

Exercices d'arithmétique

1 Raisonnement direct par *modus tollens*

$(A \Rightarrow B) \text{ et } \neg B$
 $\Rightarrow \neg A$

Exercice Col1

Démontrer que : $\sqrt{2} \neq 1,414$.

Exercice Sec1

Démontrer que la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ n'admet pas de points à coordonnées entières.

Exercice Exp1

Démontrer que la somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est jamais un carré d'entier.

2 Raisonnement par disjonction des cas

Exercice Col2

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice Sec2

Démontrer que pour tout entier naturel n , $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Exercice Exp2

Démontrer que pour tout couple $(a ; b)$ d'entiers naturels, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b .

3 Raisonnement par contraposition

Exercice Col3

Démontrer que pour tout entier naturel n , si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice Col3bis

Démontrer que pour tout entier naturel, si $n^2 - 1$ est divisible par 8, alors n est impair.

Exercice Sec3

Démontrer que tous entiers naturels $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, si $a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9 = 90$ alors il existe au-moins trois entiers dans $\{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_8 ; a_9\}$ dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice Exp3

Démontrer que pour tout $(x ; y ; z) \in \mathbb{N}^3$, si 9 divise $x^3 + y^3 + z^3$ alors 3 divise x ou 3 divise y ou 3 divise z .

4 Raisonnement par équivalence

Exercice Col4

Soient a et b deux nombres entiers naturel inférieurs ou égaux à 9. On considère le nombre N écrit en base 10 par $\overline{3a7b}$.

Déterminer a et b pour que N soit divisible par 3 et par 5.

Exercice Sec4

Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{3n+2}{n+4}$ soit entier.

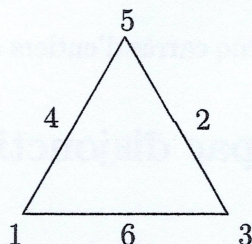
Exercice Exp4

Résoudre l'équation dans \mathbb{Z}^2 : $x^2 - y^2 = 7$.

5 Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice Col5

Les entiers de 1 à 6 sont placés aux sommets et sur les côtés d'un triangle. La figure ci-dessous donne un exemple de placement des entiers.



On s'intéresse au placement des entiers tel que les sommes des trois entiers de chaque côté soient égales.

Déterminer, s'il existe, le placement donnant la somme minimale.

Même question en considérant un carré.

Exercice Sec5

Déterminer tous les triplets $(a ; b ; c)$ d'entiers naturels non nuls tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Exercice Exp5

Déterminer les entiers naturels N tels que les 10 chiffres de 0 à 9 soient nécessaires une fois et une seule pour écrire N^3 et N^4 .

6 Raisonnement par l'absurde

Exercice Col6

Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice Col6bis

Démontrer que 1111 n'est pas un carré parfait.

Exercice Sec6

Démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Démontrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses trois sommets à coordonnées entières.

Exercice Exp6

Démontrer que $\cos 1^\circ$ est irrationnel.

7 Raisonement par récurrence

1. Récurrence simple

Exercice Exp7

Démontrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$ admet au moins une solution en nombre entiers positifs tous distincts.

Exercice Exp7bis

Démontrer que pour tout n entier naturel, $4^{2n+2} - 15n - 16$ est divisible par 225.

2. Récurrence multiple

Exercice Exp8

Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier.

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

3. Récurrence forte

Exercice Exp9

Tout entier naturel $n \geq 2$ est soit premier, soit peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

4. Descente infinie de Fermat

Exercice Exp10

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice Exp10bis

Démontrer que l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a pas de solution dans \mathbb{N}^3 autre que $(0 ; 0 ; 0)$.

Résoudre l'exercice suivant en dégagant à chaque étape le raisonnement mathématique utilisé.

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple, 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4 ; 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4 ; 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres puis un nombre *digisible* à quatre chiffres.

2. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

- a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
- b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
- c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
- d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

3. Soit n un entier *digisible* quelconque.

- a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
- b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n .
- c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

Dominique BERNARD

Denis GARDES