.

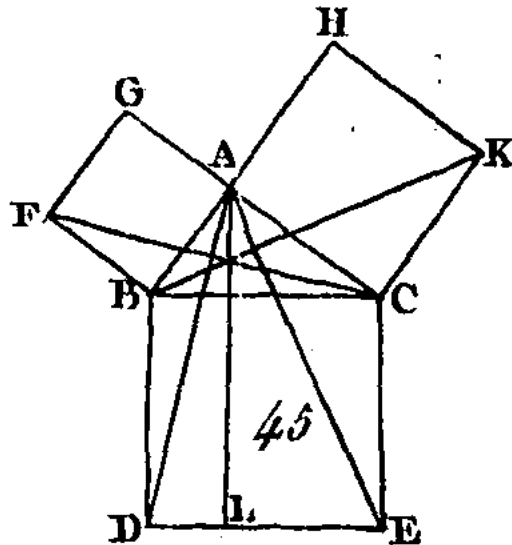
Puisque l'angle E est égal à chacun des angles HKF, GHM, l'angle GHM sera égal, à l'angle HKF : donc si nous leur ajoutons l'angle commun KHG, les angles FKH, KHG seront égaux aux angles KHG, GHM. Mais les angles FKH, KHG sont égaux à deux angles droits (prop. 29) : donc les angles KHG, GHM seront égaux à deux angles droits. Mais puisque les deux droites KH, HM, placées de différents côtés, font sur la droite GH et au point H de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits, la droite KH est dans la direction de la droite HM (prop. 14) ; et puisque la droite HG tombe sur les parallèles KM, PG, les angles alternes MHG, HGF sont égaux (prop. 29) ; donc si nous leur ajoutons l'angle commun HGL, les angles MHG, HGL seront égaux aux angles HGF, HGL. Mais les angles MHG, HGL sont égaux à deux angles droits (prop. 29) ; donc les angles HGF, HGL seront aussi égaux à deux angles droits ; donc la droite FG est dans la direction de la droite GL; et puisque la droite KF est égale et parallèle à la droite HG, et que la droite HG est aussi égale et parallèle à la droite ML, la droite KF sera égale et parallèle à la droite ML (ax. 1 et prop. 30). Mais ces deux droites sont jointes ensemble par les droites RM, FL : donc les droites KM, FL sont égales et parallèles (prop. 33) : donc la figure KFLM est un parallélogramme ; mais comme le

triangle ABD est égal au parallélogramme HF, et que le triangle ABC est égal au parallélogramme GM, la figure totale ABCD sera égale au parallélogramme total KFLM.

Donc le parallélogramme KFLM a été construit égal à la figure rectiligne ABCD, dans l'angle FKM égal à l'angle donné E ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVI. PROBLÈME. *Décrire un carré sur une droite donnée.*

PROPOSITION XLVII. THÉORÈME. *Dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit.*



Soit ABC (fig. 45) un triangle rectangle dont l'angle droit est BAC : je dis que le carré construit sur le côté BC est égal aux carrés construits sur les côtés BA, AC.

Construisez le carré BDEC sur le côté BC ; construisez aussi les deux carrés GB, HC sur les côtés BA, AC, et par le point A conduisez une droite AL parallèle à l'une ou à l'autre des droites BD, CE, conduisez ensuite les droites

Puisque chacun des angles BAC, BAG est droit et que les deux droites AC, AG, placées de part et d'autre de la droite BA, font au point A, avec la droite AB, deux angles de suite égaux à deux angles droits, la droite CA est dans la direction de la droite AG : la droite AB est dans la direction de la droite AH, par la même raison ; et puisque l'angle DBC est égal à l'angle FBA (axiome 10), étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons un angle commun ABC, l'angle total DBA sera égal à l'angle total FBC ; mais les deux droites DB, BA étant égales aux deux droites

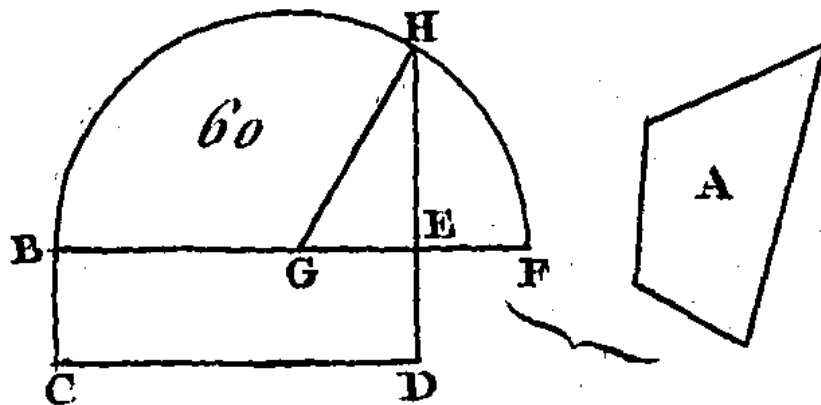
CB, BF, chacune à chacune, et l'angle DBA égal à l'angle FBC, la base AD sera égale à la base FC, et le triangle ABD égal au triangle FBC (prop. 4). Or le parallélogramme BL est double du triangle ABD (prop. 41) car ils ont la même base BD et sont compris entre les mêmes parallèles BD, AL. Le carré GB est aussi double du triangle FBC, car ils ont la même base FB et sont compris entre les mêmes parallèles FB, GC, mais les quantités qui sont doubles de quantités égales sont égales entre elles : donc le parallélogramme BL est égal au carré GB.

Ayant conduit les droites AE, BK, nous démontrerons de la même manière que le parallélogramme CL est égal au carré HC : donc le carré total BDEC est égal aux deux carrés GB, HC ; mais le carré BDEC est construit sur le côté BC, et les carrés GB, HC sont construits sur les côtés BA, AC : donc le carré BE, construit sur le côté BC, est égal aux carrés construits sur les côtés BA, AC.

Donc dans les triangles rectangles, le carré construit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux deux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÈME. *Si le carré qui est construit sur un des côtés d'un triangle est égal aux carrés construits sur les autres côtés du triangle, l'angle compris entre ces deux derniers côtés est droit.*

PROPOSITION XIV. PROBLÈME. *Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.*



Les étapes d'une démonstration euclidienne, selon Proclus⁴

« Tout problème et tout théorème, s'il est parfaitement complet quant à ses parties, exige d'être composé de tout ce que voici : la proposition ("protase"), l'exposition ("ecthèse"), la détermination ("diorsisme"), la construction ("kataskeuè"), la démonstration ("apodeixis"), et la conclusion ("symperasma"). Parmi elles, la proposition dit quelle est, si une certaine chose est donnée, celle qui est cherchée. La proposition parfaite consiste en effet en ces deux choses. L'exposition, reprenant à part et en elle-même la chose donnée, la prépare d'avance, en vue de la recherche. La détermination explique clairement à part ce qu'est précisément la chose cherchée. La construction ajoute ce qui manque à la chose donnée pour la découverte de la chose cherchée. La démonstration tire scientifiquement des choses admises l'inférence proposée. La conclusion retourne de nouveau à la proposition, en confirmant ce qui a été démontré »³⁴⁰.

⁴ Cité dans [1] vol.1, p.137.