Démontrer, faire démontrer en classe de Seconde

Rappel : trois classes de situations ont déjà été abordés dans le cadre de ce thème

- Démonstration de critères de divisibilité (par 2, 3, 4, 5, 9, 11 etc.)
- Usage des exercices au format(s) « Vrai/Faux »
- Démonstrations en géométrie euclidienne : lecture de démonstrations, plusieurs démonstrations pour une même propriété, introduction à la démonstration par l'absurde

Fil rouge n°1 : Preuves d'irrationnalité

Document 1.1 : Mathématiques Seconde, collection Barbazo, Hachette Education 2019.

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration

- On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

Il existe donc un entier relatif p et un entier naturel q non nul tels que $\sqrt{2}$ s'écrive $\frac{p}{q}$ sous forme irréductible.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc, en élevant les deux membres de l'égalité au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$.

On a donc $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair.

p est soit pair, soit impair. Or le carré d'un nombre impair est impair (voir la rubrique « Rédiger une démonstration » page de droite), donc, si p était impair, p^2 le serait également, ce qui n'est pas le cas ici. Donc p est pair.

Par définition d'un nombre pair, il existe un entier relatif k tel que $p = 2k$.
Or $2q^2 = p^2$, donc $2q^2 = 4k^2$.
En divisant par 2 les deux membres de cette égalité, on obtient $q^2 = 2k^2$.
Donc q^2 est pair, ce qui, comme précédemment, implique que q est pair.

- On a montré que p est pair et que q est pair, donc on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, ce qui est absurde puisqu'on a supposé que la fraction $\frac{p}{q}$ était irréductible.

Conclusion

Supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel amène à une absurdité, ainsi $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il est donc irrationnel.

1. Pourquoi peut-on affirmer à la première ligne qu'il existe un entier relatif p et un entier naturel q non nul tels que $\sqrt{2}$ s'écrive $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sous forme irréductible ?
2. Justifier que l'égalité $2q^2 = p^2$ implique que p^2 est pair.
3. Justifier en détail l'égalité $2q^2 = 4k^2$.

Question : Qu'est-ce qui rend cette démonstration particulièrement difficile en classe de Seconde ?

Question : Face à cette difficulté, quel choix original est fait par les rédacteurs de ce manuel ?

Document 1.2 (gauche) : Hyperbole Seconde, Nathan, 2019

93 Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Méthode
Pour démontrer par l'absurde, on prend comme hypothèse la négation de la proposition à démontrer et on en déduit une contradiction.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers naturels non nuls.

1. a) Justifier qu'alors $p^2 = 2q^2$.

b) En déduire la parité de p^2.

2. a) Compléter le tableau ci-dessous indiquant le dernier chiffre de p^2 en fonction de celui de p.

Dernier chiffre de p	0	1	2	…
Dernier chiffre de p^2	0	1	4	…

b) En déduire les derniers chiffres possibles de p^2.

3. Construire de même un tableau indiquant le dernier chiffre de $2q^2$ en fonction de celui de q.

4. a) Comme $p^2 = 2q^2$, déterminer le dernier chiffre de p et les derniers chiffres possibles de q.

b) $\frac{p}{q}$ est-il irréductible ? Conclure.

106 * Une démonstration

Partie A. Une propriété

1. *On commence par des cas particuliers.*
La décomposition en facteurs premiers de 63 est $3^2 \times 7$.

a. Quelle est la décomposition en facteurs premiers de 63^2 ?

b. Dans cette décomposition, un facteur premier peut-il apparaître un nombre impair de fois ?

2. Justifier que la décomposition en facteurs premiers de 58^2 contient un nombre pair de chacun de ses facteurs premiers.

3. *On généralise.*
Soit x un nombre entier naturel non nul. Expliquer pourquoi, dans la décomposition en facteurs premiers de x^2, chacun des facteurs premiers apparaît un nombre pair de fois.

Partie B. Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{5}$

On sait que $(\sqrt{5})^2 = 5$.
On suppose que $\sqrt{5}$ est rationnel et que l'on peut l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers positifs a et b (b non nul) premiers entre eux tels que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$.
Alors $5 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ou encore $5b^2 = a^2$.

1. Démontrer que 5 ne peut pas être à la fois dans la décomposition en facteurs premiers de a et dans celle de b.

2. En déduire que l'égalité $5b^2 = a^2$ n'est pas possible et conclure pour $\sqrt{5}$.

3. Préciser le mode de raisonnement utilisé dans cette démonstration.

Document 1.3 (droite) : Manuel Maths 2$^{\text{nde}}$, collection Métamaths, Belin Education, 2019.

