

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « *si a^2 est pair alors a est pair* »

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « si a^2 est pair alors a est pair »

Tactique : directe

| Supposons que a^2 est pair

| ... on argumente

| donc a est pair

Donc : si a^2 est pair alors a est pair.

| On suppose A temporairement

| ...

| On obtient B .

On a si A alors B .

| $[A]$ hypothèse temporaire

| ...

| B

$A \Rightarrow B$

La barre verticale délimite une sous-démonstration, durant laquelle on a une hypothèse supplémentaire.

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « si a^2 est pair alors a est pair »

Tactique : contraposée

Supposons que a n'est pas pair

... on argumente

donc a^2 n'est pas pair

Donc : si a n'est pas pair alors a^2 n'est pas pair.

Donc : si a^2 est pair alors a est pair.

On suppose $\text{non } B$

...

On obtient $\text{non } A$.

On a si $\text{non } B$ alors $\text{non } A$.

On a si A alors B .

$[\text{non } B]$

...

$\text{non } A$

$\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$

$A \Rightarrow B$

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « si a^2 est pair alors a est pair »

| *Supposons que a^2 est pair* on tente la tactique directe
| ??? mais on est coincé

— Absurde et contraposée —

On veut démontrer $A \Rightarrow B$.

p. ex. « si a^2 est pair alors a est pair »

Tactique : absurde

Supposons que a^2 est pair

Supposons que a n'est pas pair on essaie par l'absurde (gain : une hypothèse en plus)

... on argumente

Ceci est impossible.

Supposer que a n'est pas pair conduit à une contradiction, donc a est pair

Donc : si a^2 est pair alors a est pair.

On suppose A

On suppose $\text{non } B$

...

On obtient une contradiction.

On a B

On a si A alors B .

[A]
[non B]
...
contradiction
B
 $A \Rightarrow B$

— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$ | [A]
 | ...
 | B

$A \Rightarrow B$ | [non B]
 | ...
 | non A
 $non B \Rightarrow non A$

$A \Rightarrow B$ | [A]
 | B | [non B]
 | ...
 | contradiction

— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$ | [A]
| ...
| B

$non B \Rightarrow non A$ | [non B]
| ...
| non A
 $A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$ | [A]
| B | [non B]
| ...
| contradiction

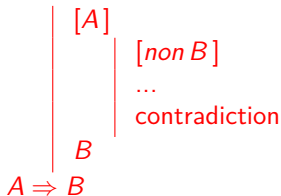
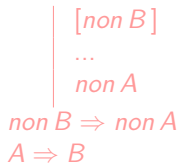
Quel type de contradiction ?

– étrangère aux hypothèses ex. $0 = 1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$

$A \Rightarrow B$ | [A]
| B | [non B]
| ...
| **C**
| ...
| **non C**

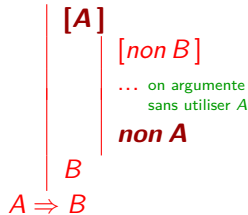
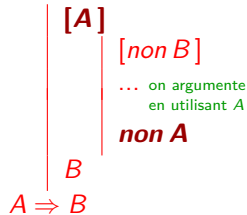
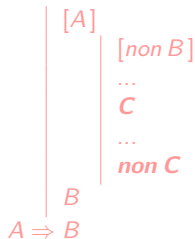
— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$



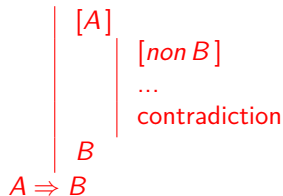
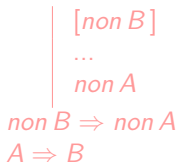
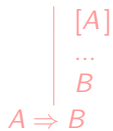
Quel type de contradiction ?

- étrangère aux hypothèses ex. $0=1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$
- $non A$: a-t-on vraiment utilisé A dans la preuve ?



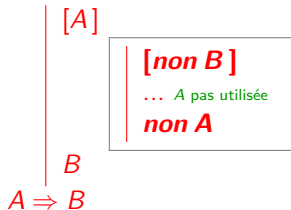
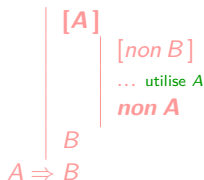
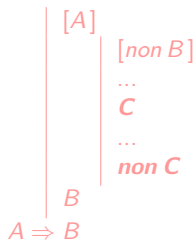
— Absurde et contraposée —

Trois tactiques pour démontrer $A \Rightarrow B$



Quel type de contradiction ?

