Des démonstrations de géométrie euclidienne en Seconde ?

Extrait du programme de 2^{nde} (2019) :

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- consolider les notions sur les configurations géométriques abordées au collège et prolonger leur étude ;
- introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique ;
- poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines. En particulier, introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation, en explicitant le cas des équations de droites.

Extrait du document ressource *Raisonnement et démonstration (2^{nde})*

Raisonner pour chercher, raisonner pour démontrer

Dans une phase de recherche, le raisonnement inclut des formes heuristiques telles que l'essai-erreur, la recherche de conjectures par :

- raisonnement inductif : conjecturer une proposition générale à partir de la vérification de cas particuliers ;
- raisonnement abductif : sachant que A implique B et voulant démontrer B, on peut être amené à conjecturer A.

Mentionnons aussi la preuve sur un exemple générique (démonstration sur un cas susceptible d'être adaptée au cas général), la « preuve sans mots » (justification sur une figure peu ou non commentée).

Dans une phase de démonstration, on utilise le raisonnement déductif qui peut se présenter sous diverses formes : raisonnement par implication, par équivalence, par l'absurde, par disjonction de cas, etc. La mise en forme de la démonstration s'appuie sur les compétences « raisonner » et « communiquer ».

(…)

Il importe également :

- de préciser le contrat vis-à-vis des démonstrations du programme, qui n'ont pas vocation à être évaluées ; toutefois, les formes de raisonnement mises en jeu, après une certaine pratique, peuvent être mobilisées dans d'autres situations simples, en formation ou en évaluation ;
- de proposer des scénarios variés prenant en compte la diversité des élèves et d'adapter les preuves à ceux ne maîtrisant pas les outils antérieurement étudiés, tels l'usage du calcul littéral ;
- d'éviter d'encombrer de nouvelles démonstrations assez longues par d'autres antérieurement étudiées, que l'on peut alors considérer comme « évidentes » ;
- d'éviter une technicité excessive, notamment dans l'usage du calcul littéral.

(…)

Des démonstrations différentes

Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours.

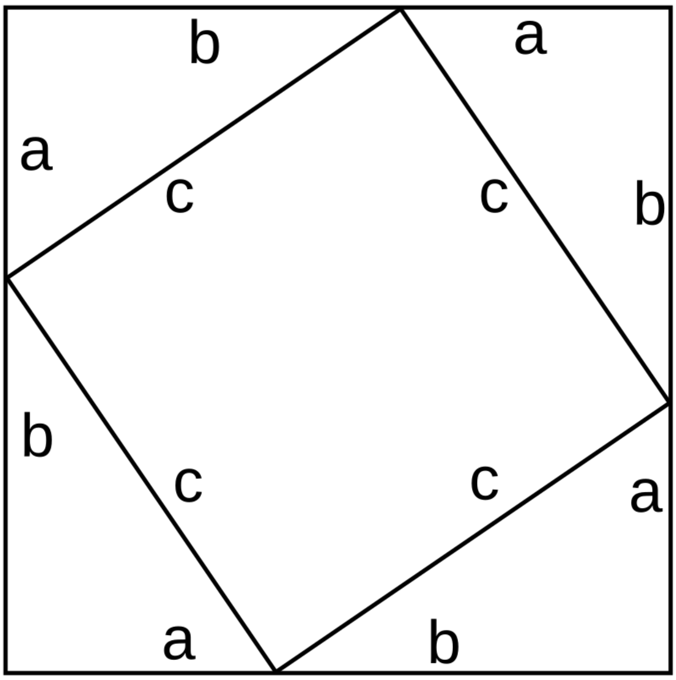
Des démonstrations en plusieurs niveaux de détail

Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :

- niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
- niveau 2 : démontrer chaque étape du plan (avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun) ;
- niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive.

Quelques démonstrations du théorème de Pythagore

Démonstration n° 1 ([1]) : Idée de la démonstration : calculer l'aire du grand carré de deux manières différentes



[1] Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Pythagore (accès le 14/1/2025)

