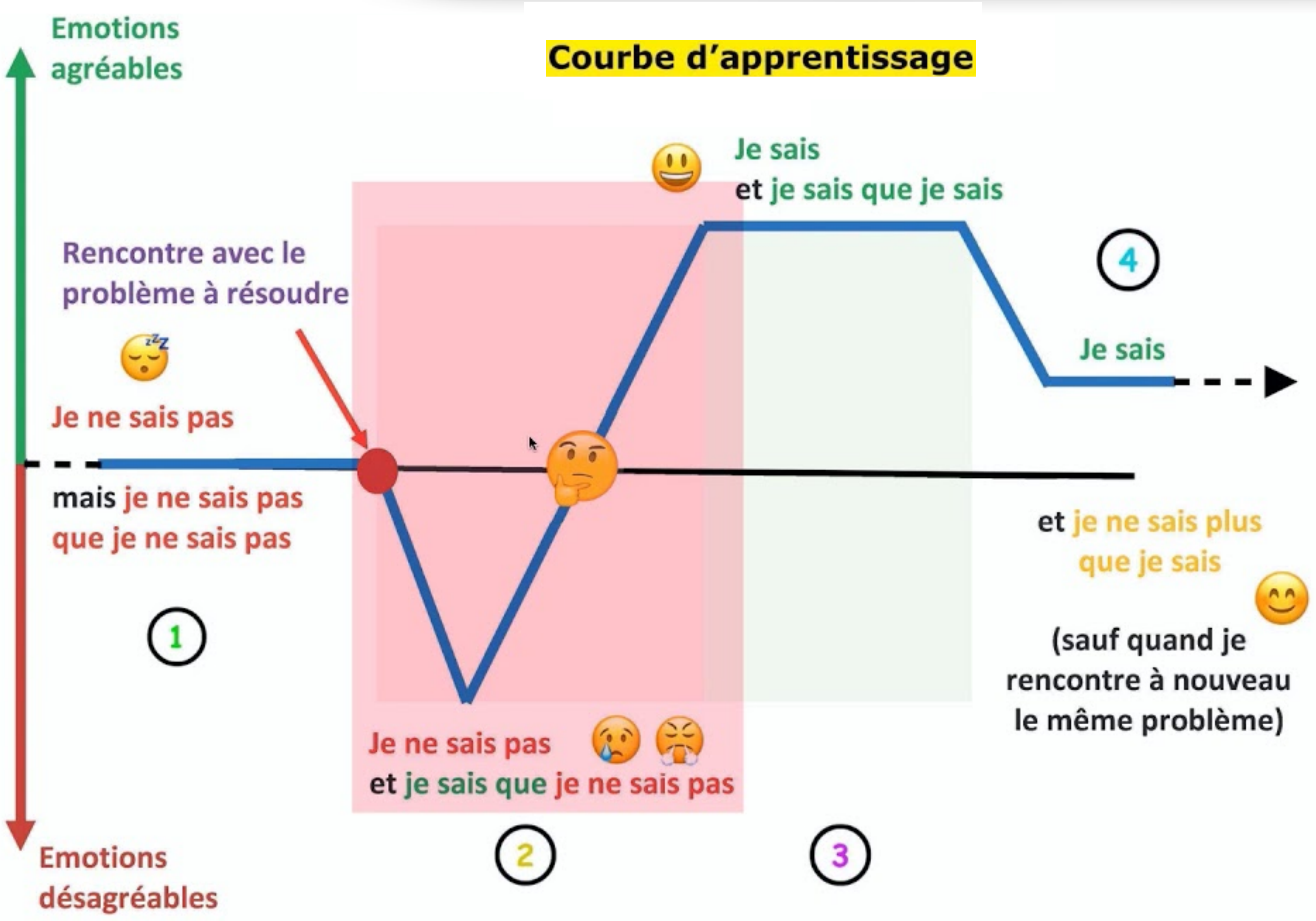
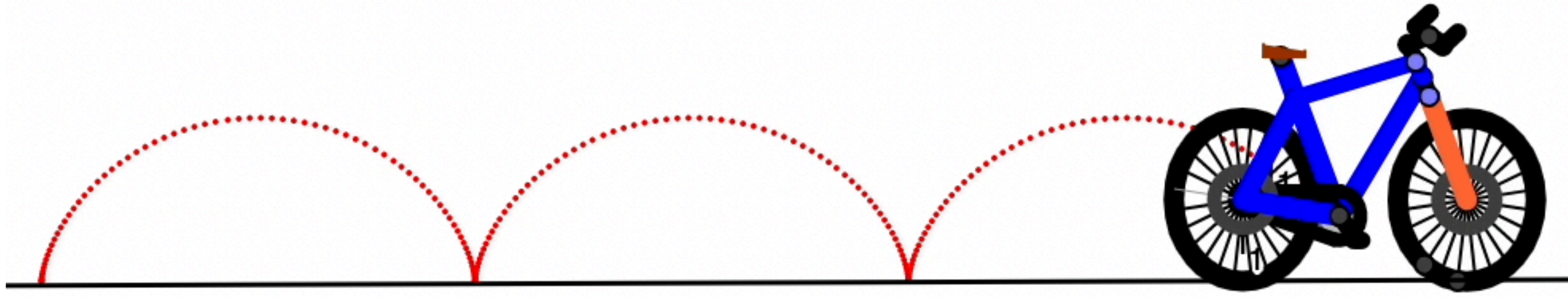
$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

Enseigner les fonctions en 2nde





guillaume.didier@inspe-paris.fr

Liste non exhaustive de documents sur la notion de fonction

Documents d'accompagnement de seconde en 2009 :

Les fonctions en 2nde

Articles issus de la revue petit'x :

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions

Variables et fonctions du collège au lycée

Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante.

