— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$. p. ex. « *si a^2 est pair alors a est pair* »

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$. p. ex. « *si a^2 est pair alors a est pair* »

Tactique : directe

| *Supposons que a^2 est pair*
| … on argumente
| *donc a est pair*

Donc : si a^2 est pair alors a est pair.

| On suppose A temporairement
| …
| On obtient B.

On a *si A alors B.*

| $[A]$ hypothèse temporaire
| …
| B

$A \Rightarrow B$

La barre verticale délimite une *sous*-démonstration, durant laquelle on a une hypothèse supplémentaire.

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « *si* a^2 *est pair alors* a *est pair* »

Tactique : contraposée

Supposons que a *n'est pas pair*
… on argumente
donc a^2 *n'est pas pair*

Donc : si a *n'est pas pair alors* a^2 *n'est pas pair.*
Donc : si a^2 *est pair alors* a *est pair.*

On suppose *non* B
…
On obtient *non* A.

On a *si non* B *alors non* A.
On a *si* A *alors* B.

[*non* B]
…
non A

non $B \Rightarrow$ *non* A
$A \Rightarrow B$

On veut démontrer $A \Rightarrow B$. p. ex. « *si* a^2 *est pair alors* a *est pair* »

Supposons que a^2 *est pair* on tente la tactique directe
? ? ? mais on est coincé

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$. p. ex. « *si a^2 est pair alors a est pair* »

Tactique : absurde

> *Supposons que a^2 est pair*
>> *Supposons que a n'est pas pair* on essaie par l'absurde (gain : une hypothèse en plus)
>> … on argumente
>> Ceci est impossible.
>
> *Supposer que a n'est pas pair conduit à une contradiction, donc a est pair*

Donc : si a^2 est pair alors a est pair.

> On suppose A
>> On suppose *non* B
>> …
>> On obtient une contradiction.
>
> On a B

On a *si* A *alors* B.

> $[A]$
>> $[\textit{non}\, B]$
>> …
>> contradiction
>
> B

$A \Rightarrow B$

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \dots \\ & B \\ \multicolumn{2}{l}{A \Rightarrow B} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & [\textit{non}\, B] \\ & \dots \\ & \textit{non}\, A \\ \multicolumn{2}{l}{\textit{non}\, B \Rightarrow \textit{non}\, A} \\ \multicolumn{2}{l}{A \Rightarrow B} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \begin{array}{l|l} & [\textit{non}\, B] \\ & \dots \\ & \text{contradiction} \end{array} \\ & B \\ \multicolumn{2}{l}{A \Rightarrow B} \end{array}$$

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \dots \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & [\text{non } B] \\ & \dots \\ & \text{non } A \\ \hline \text{non } B \Rightarrow \text{non } A & \\ A \Rightarrow B & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad \begin{array}{|l} [\text{non } B] \\ \dots \\ \text{contradiction} \end{array} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

Quel type de contradiction ?

– étrangère aux hypothèses ex. $0 = 1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad \begin{array}{|l} [\text{non } B] \\ \dots \\ \boldsymbol{C} \\ \dots \\ \textbf{non } \boldsymbol{C} \end{array} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \ldots \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [\textit{non } B] \\ & \ldots \\ & \textit{non } A \\ \hline \textit{non } B \Rightarrow \textit{non } A & \\ A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad [\textit{non } B] \\ & \quad \ldots \\ & \quad \text{contradiction} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

Quel type de contradiction ?

– étrangère aux hypothèses ex. $0 = 1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$

– *non* A : a-t-on vraiment utilisé A dans la preuve ?

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad [\textit{non } B] \\ & \quad \ldots \\ & \quad \boldsymbol{C} \\ & \quad \ldots \\ & \quad \textit{\textbf{non C}} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & \boldsymbol{[A]} \\ & \quad [\textit{non } B] \\ & \quad \ldots \text{ on argumente en utilisant } A \\ & \quad \textit{\textbf{non A}} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & \boldsymbol{[A]} \\ & \quad [\textit{non } B] \\ & \quad \ldots \text{ on argumente sans utiliser } A \\ & \quad \textit{\textbf{non A}} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \ldots \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [\text{non } B] \\ & \ldots \\ & \text{non } A \\ \hline \text{non } B \Rightarrow \text{non } A & \\ A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad \begin{array}{|l} [\text{non } B] \\ \ldots \\ \text{contradiction} \end{array} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

Quel type de contradiction ?