- étrangère aux hypothèses ex. $0 = 1$ $a \in \emptyset$ $x^2 < 0$
- $non A$: a-t-on vraiment utilisé A dans la preuve ?



On a une preuve

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,

i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,

i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Reformulons l'hypothèse et mettons là en valeur :

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel,

i.e. il existe p, q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Reformulons l'hypothèse et mettons là en valeur :

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

Mais on peut réorganiser cette preuve :

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

Mais on peut réorganiser cette preuve :

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que** $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Ou bien p est **impair** et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est **pair**, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**

Donc p et q de l'hypothèse n'existent pas.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

La démonstration **classique**

Soient p et q entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair et p aussi. Et q est impair.

Mais alors p^2 est multiple de 4 et pas $2q^2$. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Il semble que l'hypothèse $2p^2 = q^2$ est le point de départ, le moteur, de l'argument.

Mais on peut réorganiser cette preuve :

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que** $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Ou bien p est **impair** et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est **pair**, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**

Donc p et q de l'hypothèse n'existent pas.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Dans cette version, l'égalité $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ne sert qu'en fin d'argumentation pour obtenir la contradiction. Et si on s'en passait ?

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux **tels que** $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**

Donc p et q de l'hypothèse n'existent pas.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux ~~tels que~~ $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$. **Contradiction.**

Donc ~~p et q de l'hypothèse n'existent pas.~~

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc **pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.**

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Une démonstration sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc **pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.**

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Commentaires

- On peut se dispenser de supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel.
- On change de point de vue, on se concentre sur les rationnels, pas sur $\sqrt{2}$.
- On obtient une affirmation, une propriété concernant les rationnels (chacun d'eux est différent de $\sqrt{2}$), et une description d'une situation qui a lieu (plutôt que d'une situation qui ne se produit pas).
- Accessoirement, on a une belle démonstration par cas. (variante page suivante)

— Pas d'absurde 1 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel —

Deux démonstrations sans absurdité

Soient p et q entiers premiers entre eux

Ou bien p est impair et alors p^2 aussi et $p^2 \neq 2q^2$.

Ou bien p est pair, et alors q est impair ; et donc p^2 est multiple de 4 mais pas $2q^2$. Donc $p^2 \neq 2q^2$.

Dans les deux cas, $p^2 \neq 2q^2$.

Donc pour tous entiers p, q premiers entre eux, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Variante. où le choix des cas est décisif

Soient p et q entiers premiers entre eux

Alors p^2 et q^2 sont aussi premiers entre eux (pas de facteurs premiers communs).

Ou bien q^2 ne divise pas p^2 . Dans ce cas $\frac{p^2}{q^2}$ n'est pas entier donc n'est pas 2.

Ou bien q^2 divise p^2 mais ils sont premiers entre eux donc $q^2 = 1$.

Dans ce cas $\frac{p^2}{q^2} = p^2$ et on sait qu'aucun entier n'a 2 pour carré.

(Ou on le vérifie en testant $p = 0, p = 1$ et $p \geq 2$).

Dans les deux cas, $\frac{p^2}{q^2} \neq 2$.

Donc pour tous entiers p, q premiers entre eux, ...

— Pas d'absurde 2 : 0 n'a pas d'inverse —

La démonstration **classique**

Supposons que 0 a un inverse dans \mathbf{R} .

i.e. il existe un réel a qui est l'inverse de 0.

Alors $a \times 0 = 1$, ce qui est absurde puisque $a \times 0 = 0$.

Contradiction

Donc 0 n'a pas d'inverse dans \mathbf{R} .

Démonstration directe

Soit a un réel.

On a $a \times 0 = 0 \neq 1$.

Donc a n'est pas l'inverse de 0.

Donc aucun réel n'est l'inverse de 0. *« Tout réel n'est pas l'inverse de 0 » n'est pas français*

Donc 0 n'a pas d'inverse dans \mathbf{R} .

Commentaires

- Inutile de supposer que 0 a un inverse.
- Changement de point de vue, on regarde les réels, plutôt que 0.
- On obtient une propriété des réels, et on parle de ce qui advient et pas de ce qui n'advient pas.

— Pas d'absurde : réflexions —

Qu'est-ce qui nous pousse à procéder par l'absurde ?