Question : Relever une erreur de raisonnement dans cet exercice (à droite).

Document 1.4 : Document ressource *Raisonnement et démonstration – Seconde GT*. Extrait.

3. On représente le problème dans le registre géométrique : le plus petit triangle isocèle rectangle dont les côtés ont des longueurs entières est d'hypoténuse p et le côté de l'angle droit est de longueur q (triangle ABC de la figure 1).

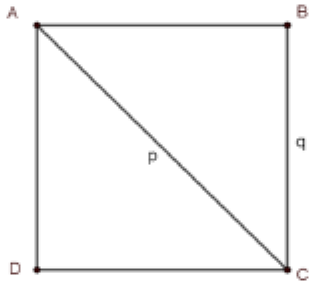


Figure 1

En repliant le côté [BC] sur la diagonale [AC], B coïncide avec F. Alors le triangle AFE est isocèle et rectangle car l'angle en F est droit par symétrie et l'angle en A mesure 45°. Ses dimensions sont inférieures à celles de ABC (Figure 2). Son petit côté a pour longueur $p - q$, qui est entier. Comme $BE = EF = p - q$, son hypoténuse a pour longueur $2q - p$, qui est entier également.

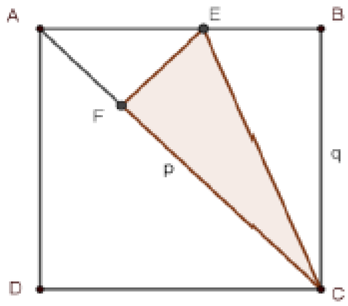


Figure 2

Pistes de différenciation

- Proposer une des trois preuves, au choix, en donnant l'idée. Les élèves consignent dans leur cahier celle qui leur convient le mieux.
- Tous les élèves peuvent s'approprier le raisonnement par l'absurde et se contenter du plan d'une des démonstrations (niveau 1).
- Le niveau 1 (plan) La structure de la démonstration peut se formaliser ainsi, en dégageant le principe du raisonnement par l'absurde :
  - supposer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ;
  - déduire une relation $p^2 = 2q^2$, où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux ;
  - déduire des propriétés de p et q par l'une des trois méthodes ;
  - aboutir à une contradiction.

Fil rouge n°2 : Preuve d'i-décimalité

Document 2.1 : Manuel Maths 2nde, collection Métamaths, Belin Education, 2019. Exercice 62 p.49

On va démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1. On suppose que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, où a et n sont des entiers naturels. Montrer que cette hypothèse équivaut à $3a = 10^n$.
2. Justifier que, quel que soit l'entier naturel n, 10^n n'est pas multiple de 3.
3. Conclure.

Remarque : Cette démonstration est à connaître. Elle utilise un raisonnement par l'absurde (voir p.351).

Document 2.2 : Vivianne Durand-Guerrier, *Travailler les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques*, Actes du colloque CORFEM 2019. ([1])

Deux idées de preuve de l'i-décimalité de 1/3 :

Preuve 2 - On peut prouver également qu'il est un idécimal car on en peut pas trouver une entier qui multiplié à 3 donne 10, ni aucune puissance de 10

Première exploration

$10 = 3x3 + 1$

$10^2 = 3^2x3^2 + 2x3x3 + 1 = 3\ (3^3 + 6) + 1 = 3\ x\ 33 + 1$

$10^3 = 3^2x33^2 + 3x3x33 + 1 = 3x\ 333 + 1$

$10^2 = 10x10 = 10x\ (3x3 + 1) = 30x3 + 10 = 30x3 + 3x3 + 1.$

$10^2 = 3x33 + 1$, $10^3 = 3x333 + 1$

Conjecture : $10^n = 3X333\ldots.3 + 1$ (n fois)

Preuve : par élément générique ou par récurrence.

[1] https://corfem2019.sciencesconf.org/data/Conf1_Durand_Guerrier.pdf

Preuve 3 - Numération de position – preuve par l'absurde

3.1. On suppose que 1/3 est un nombre décimal

On a 1/3 = d d'où 3d = 1. Pas de solution entière à l'équation. d n'est pas un entier. Soit a la décimale non nulle la plus à droite. 3a est un nombre non nul non multiple de 10. La décimale la plus à droite de 3d est non nulle ; 3d est un nombre décimal non entier, donc 3d est différent de 1. On a une contradiction. On rejette l'hypothèse

Document 2.3 : Mathématiques Seconde, collection Barbazo, Hachette Education 2019.