– étrangère aux hypothèses ex. $0 = 1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$

– *non* A : a-t-on vraiment utilisé A dans la preuve ?

$$\begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad \begin{array}{|l} [\text{non } B] \\ \ldots \\ \mathbf{C} \\ \ldots \\ \textbf{non } \mathbf{C} \end{array} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [\mathbf{A}] \\ & \quad \begin{array}{|l} [\text{non } B] \\ \ldots \ \text{utilise } A \\ \textbf{non } \mathbf{A} \end{array} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & [A] \\ & \quad \boxed{\begin{array}{|l} [\textbf{non } \mathbf{B}] \\ \ldots \ A \text{ pas utilisée} \\ \textbf{non } \mathbf{A} \end{array}} \\ & B \\ \hline A \Rightarrow B & \end{array}$$

On a une preuve de la contraposée.

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,
i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,
i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Reformulons l'hypothèse et mettons là en valeur :

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,
i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Reformulons l'hypothèse et mettons là en valeur :

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

Mais on peut réorganiser cette preuve :

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$
Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.
Mais on peut réorganiser cette preuve :

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$**
Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.
Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.
Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**
Donc p et q de l'hypothèse n'existent pas.
Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$
Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.
Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.
Mais on peut réorganiser cette preuve :

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$**
Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.
Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.
Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**
Donc p et q de l'hypothèse n'existent pas.
Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Dans cette version, l'égalité $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ne sert qu'en fin d'argumentation pour obtenir la contradiction. Et si on s'en passait ?

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$**

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**

Donc p **et** q **de l'hypothèse n'existent pas**.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux ~~**tels que** $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$~~

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. ~~**Contradiction.**~~

Donc ~~**p et q de l'hypothèse n'existent pas.**~~

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.
Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc **pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.**

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.
Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc **pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.**

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Commentaires

- On peut se dispenser de supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel.
- On change de point de vue, on se concentre sur les rationnels, pas sur $\sqrt{2}$.
- On obtient une affirmation, une propriété concernant les rationnels (chacun d'eux est différent de $\sqrt{2}$), et une description d'une situation qui a lieu (plutôt que d'une situation qui ne se produit pas).
- Accessoirement, on a une belle démonstration par cas. (variante page suivante)

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Deux démonstrations sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.
Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Variante. où le choix des cas est décisif

Soient p et q entiers premiers entre eux
Alors p^2 et q^2 sont aussi premiers entre eux (pas de facteurs premiers communs).

Ou bien q^2 ne divise pas p^2. Dans ce cas $\frac{p^2}{q^2}$ n'est pas entier donc n'est pas 2.

Ou bien q^2 divise p^2 mais ils sont premiers entre eux donc $q^2 = 1$.
Dans ce cas $\frac{p^2}{q^2} = p^2$ et on sait qu'aucun entier n'a 2 pour carré.
(Ou on le vérifie en testant $p = 0$, $p = 1$ et $p \geqslant 2$).

Dans les deux cas, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.

Donc pour tous entiers p, q premiers entre eux, ...

— Pas d'absurde 2 : 0 n'a pas d'inverse —

La démonstration **classique**

Supposons que 0 a un inverse dans $\mathbb{R}$.
i.e. il existe un réel a qui est l'inverse de 0.
Alors $a \times 0 = 1$, ce qui est absurde puisque $a \times 0 = 0$.
Contradiction
Donc 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

Démonstration directe

Soit a un réel.
On a $a \times 0 = 0 \neq 1$.
Donc a n'est pas l'inverse de 0.
Donc aucun réel n'est l'inverse de 0. *« Tout réel n'est pas l'inverse de* 0 *»* n'est pas français
Donc 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

Commentaires

- Inutile de supposer que 0 a un inverse.
- Changement de point de vue, on regarde les réels, plutôt que 0.
- On obtient une propriété des réels, et on parle de ce qui advient et pas de ce qui n'advient pas.