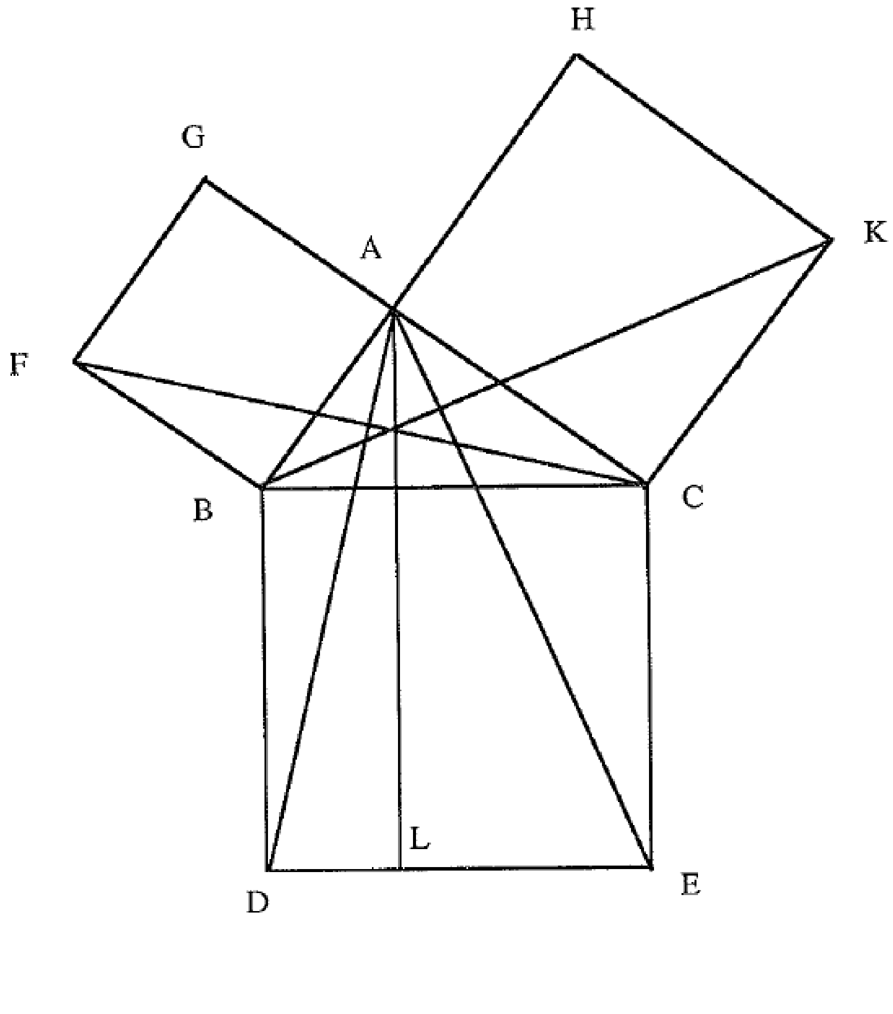
Démonstration n°2 : Euclide, *Les Eléments*, livre I proposition 47[2]

47

Dans les triangles rectangles, le carré sur[178] le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

-

Soit le triangle rectangle ABC ayant l'angle sous BAC droit. Je dis que le carré sur BC est égal aux carrés sur BA, AC.



[2] Euclide (1990). *Les* Eléments, volume I : Livres I-IV (traduction et commentaires B. Vitrac). p.282-284

En effet d'une part que le carré BDEC soit décrit sur BC, d'autre part les carrés GB, HC sur BA, AC (Prop. 46) et que par le point A, soit menée AL, parallèle à l'une quelconque des BD, CE (Prop. 31). Et que AD, FC soient jointes (Dem. 1).

Puisque chacun des angles sous BAC, BAG est droit, alors relativement à une certaine droite : BA, et en un point qui est sur elle : A, les deux droites AC, AG, non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits. Donc CA est en alignement avec AG (Prop. 14). Alors pour la même raison BA est aussi en alignement avec AH.

Et puisque l'angle sous DBC est égal à celui sous FBA car chacun est droit (Dem. 4), que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre : celui sous DBA tout entier est donc égal à celui sous FBC tout entier (N.C. 2).

Et puisque, d'une part DB est égale à BC, d'autre part FB à BA, alors les deux DB, BA sont égales aux deux FB, BC[179], chacune à chacune et l'angle sous DBA est égal à celui sous FBC. La base AD {est} donc égale à la base FC, et le triangle ABD égal au triangle FBC (Prop. 4).

Et le parallélogramme BL {est} double du triangle ABD, car ils ont la même base BD, et sont dans les mêmes parallèles : BD, AL (Prop. 41). D'autre part le carré GB est double du triangle FBC, car, de nouveau, ils ont la même base FB, et sont dans les mêmes parallèles : FB, GC. {Or les doubles de choses égales sont égaux entre eux}[180]. Donc le parallélogramme BL est égal au carré GB (N.C. 1). Alors semblablement, AE et BK étant jointes, il sera démontré aussi que le parallélogramme CL est égal au carré HC. Donc le carré BDEC tout entier est égal aux deux carrés GB, HC, et, d'une part BDEC est le carré qui a été décrit sur BC, d'autre part GB et HC sont les carrés sur BA, AC. Donc le carré sur le côté BC est égal aux carrés sur les côtés BA, AC.