Enseigner les fonctions linéaires : le point de vue de la co-variation

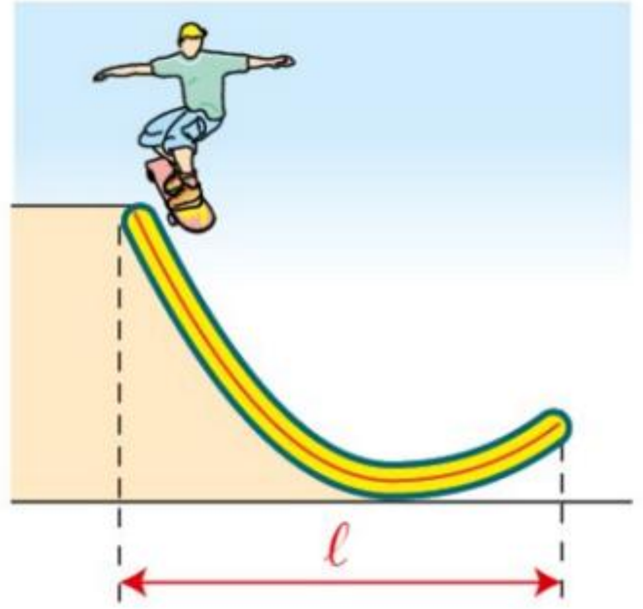
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



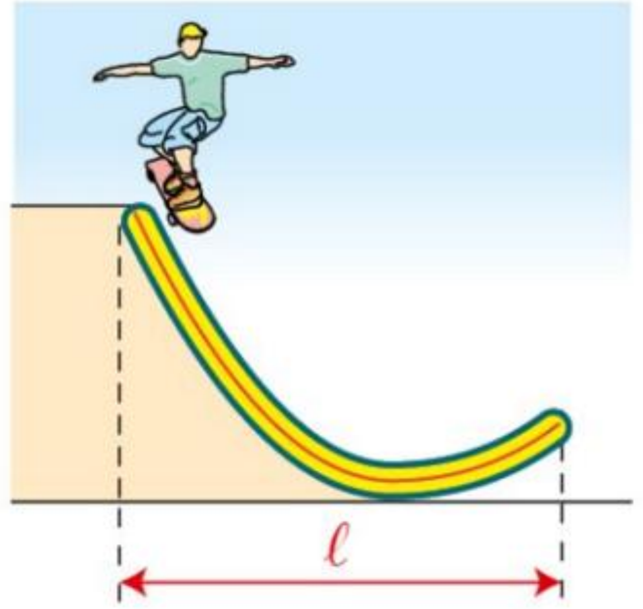
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



Analyse a priori des tâches :

0,999… = 1

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

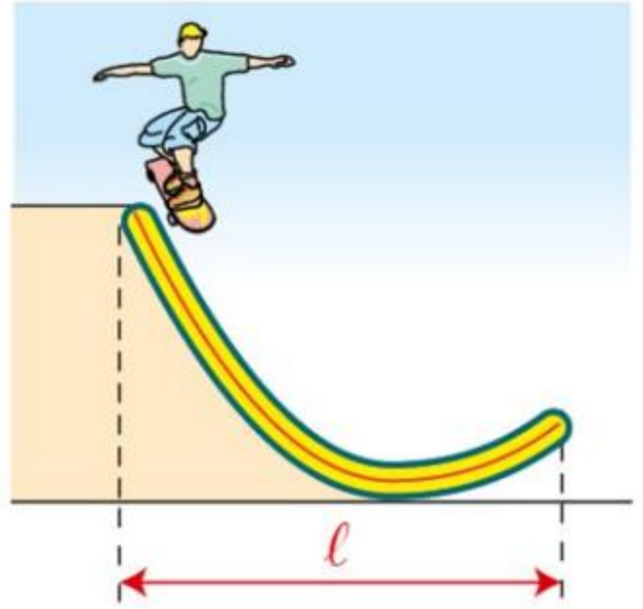
7 × … = 1

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

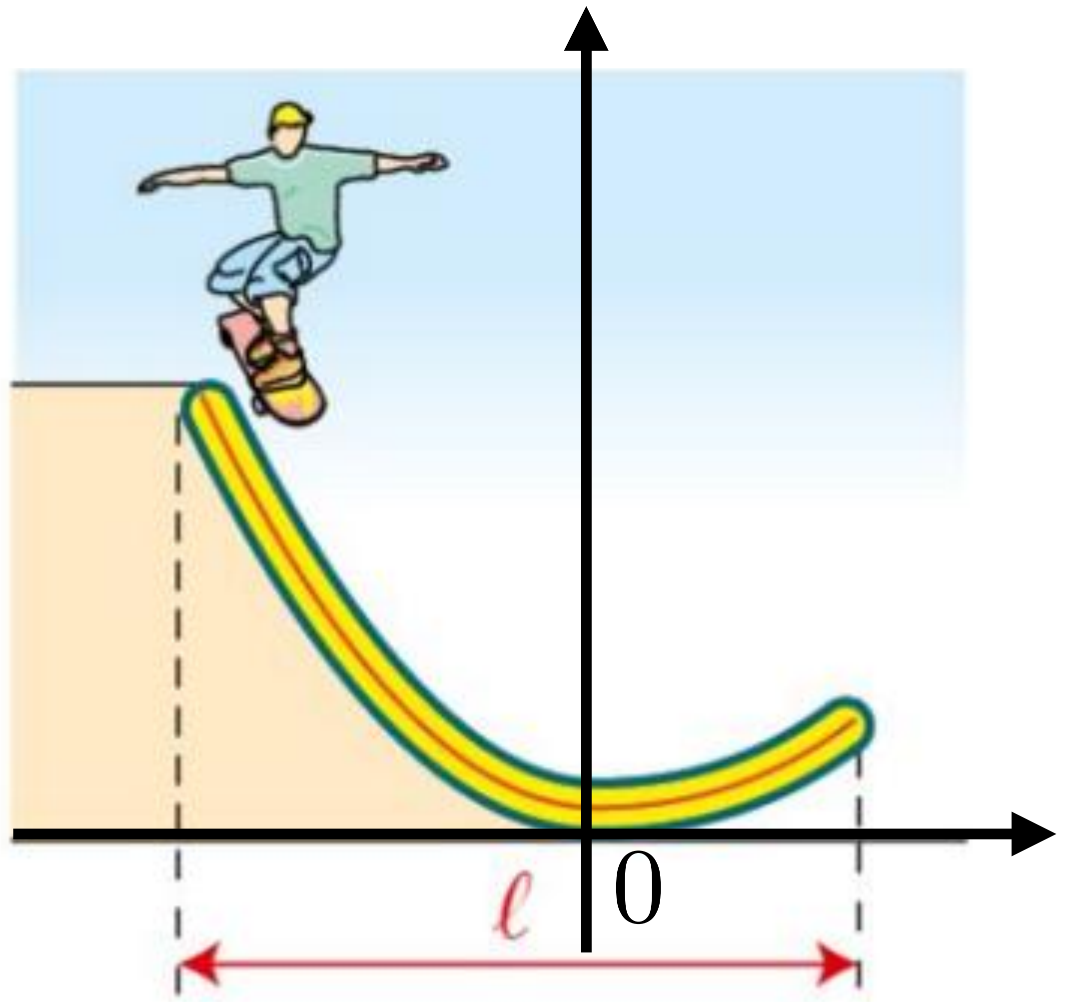
Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