— Pas d'absurde : réflexions —

Qu'est-ce qui nous pousse à procéder par l'absurde ?
– la tradition et l'habitude,
– et la formulation compacte en français qui rend difficile d'imaginer autre chose :
alors qu'en dépliant la définition de « *être rationnel* » ou « *avoir un inverse* », on verrait qu'il s'agit de nier une quantification existentielle, et l'idée viendrait de passer à l'universelle.

On a un objet spécial $\boldsymbol{a}$, $\sqrt{2}$ ou 0
On veut prouver qu'aucun e dans E n'a la propriété $\boldsymbol{P(a,e)}$. *"$e = a$", "e inverse de a"*

- Classiquement, on suppose que e_0 a la propriété $P(a, e_0)$, dans le but d'obtenir une contradiction.
  Autrement dit, on cherche à prouver **non $\exists x$ $P(a,x)$**.
  i.e. « *il est impossible qu'un e ait la propriété $P(a,e)$* ».

- Version *sans absurde*, on considère un e quelconque et vise à montrer qu'il n'a pas la propriété $P(a,e)$.
  Autrement dit, on cherche à prouver **$\forall x$ non $P(a,x)$**.
  i.e. « *aucun e n'a la propriété $P(a,e)$* ».

D'une version à l'autre, l'argument de fond est le même. En changeant de point de vue, il apparaît comme une qualité, avérée (et non comme une conséquence absurde d'une hypothèse contradictoire) non pas de a mais des éléments de E.
C'est probablement plus facile à comprendre pour des novices, et plus explicatif pour tout le monde.

— Le rôle ambigu de *avec* —

Une démonstration écrite par une (bonne) élève :

L'entier a est multiple de 7 donc $a = 7k$ **avec** $k \in \mathbb{Z}$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ **avec** $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ **avec** $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

La même démonstration avec « *où* »

L'entier a est multiple de 7 donc $a = 7k$ **où** $k \in \mathbb{Z}$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ **où** $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ **où** $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. **(1)**

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. **(1)**

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l.

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \ldots$: **on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas**.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. **(1)**

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. **(1)**

Donc $a + b = 7(k + l)$ ~~avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l.

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: **on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas**.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc $\cancel{a = 7k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.}$
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. **(1)**

L'entier b est multiple de 7 donc $\cancel{b = 7l \quad \text{avec } l \in \mathbb{Z}.}$
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. **(1)**

Donc $a + b = 7(k + l)$ $\cancel{\text{avec } (k + l) \in \mathbb{Z}.}$ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l.

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \ldots$: **on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas**.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. **(1)**

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. **(1)**

Donc $a + b = 7(k + l)$ ~~avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a + b = 7m$. ~~$\exists\, m = k + l$ entier tq ...~~

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l.

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \ldots$: **on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas**.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. **(1)**

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. **(1)**

Donc $a + b = 7(k + l)$ ~~avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a + b = 7m$. **(2)**

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l.

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: **on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas**.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

(2) Nous avons construit l'entier m.

Il nous permet d'établir une propriété $\exists \dots$: **on le construit, donc on sait qu'il existe.**

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

- « *avec* » et « *où* » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists\ldots$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists\ldots$ pour laquelle nous avons construit le témoin.

- « *avec* » et « *où* » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists\ldots$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists\ldots$ pour laquelle nous avons construit le témoin.

- Mais pire :

  Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

- « *avec* » et « *où* » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists \ldots$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists \ldots$ pour laquelle nous avons construit le témoin.

- Mais pire :

  Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

  Ce sont les $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ **avec** $k \in \mathbb{Z}$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec k dans $\mathbb{Z}$ où k parcourt $\mathbb{Z}$

— Le rôle ambigu de « *avec* » —

- « *avec* » et « *où* » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists\ldots$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists\ldots$ pour laquelle nous avons construit le témoin.

- Mais pire :

Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

Ce sont les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **avec** $k \in \mathbb{Z}$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec k dans $\mathbb{Z}$ où k parcourt $\mathbb{Z}$

Le rôle de « *avec* » est de présenter k comme générique : *cela vaut pour tous les* k.

Ici « *avec* » occulte une quantification universelle.

Alternatives :   « ... *pour* k *variant dans* $\mathbb{Z}$ » $\{\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$