89 **Raisonner**

Xavier veut démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas décimal. Voici ce qu'il écrit :

« Je suppose que $\sqrt{2}$ est décimal, donc je peux l'écrire $\sqrt{2} = \frac{x}{10^n}$ avec x un entier qui n'est pas un multiple de 10. On a donc en élevant au carré : $2 = \frac{x^2}{10^{2n}}$.

- Si $n = 0$, alors $x^2 = 2$, d'où $x = \sqrt{2}$ mais ce n'est pas un entier.
- Sinon x^2 est divisible par 10.

Or x ne l'est pas. Donc x ne se termine pas par 0. Il se termine forcément par un chiffre entre 1 et 9. Ainsi x^2 peut se terminer par :

x se termine par :	x^2 se termine par :
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Donc x^2 ne peut pas être divisible par 10 car il ne termine jamais par 0. D'où une absurdité. »

1. Qu'est-ce qui permet à Xavier d'affirmer « $\sqrt{2} = \frac{x}{10^n}$ avec x un entier qui n'est pas un multiple de 10 » ?
2. L'implication « $x^2 = 2$, d'où $x = \sqrt{2}$ » est-elle correcte ?
3. Pourquoi Xavier a-t-il traité à part le cas $n = 0$?

Fil rouge n°3 : Ordre dans R

Question 1 : En regardant le programme de Seconde, identifier les connaissances nouvelles rencontrées qui reposent sur l'ordre dans **R**.

Question 2 : Recherche de démonstrations (pour nous)

On admet :

- la règle des signes
- l'équivalence entre b > a   et   b-a > 0
- la transitivité de l'ordre (en acte jusque-là)

En déduire :

- Les liens entre opérations et inégalités : cas de l'addition, cas de la multiplication.
- Variations des fonctions de référence : affines, carré (deux démonstrations), cube, inverse, racine carrée.
- Comparaison sur $\mathbf{R}^+$ de x, x^2 et x^3 (deux démonstrations)
- Questions :
    - la fonction inverse est-elle décroissante ?
    - Une fonction qui n'est pas croissante est-elle décroissante ?

Question 3 : Etude d'un dossier documentaire.

$$\boxed{\text{Pour tous } a \text{ et } b \text{ strictement positifs, } \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.}$$

Source : Jopeph Antonios, *Autour d'une propriété de la racine carrée*, écrit professionnel FSTG, INSPE de Paris, année 2020-2021. Extraits.

Cette année scolaire, nous avons choisi de séparer nettement (par plusieurs mois), l'enseignement de la formule $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous réels a et b positifs (ou nuls), étudiée en octobre 2020 et de l'inégalité stricte $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous réels a et b strictement positifs (étudiée en mars 2021).

(…)

Dans des questions flash en début de la séance, nous avons présenté des diapositives avec des questions variées autour de l'activité qui allait être entreprise, du type :

- développement / factorisation d'une expression contenant 1 racine carrée :
$$(\sqrt{x}+3)^2-4$$
- des exemples d'utilisation de fonctions de référence (dont on connaît les variations) pour comparer, sans calcul, les images de 2 nombres a et b donnés : comparer $3\pi-\sqrt{7}$ et $3\sqrt{2}-\sqrt{7}$; comparer $(-3{,}7)^2$ et $(-3{,}07)^2$; comparer $(-3{,}7)^3$ et $(-3{,}07)^3$.
- une question faisant intervenir un raisonnement par l'absurde (reposant en fait sur une contraposée) : soit ABC, un triangle rectangle en A. Montrer qu'il n'est pas isocèle en B.

(Une réflexion a aussi été menée sur le raisonnement par l'absurde tout au long de l'année scolaire, notamment avec les 2 démonstrations classiques au programme : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel).

Nous avons ensuite demandé aux élèves de comparer (avec le symbole = ou < ou >) les nombres suivants :

- $\sqrt{9+16}$ *et* $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ (sans calculatrice).
- $\sqrt{1+1}$ *et* $\sqrt{1}+\sqrt{1}$ (sans calculatrice).
- $\sqrt{3+5}$ *et* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ (avec calculatrice).

et enfin, de conjecturer l'inégalité dont cet écrit professionnel fait l'objet.

Nous avons ensuite invité les élèves à travailler en binômes. Au sein de chaque binôme, les élèves devaient consacrer ensemble 10 minutes à chaque méthode. En cas de blocage, ils pouvaient faire appel au professeur mais seulement au bout de 5 minutes de recherche active.

(…)

III – <u>Énoncé de l'exercice mis en œuvre en classe de 2^nde :</u>

On souhaite dans cet exercice démontrer par 2 méthodes différentes la <u>propriété</u> suivante : $\boxed{\text{pour tous réels a et b strictement positifs, } \sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Soient donc a et b, 2 réels strictement positifs, fixés jusqu'à la fin de l'exercice.