Analyse a priori des tâches :

- Modéliser le tremplin par la fonction carrée (positionnement de l'origine)



$\frac{a}{10^n}$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

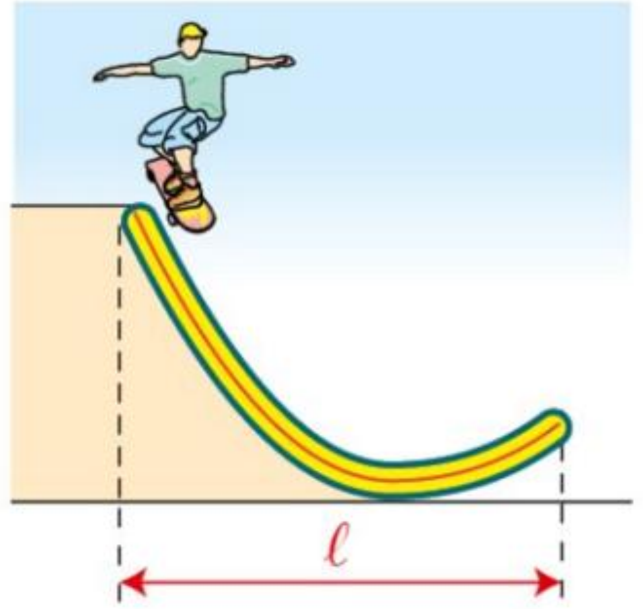
$\frac{a}{10^n}$

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

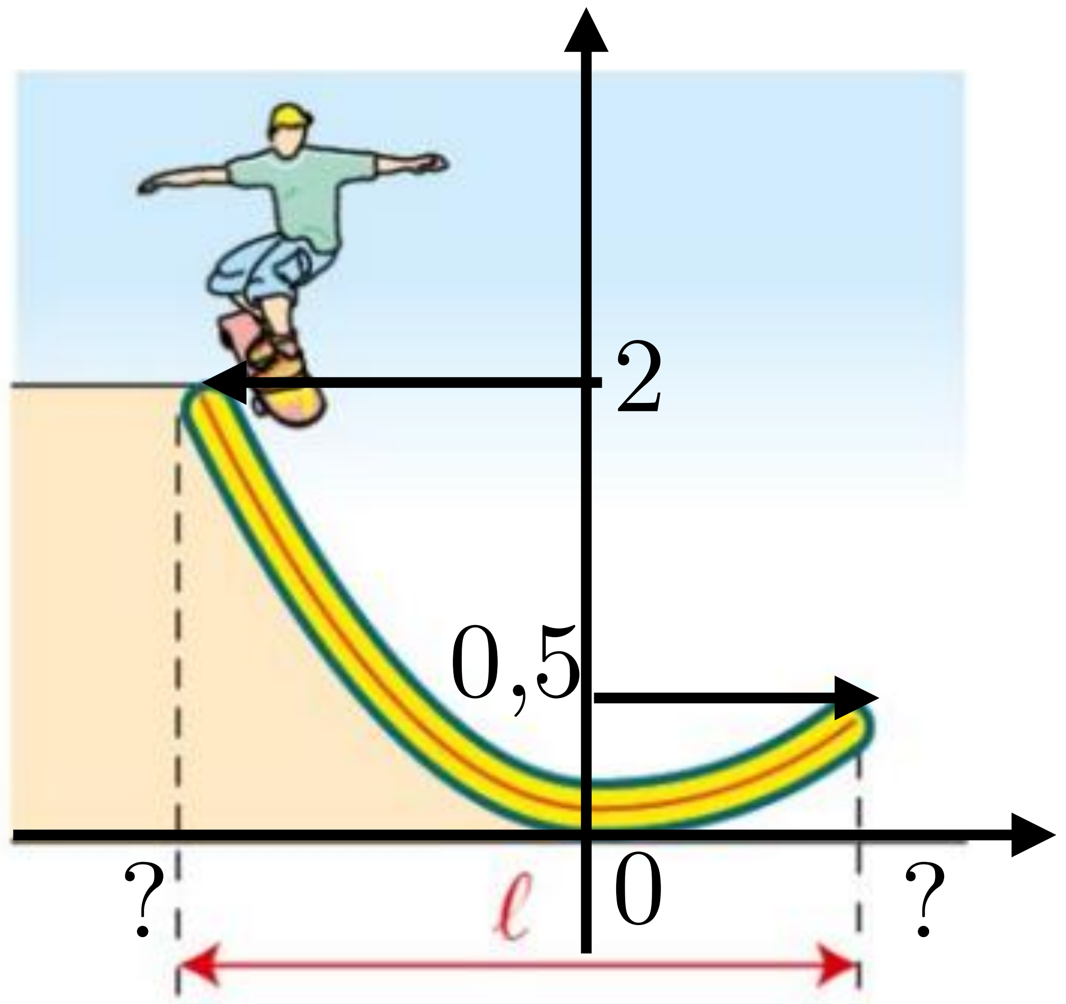
Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



Analyse a priori des tâches :

- Modéliser le tremplin par la fonction carrée (positionnement de l'origine)
- Changement de point de vue : un calcul d'une distance à deux calculs d'antécédents



FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

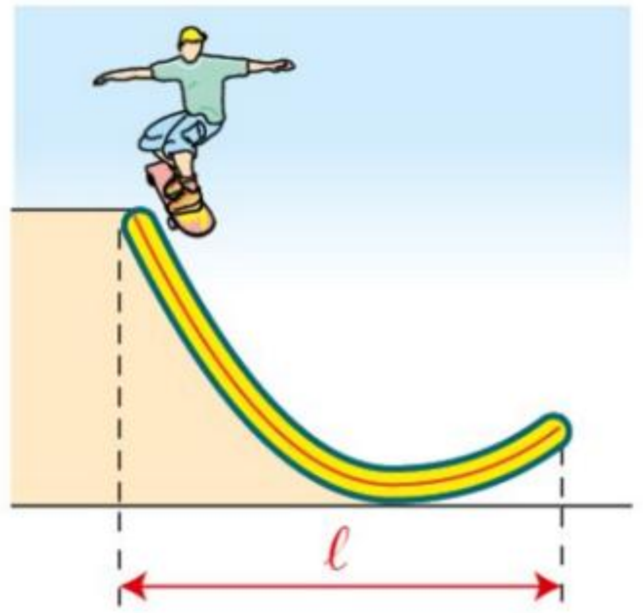
$\frac{a}{10^n}$

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

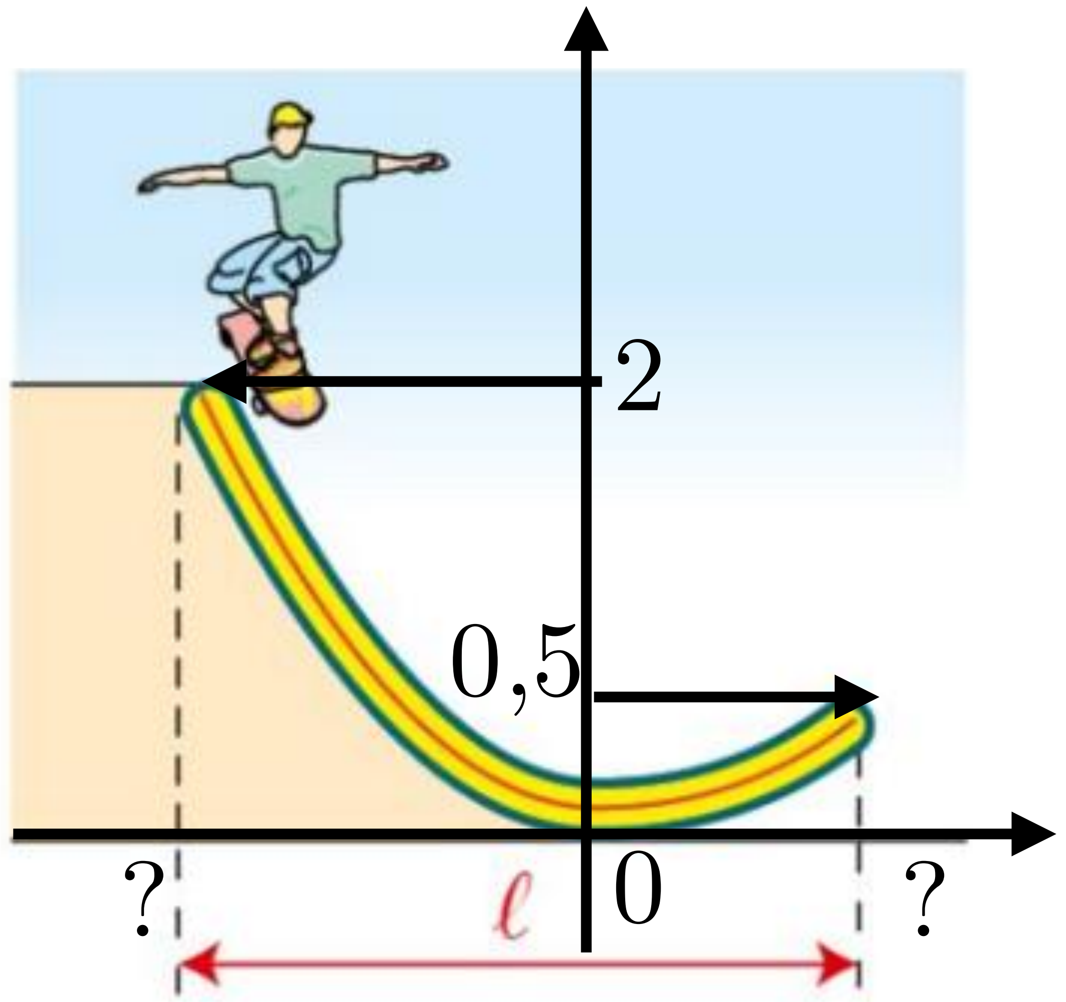
Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



Analyse a priori des tâches :

- Modéliser le tremplin par la fonction carrée (positionnement de l'origine)
- Changement de point de vue :
  un calcul d'une distance à deux calculs d'antécédents
- Changement de registre : les points sur la courbe sont de la forme $(x\ ;\ x^2)$



$0{,}999\ldots = 1$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

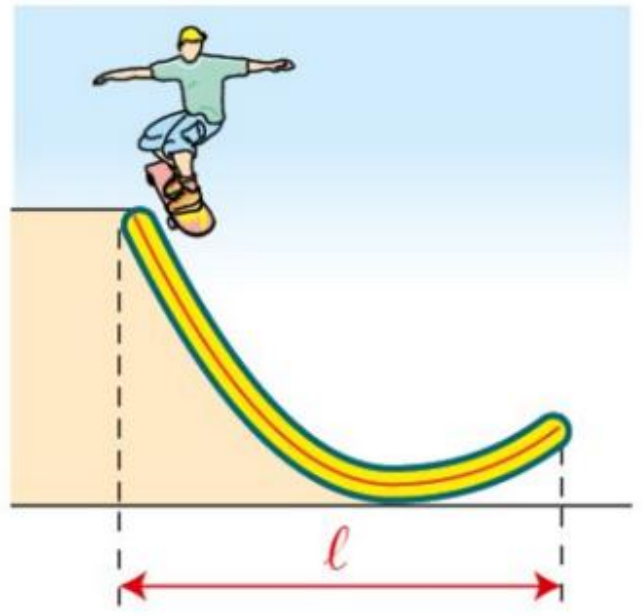
$7 \times \ldots = 1$

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

Exercice :