- la tradition et l'habitude,
- et la formulation compacte en français qui rend difficile d'imaginer autre chose :
alors qu'en dépliant la définition de « être rationnel » ou « avoir un inverse », on verrait qu'il s'agit de nier une quantification existentielle, et l'idée viendrait de passer à l'universelle.

On a un objet spécial a , $\sqrt{2}$ ou 0

On veut prouver qu'aucun e dans E n'a la propriété $P(a, e)$. “ $e = a$ ”, “ e inverse de a ”

- Classiquement, on suppose que e_0 a la propriété $P(a, e_0)$,
dans le but d'obtenir une contradiction.
Autrement dit, on cherche à prouver **$\text{non } \exists x P(a, x)$** .
i.e. « *il est impossible qu'un e ait la propriété $P(a, e)$* ».
- Version *sans absurde*, on considère un e quelconque
et vise à montrer qu'il n'a pas la propriété $P(a, e)$.
Autrement dit, on cherche à prouver **$\forall x \text{ non } P(a, x)$** .
i.e. « *aucun e n'a la propriété $P(a, e)$* ».

D'une version à l'autre, l'argument de fond est le même. En changeant de point de vue, il apparaît comme une qualité, avérée (et non comme une conséquence absurde d'une hypothèse contradictoire) non pas de a mais des éléments de E .

C'est probablement plus facile à comprendre pour des novices, et plus explicatif pour tout le monde.

— Le rôle ambigu de *avec* —

Une démonstration écrite par une (bonne) élève :

L'entier a est multiple de 7 donc $a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

— Le rôle ambigu de « avec » —

La même démonstration avec « où »

L'entier a est multiple de 7 donc $a = 7k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ où $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ où $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$.

L'entier b est multiple de 7 donc $b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. (1)

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. (1)

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec $(k + l) \in \mathbb{Z}$.

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l .

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas.
Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$~~ avec $k \in \mathbb{Z}$.
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. (1)

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$~~ avec $l \in \mathbb{Z}$.
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. (1)

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec ~~$(k + l) \in \mathbb{Z}$~~ .

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l .

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas.
Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. (1)

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. (1)

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec ~~$(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l .

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas.
Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. (1)

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. (1)

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec ~~$(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a + b = 7m$. ~~$\exists m = k + l$ entier tq ...~~

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l .

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas.

Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

— Le rôle ambigu de « avec » —

L'entier a est multiple de 7 donc ~~$a = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 7k$. (1)

L'entier b est multiple de 7 donc ~~$b = 7l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.~~
il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 7l$. (1)

Donc $a + b = 7(k + l)$ avec ~~$(k + l) \in \mathbb{Z}$.~~ et $(k + l) \in \mathbb{Z}$

Donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a + b = 7m$. (2)

Donc $a + b$ est multiple de 7.

(1) Nous ne choisissons pas les entiers k et l .

Obtenus en exploitant des ptés $\exists \dots$: on sait qu'ils existent, on nous les donne, on ne les contrôle pas.
Ils nous sont imposés (*mise à l'épreuve*).

(2) Nous avons construit l'entier m .

Il nous permet d'établir une propriété $\exists \dots$: on le construit, donc on sait qu'il existe.

— Le rôle ambigu de « avec » —

- « avec » et « où » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists...$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists...$ pour laquelle nous avons construit le témoin.

— Le rôle ambigu de « avec » —

- « avec » et « où » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists...$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists...$ pour laquelle nous avons construit le témoin.
- Mais pire :
 - Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

— Le rôle ambigu de « avec » —

- « avec » et « où » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists...$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists...$ pour laquelle nous avons construit le témoin.
- Mais pire :

Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

Ce sont les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec k dans \mathbb{Z} où k parcourt \mathbb{Z}

— Le rôle ambigu de « avec » —

- « avec » et « où » nous font confondre (1) l'utilisation d'une propriété $\exists...$, qui nous donne un témoin, et (2) la démonstration d'une propriété $\exists...$ pour laquelle nous avons construit le témoin.
- Mais pire :

Quelles sont les solutions réelles de $\sin(x) = 1$?

Ce sont les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec k dans \mathbb{Z} où k parcourt \mathbb{Z}

Le rôle de « avec » est de présenter k comme générique : cela vaut pour tous les k .

Ici « avec » occulte une quantification universelle.

Alternatives : « ... pour k variant dans \mathbb{Z} » $\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$