1°) <u>Méthode algébrique :</u>

On note *y* = $(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

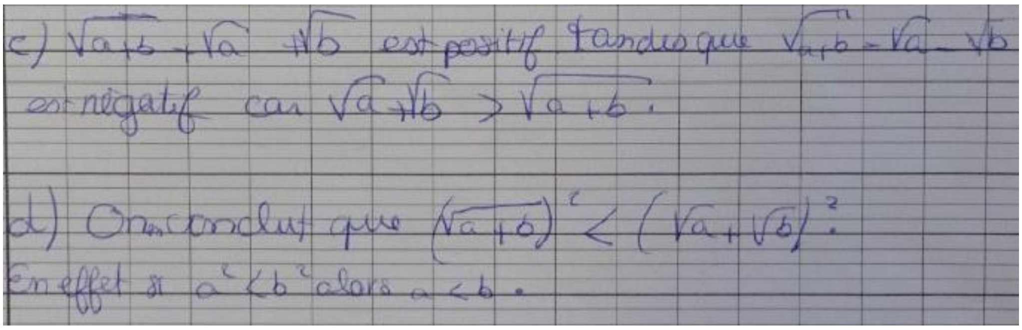
a) Développer l'expression *y* et en déduire son signe.
b) Factoriser l'expression *y*.
c) Déterminer le signe de $\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ puis, à l'aide des deux questions précédentes, en déduire le signe de $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
d) Conclure.

2°) <u>Méthode analytique :</u>

a) Comparer $(\sqrt{a+b})^2$ et $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
b) En utilisant le sens de variation de la fonction carré sur IR+, expliquer pourquoi ici, on ne peut pas avoir : $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
<u>Aide :</u> si c'était le cas, que pourrait-on en déduire ? Serait-ce alors cohérent avec la question précédente ?
c) Conclure.

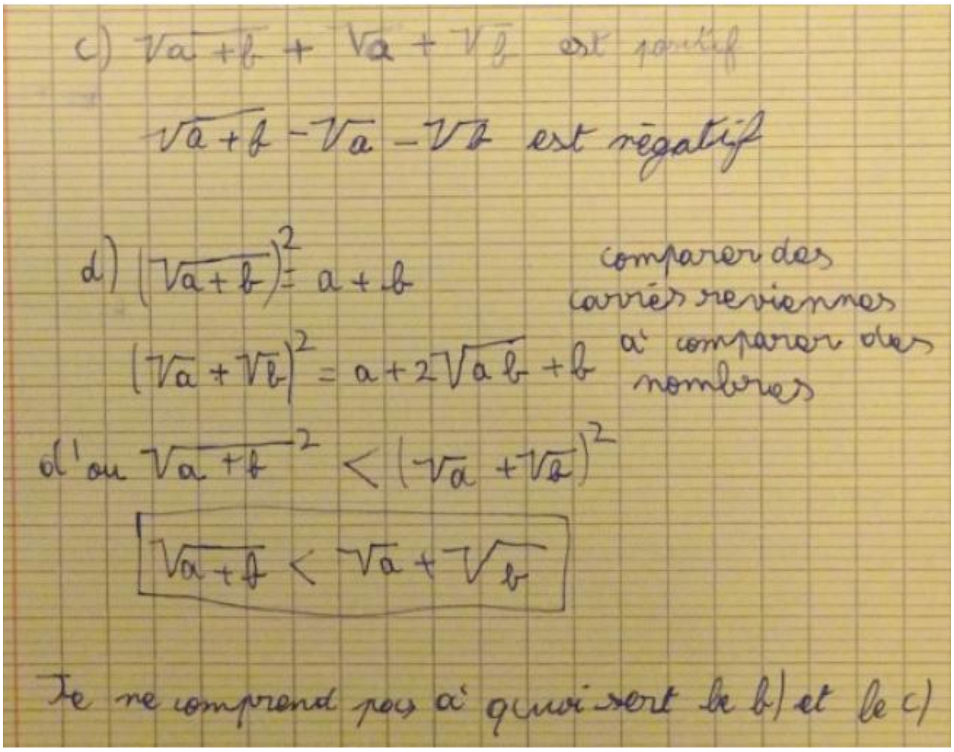
(…)

Exemple de réponse pour la « méthode algébrique » : deux exemples



c) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est positif tandis que $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est négatif car $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

d) On conclut que $(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
En effet si $a^2<b^2$ alors $a<b$.



c) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est positif

$\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est négatif

d) $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

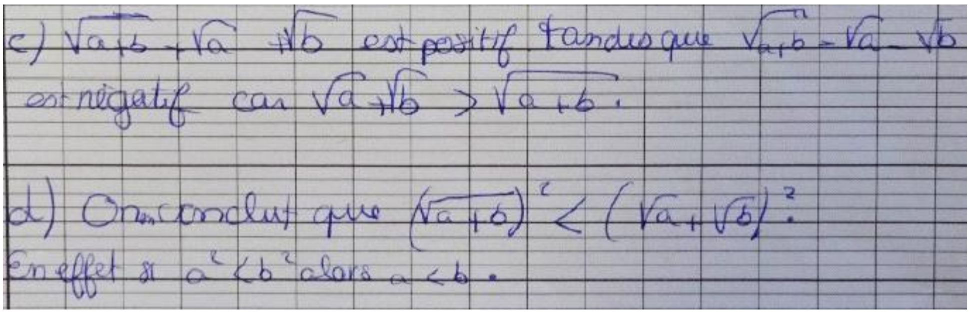
comparer des carrés reviennes à comparer des nombres

d'ou $\sqrt{a+b}^2 < (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\boxed{\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Je ne comprend pas à quoi sert le b) et le c)

Exemple de réponse, « méthode analytique » :



c) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est positif tandis que $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est négatif car $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

d) On conclut que $(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
En effet si $a^2<b^2$ alors $a<b$.

Complément :

Au V$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère, le philosophe néo-platonicien Proclus de Lycie rapportait certaines méthodes pour obtenir des triangles « rectangles en nombres », c'est-à-dire des triangles rectangles dont les longueurs des côtés ont des mesures entières. Voici un extrait :

> (…) certaines méthodes pour découvrir de tels triangles nous ont été transmises, et l'on fait remonter l'une à Platon, l'autre à Pythagore. La méthode pythagoricienne part de nombres impairs, pose le nombre impair donné comme étant le plus petit des côtés situés autour de l'angle droit, et, après avoir pris le carré de ce nombre et en avoir retranché une unité, pose la moitié du nombre restant comme étant le plus grand des côtés situés autour de l'angle droit, et forme enfin le côté restant, qui sous-tend, après avoir ajouté aussi une unité à ce nombre. Ainsi, par exemple, si, après avoir pris 3, l'avoir carré et en avoir retranché une unité, l'on prend 4, moitié de 8, et, si on lui ajoute de nouveau une unité, on forme 5 et l'on trouve le triangle rectangle ayant un côté de trois unités, un autre de quatre unités et un autre de cinq unités. D'autre part, la méthode platonicienne procède en partant de nombres pairs. En effet, prenant le nombre donné pair, elle le pose comme étant un des côtés situés autour de l'angle droit, le divise en deux parties égales, carre la moitié, puis forme le côté qui sous-tend l'angle droit [côté que nous nommons l'hypoténuse] en ajoutant une unité à ce carré et forme l'autre côté situé autour de l'angle droit en retranchant une unité de ce carré. Ainsi, ayant pris le nombre 4, ayant carré sa moitié 2 et formé 4, si l'on retranche une unité, on forme 3, et, en ajoutant une unité, on forme 5 et obtient le même triangle produit par l'autre méthode ; car le carré de ce dernier nombre est égal à la somme des carrés de 3 et de 4.

Source : Proclus de Lycie *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide* Traduits du grec par Paul Ver Eecke (1948) Réédition IREM de Lille. Extrait du commentaire sur la proposition 47.

Complément : Le format « puzzle »

On suppose que n est impair.
Soit n un entier naturel.
Puisque n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $n \in \mathbb{N}$, $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Donc il existe $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$. C'est-à-dire que n^2 est impair.
Donc n est pair.
On a donc montré que pour tout entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair.
Montrons que n^2 est impair.
On suppose que n^2 est pair.
Par contraposée, on a ainsi également montré que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.
Raisonnons par l'absurde et supposons que n est impair.
Soit n un entier naturel.
On a ainsi montré que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.
Puisque n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $n \in \mathbb{N}$, $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Donc il existe $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$. C'est-à-dire que n^2 est impair.
Montrons que n est pair.
On a donc une contradiction, puisque par hypothèse n^2 est pair.

On considère deux entiers a et b multiples de 7.
a est un multiple de 7
b est un multiple de 7
On en déduit que a+b est un multiple de 7.
$a+b = 7 \times k + 7 \times k' = 7(k+k')$ où $k+k' \in \mathbb{N}$.
donc il existe un entier k' tel que $b = 7 \times k'$.
donc il existe un entier k tel que $a = 7 \times k$.