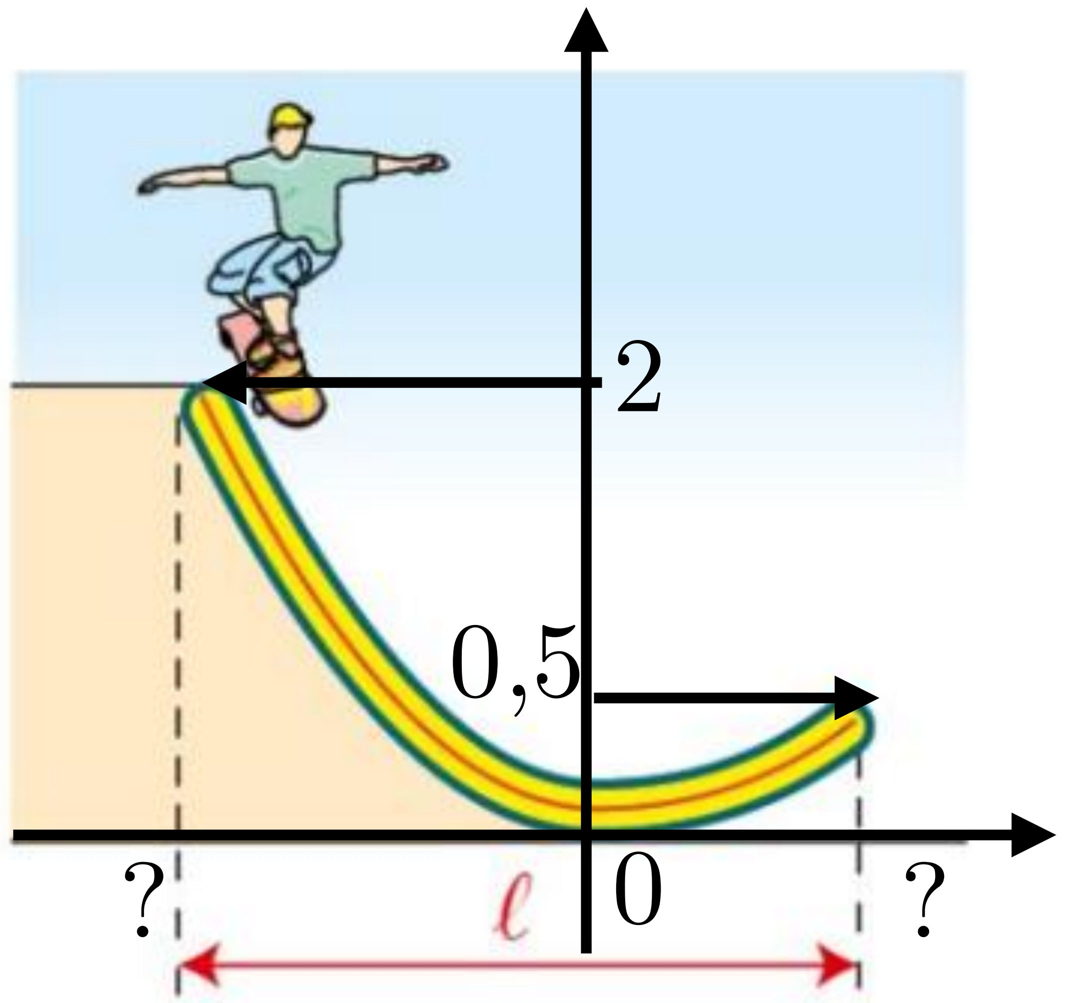
Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



$\dfrac{a}{10^n}$

Analyse a priori des tâches :

- Modéliser le tremplin par la fonction carrée (positionnement de l'origine)
- Changement de point de vue : un calcul d'une distance à deux calculs d'antécédents
- Changement de registre : les points sur la courbe sont de la forme $(x\ ;\ x^2)$
- Définition de la racine carrée d'un nombre



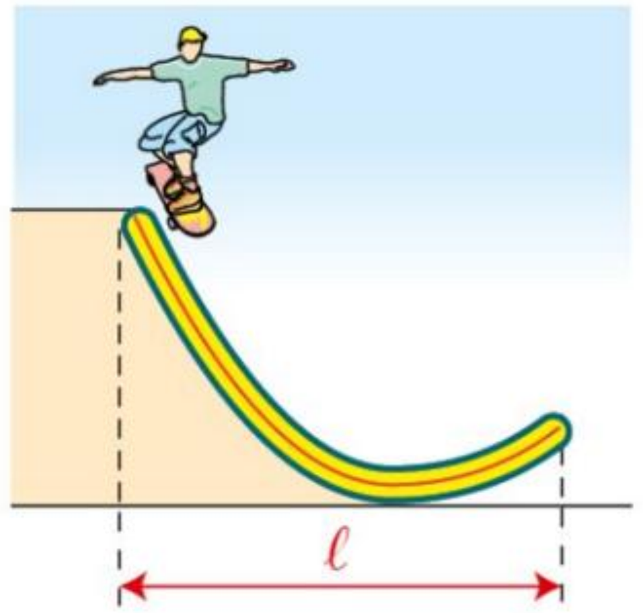
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Consigne 4 :

- Faire une analyse a priori des tâches (ce que l'on doit faire pour résoudre l'exercice).
- Identifier les pré-requis