Donc, dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'{angle} droit. Ce qu'il fallait démontrer.

Question : Quelles pistes pour faire travailler des élèves sur une démonstration aussi difficile ?

Démonstration n°3 :

Source :

Karine Chemla et Guo Shuchun (2004). *Les neufs chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* (édition critique bilingue), Dunod.

Supposons que la base (*gou*) soit de 3 *chi* et la hauteur (*gu*) de 4 *chi*. On demande combien fait l'hypoténuse (*xian*).

Réponse : 5 *chi*.

Supposons que l'hypoténuse soit de 5 *chi* et la base de 3 *chi*. On demande combien fait la hauteur.

Réponse : 4 *chi*.

Supposons que la hauteur soit de 4 *chi* et l'hypoténuse de 5 *chi*. On demande combien fait la base.

Procédure de la base et de la hauteur :

Le côté le plus court est appelé la base ; le côté le plus long est appelé la hauteur ; ce qui lie les coins de l'un à l'autre est appelé hypoténuse.

(…)

Base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) et on divise ceci par extraction de racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse.

La base multipliée par elle-même fait le carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compense l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. « En divisant ceci par extraction de racine carrée cela donne l'hypoténuse ».

Démonstration n°4 :

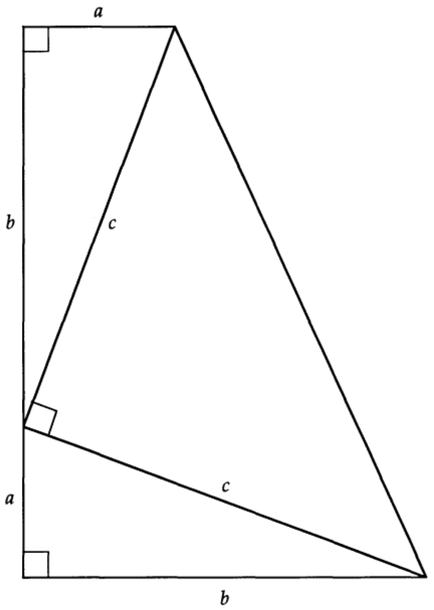
Idée de démonstration : Tracer un triangle ABC est rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A.

Piste n°1 : Aller à la chasse aux triangles semblables.

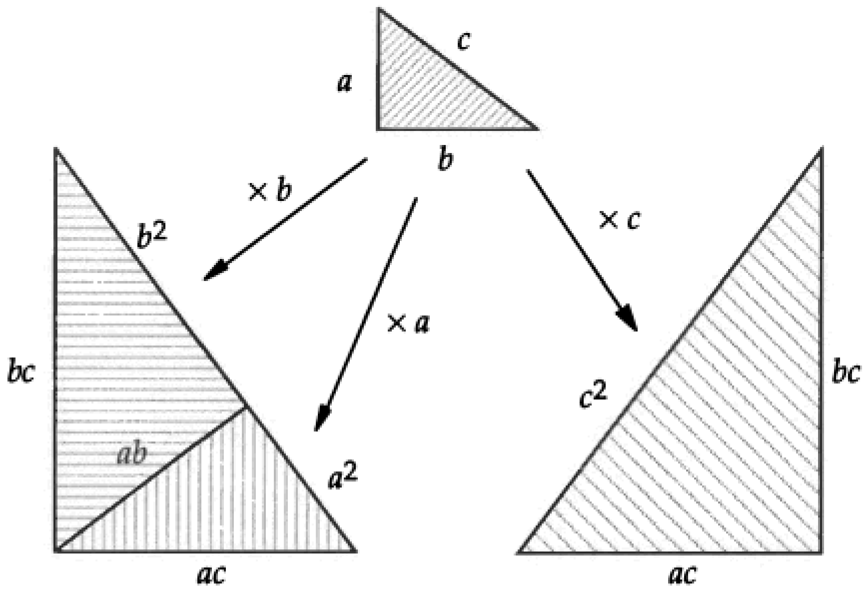
Piste n°2 : Aller à la chasse aux triangles semblables. Remarquer que BC = BH + HC, et exprimer AB^2 et AC^2 en fonction de …

Démonstration n°5 ([3]):

Calculer de deux manières l'aire du trapèze ci-dessous :



Démonstration n°6 :

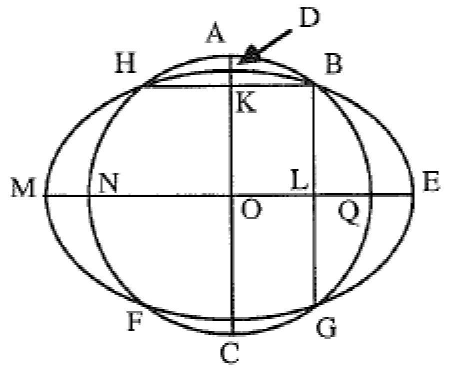


[3] Source : R. Nelsen (1993; 2000). *Proofs without words* (2 volumes). The Mathematical Association of America.