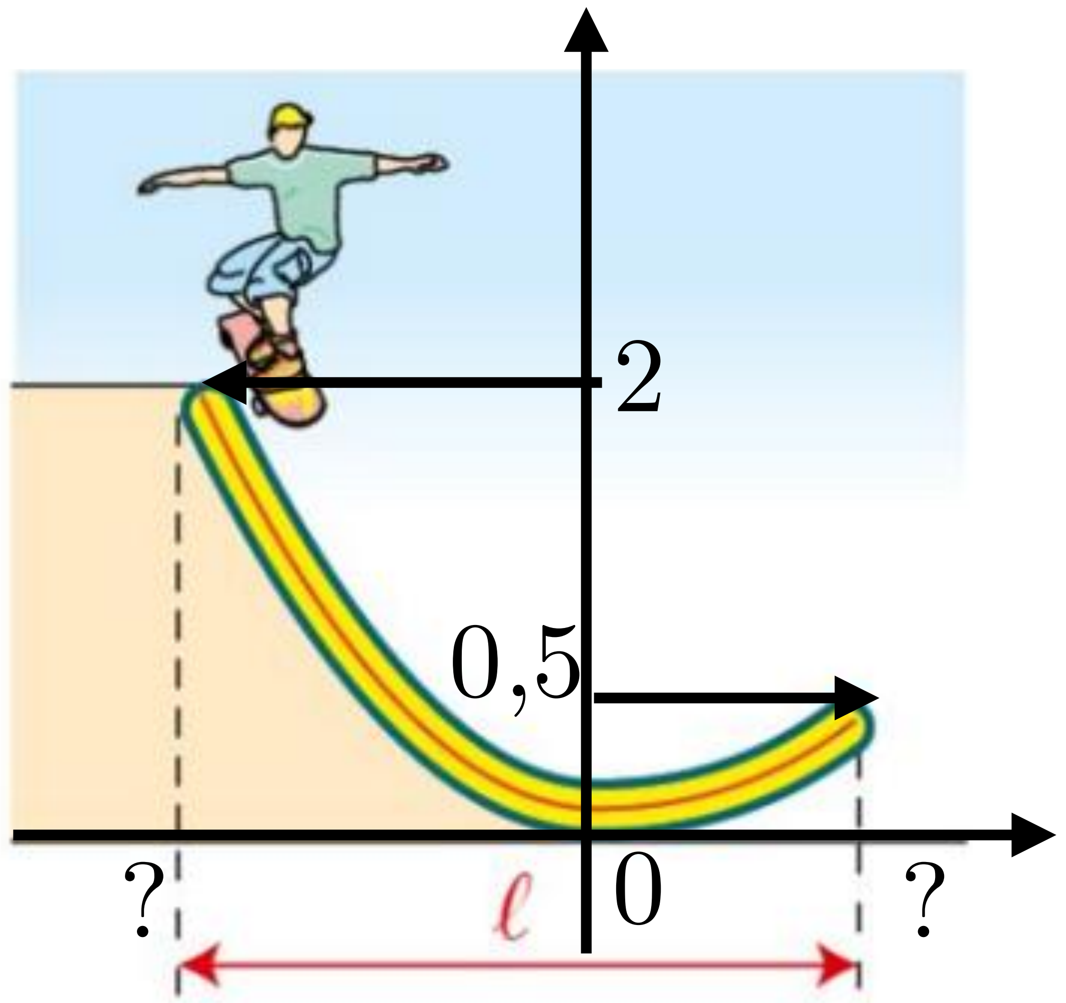
Exercice :

Ce tremplin est haut de 0,5 m d'un côté et de 2 m de l'autre.
Calculer sa largeur ℓ en m.



Analyse a priori des tâches :

- Modéliser le tremplin par la fonction carrée (positionnement de l'origine)
- Changement de point de vue :
  un calcul d'une distance à deux calculs d'antécédents
- Changement de registre : les points sur la courbe sont de la forme $(x\ ;\ x^2)$
- Définition de la racine carrée d'un nombre
- Calcul d'une distance sur un axe



$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS D'UNE FONCTION

$7 \times \ldots = 1$

Voici un extrait d'un cours sur un site internet d'un professeur :

Variations

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non) contenant a et b. Soit une fonction f définie sur I :

- f croissante sur I $\Leftrightarrow$ $[\, a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \,]$
- f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $[\, a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \,]$
- f monotone sur I $\Leftrightarrow$ f croissante ou décroissante sur I

Une fonction croissante conserve l'inégalité.
Une fonction décroissante inverse l'inégalité.

<u>**Analyse de cet extrait**</u>

$\dfrac{a}{10^n}$

$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS D'UNE FONCTION

$7 \times \ldots = 1$

Voici un extrait d'un cours sur un site internet d'un professeur :

Variations

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non) contenant a et b. Soit une fonction f définie sur I :

- f croissante sur I $\Leftrightarrow$ $[\, a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \,]$
- f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $[\, a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \,]$
- f monotone sur I $\Leftrightarrow$ f croissante ou décroissante sur I

Une fonction croissante conserve l'inégalité.
Une fonction décroissante inverse l'inégalité.

<u>Analyse de cet extrait</u>

- Pas de registre graphique pour aider à se construire une représentation mentale
- Manque le quantificateur $\forall$ pour a et b
- Équivalence et implication difficile à comprendre. Gros risque de blocage!!

$\frac{a}{10^n}$

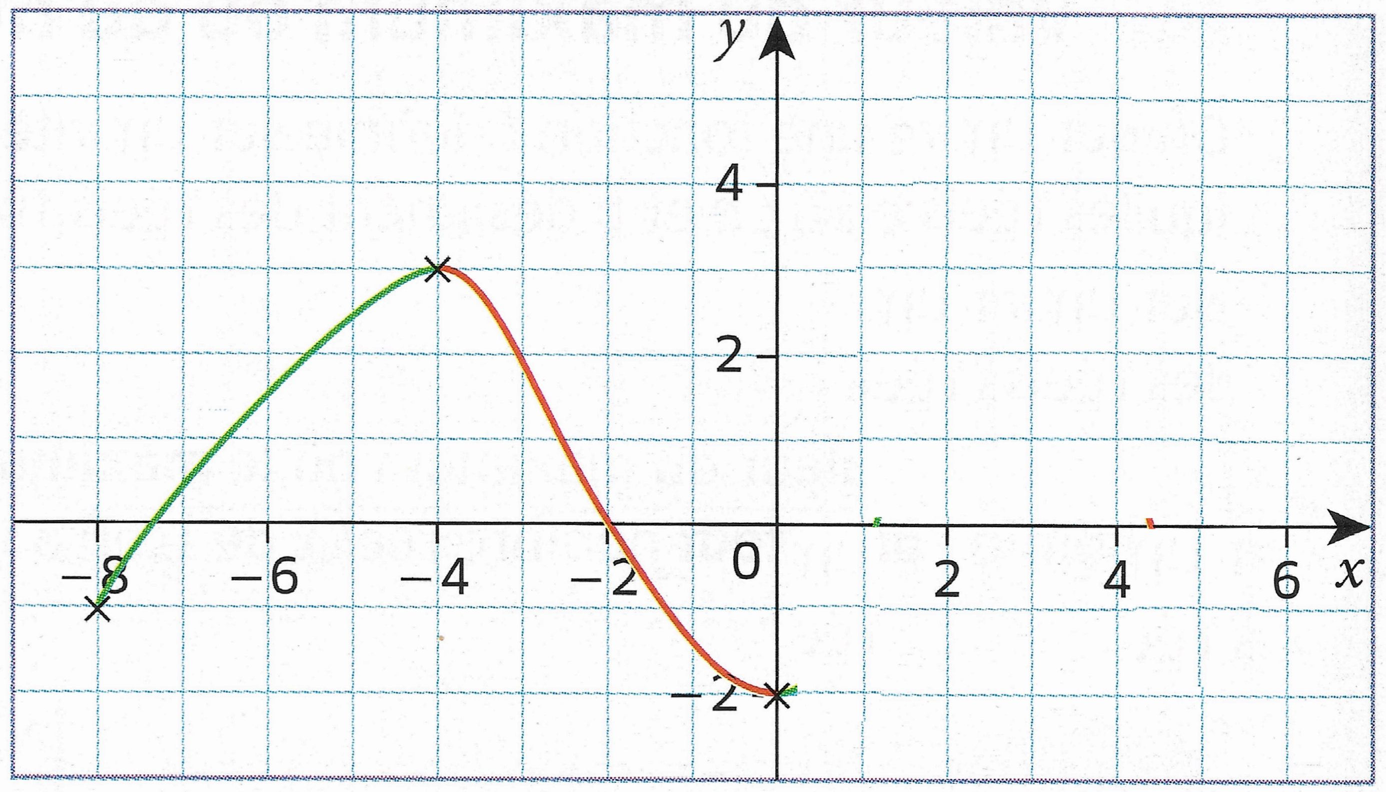
Ce ne peut pas être la première définition que l'on donne aux élèves.
Dans un premier temps, il faut faire comprendre la signification d'une fonction croissante, décroissante et monotone.

VARIATIONS D'UNE FONCTION

Comment déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à partir de sa courbe ?

Une fonction *f* définie sur l'intervalle [–8 ; 5,5] est représentée ci-contre. On regarde simultanément les variations des abscisses et des ordonnées des points de cette courbe, parcourue **de gauche à droite**.

- Sur l'intervalle [–8 ; –4], la courbe « monte ». Quand les abscisses augmentent de –8 à –4, les ordonnées augmentent de –1 à 3. On dit que la fonction *f* est **croissante** sur [–8 ; –4].
- Sur l'intervalle [–4 ; 0], la courbe « descend ». Quand les abscisses augmentent de –4 à 0, les ordonnées diminuent de 3 à –2. On dit que la fonction *f* est **décroissante** sur [–4 ; 0].



- la fonction *f* est **croissante** sur [0 ; 3].
  f (3) = 5
- la fonction *f* est **décroissante** sur [3 ; 5,5].
  f (5,5) = -2

- Partir d'un exemple
- Tester de suite les élèves pour savoir ce qu'ils ont compris

VARIATIONS D'UNE FONCTION

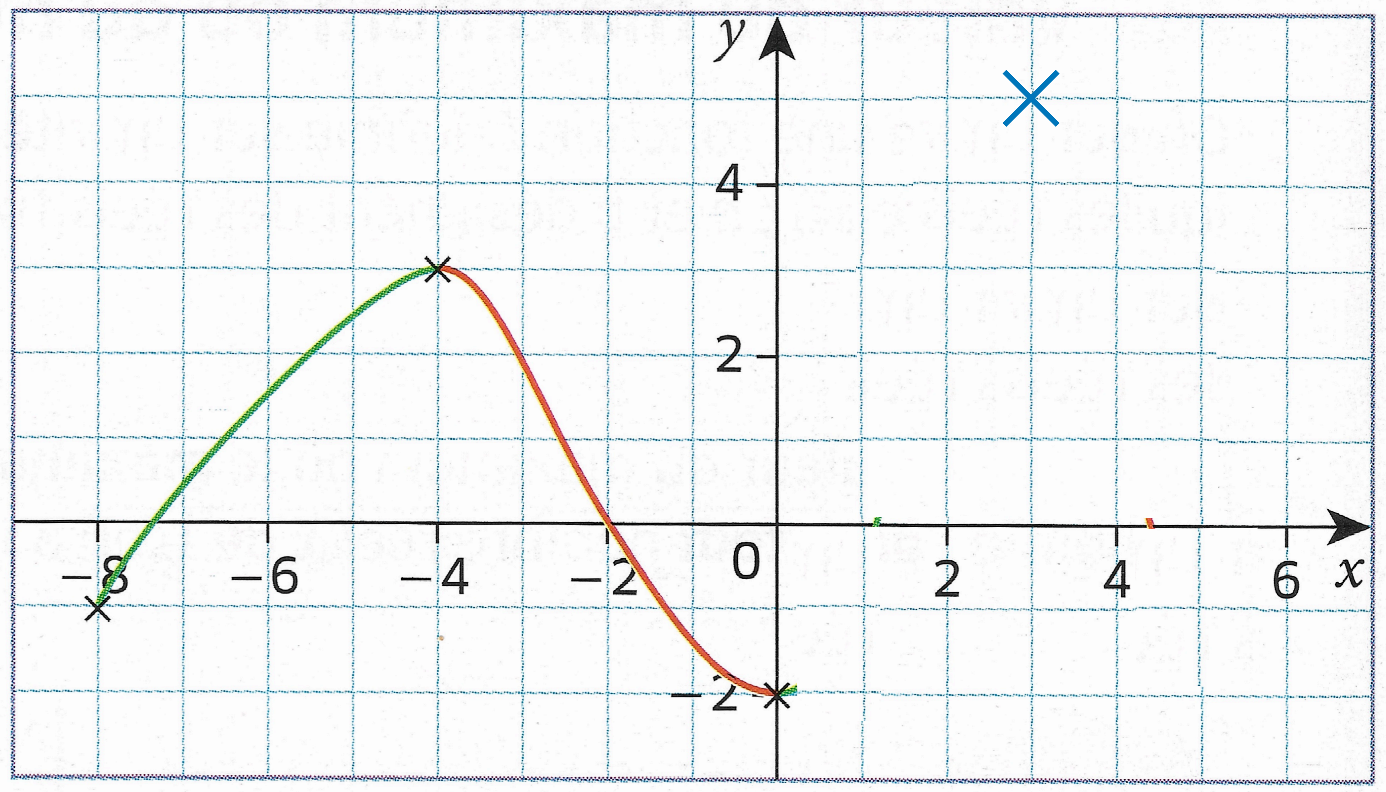
$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

Comment déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à partir de sa courbe ?