Quelques démonstrations par l'absurde en géométrie euclidienne

Euclide, *Les Eléments*, Livre III, proposition 10

Un cercle[55] ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

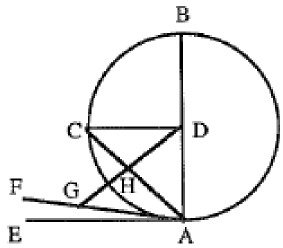


Car si c'est possible que le cercle ABC coupe le cercle DEF en plus de deux points : B, G, F, H, et que BH, BG, étant jointes, soient coupées en deux parties égales aux points K, L ; et que KC, LM, ayant été menées à angles droits avec les [droites] BH, BG à partir des points K, L, soient conduites jusqu'aux points A, E. Or puisque dans le cercle ABC une certaine droite AC coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite BH, le centre du cercle ABC est donc sur AC (III. 1, Por.).

Ensuite, puisque dans le même cercle ABC, une certaine droite NQ coupe en deux parties égales et à angles droits une certaine droite BG, le centre du cercle ABC est donc sur NQ. Or il a aussi été démontré qu'il était sur AC et les droites AC, NQ ne se rencontrent en aucun point sinon O[56]. Le point O est donc le centre du cercle ABC.

Euclide, *Les Eléments*, Livre III, proposition 16

La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; en outre, d'une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu.



Soit le cercle ABC autour du centre D et de diamètre AB. Je dis que la [droite] menée à angles droits avec AB à partir de l'extrémité A tombera à l'extérieur du cercle.

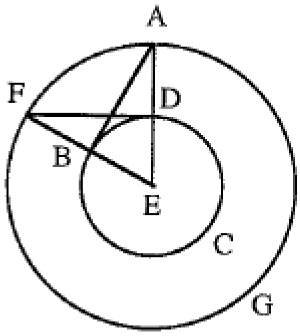
Car sinon qu'elle tombe, si c'est possible, à l'intérieur comme CA et que DC soit jointe.

Puisque DA est égale à DC, l'angle sous DAC est aussi égal à l'angle sous ACD (I. 5). Or celui sous DAC est droit ; donc celui sous ACD est aussi droit. Alors dans le triangle ACD, deux angles, ceux sous DAC, ACD, sont égaux à deux droits. Ce qui est impossible (I. 17). Donc la [droite] menée à angles droits avec AB à partir du point A ne tombera pas à l'intérieur du cercle. Alors semblablement nous démontrerons qu'elle ne tombera pas non plus sur la circonférence[80]. Donc [elle tombe] à l'extérieur.

(…)

Euclide, *Les Eléments*, Livre III, proposition 17

A partir d'un point donné, mener une ligne droite tangente à un cercle donné.



Soient d'une part A le point donné, d'autre part BCD le cercle donné. Il faut alors à partir du point A mener une ligne droite tangente au cercle BCD.

En effet que soit pris le centre du cercle : E (III. 1) et que AE soit jointe ; et que du centre E et avec l'intervalle EA soit décrit le cercle AFG ; et qu'à partir de D soit menée DF à angles droits avec EA (I. 11) ; et que EF, AB soient jointes. Je dis que la [droite] AB a été menée tangente au cercle BCD à partir du point A.

En effet puisque E est le centre des cercles BCD, AFG, d'une part EA est donc égale à EF, d'autre part ED est égale à EB. Alors les deux AE, EB sont égales aux deux FE, ED. Et elles contiennent un angle commun en E ; donc la base DF est égale à la base AB et le triangle DEF est égal au triangle EBA, et les angles restants sont égaux aux angles restants (I. 4). Donc celui sous EDF est égal à celui sous EBA ; or celui sous EDF est droit ; donc celui sous EBA est droit ; et EB est un rayon[89]. Or la [droite] menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité est tangente au cercle (III. 16, Por.). Donc AB est tangente au cercle BCD.

Donc à partir du point donné A, une ligne droite AB a été menée, tangente au cercle donné BCD. Ce qu'il fallait faire.

Question : connaissez-vous une autre construction (plus simple) ?

Cadeau : Construire un triangle dont deux des bissectrices soient perpendiculaires.