Une fonction f définie sur l'intervalle [–8 ; 5,5] est représentée ci-contre. On regarde simultanément les variations des abscisses et des ordonnées des points de cette courbe, parcourue **de gauche à droite**.

- Sur l'intervalle [–8 ; –4], la courbe « monte ». Quand les abscisses augmentent de –8 à –4, les ordonnées augmentent de –1 à 3. On dit que la fonction f est **croissante** sur [–8 ; –4].
- Sur l'intervalle [–4 ; 0], la courbe « descend ». Quand les abscisses augmentent de –4 à 0, les ordonnées diminuent de 3 à –2. On dit que la fonction f est **décroissante** sur [–4 ; 0].



- la fonction f est **croissante** sur [0 ; 3].
  f (3) = 5
- la fonction f est **décroissante** sur [3 ; 5,5].
  f (5,5) = -2

- Partir d'un exemple
- Tester de suite les élèves pour savoir ce qu'ils ont compris

$\frac{a}{10^n}$

0,999… = 1

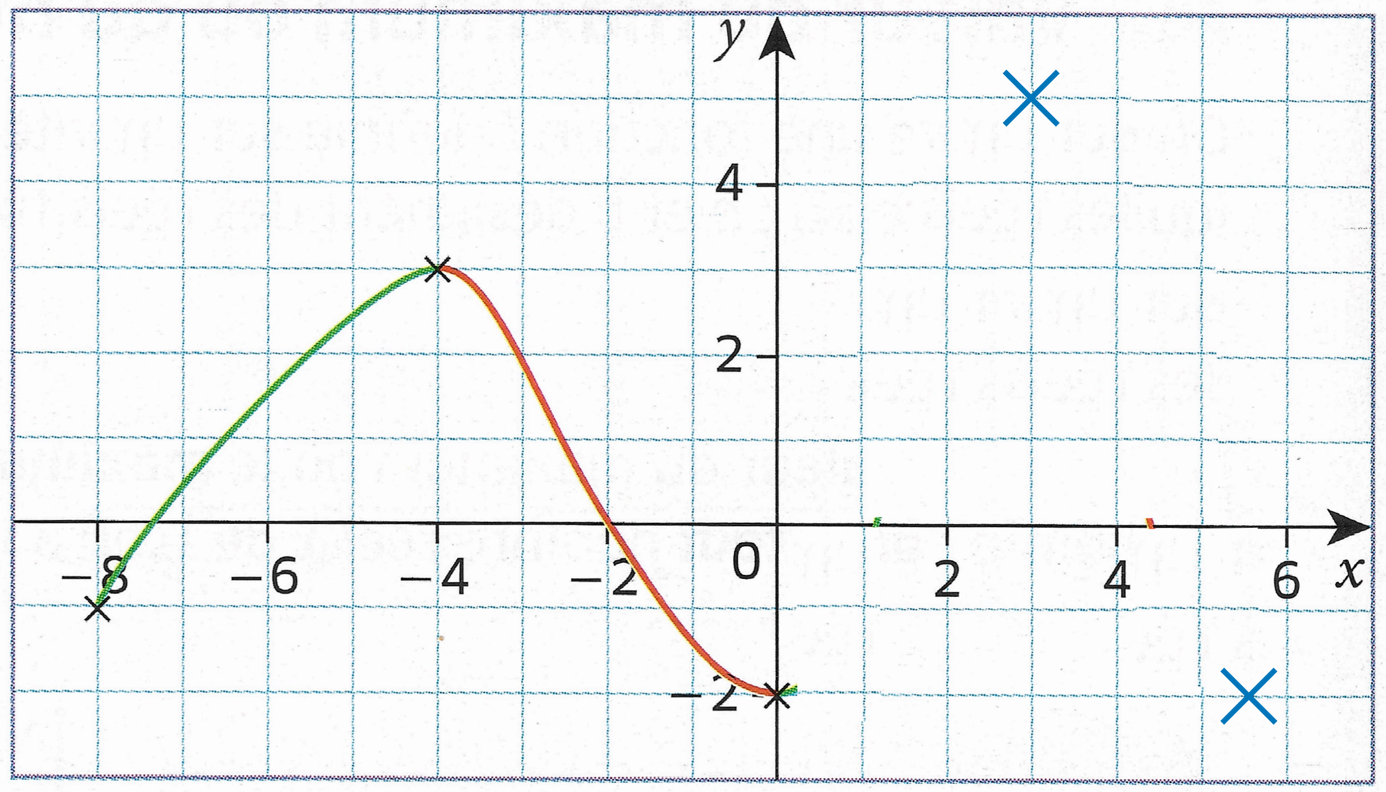
7 × … = 1

VARIATIONS D'UNE FONCTION

Comment déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à partir de sa courbe ?

Une fonction *f* définie sur l'intervalle [–8 ; 5,5] est représentée ci-contre. On regarde simultanément les variations des abscisses et des ordonnées des points de cette courbe, parcourue **de gauche à droite**.

- Sur l'intervalle [–8 ; –4], la courbe « monte ». Quand les abscisses augmentent de –8 à –4, les ordonnées augmentent de –1 à 3. On dit que la fonction *f* est **croissante** sur [–8 ; –4].
- Sur l'intervalle [–4 ; 0], la courbe « descend ». Quand les abscisses augmentent de –4 à 0, les ordonnées diminuent de 3 à –2. On dit que la fonction *f* est **décroissante** sur [–4 ; 0].



- la fonction *f* est **croissante** sur [0 ; 3].
  f (3) = 5
- la fonction *f* est **décroissante** sur [3 ; 5,5].
  f (5,5) = -2

- Partir d'un exemple
- Tester de suite les élèves pour savoir ce qu'ils ont compris

$\frac{a}{10^n}$

$0{,}999\ldots = 1$

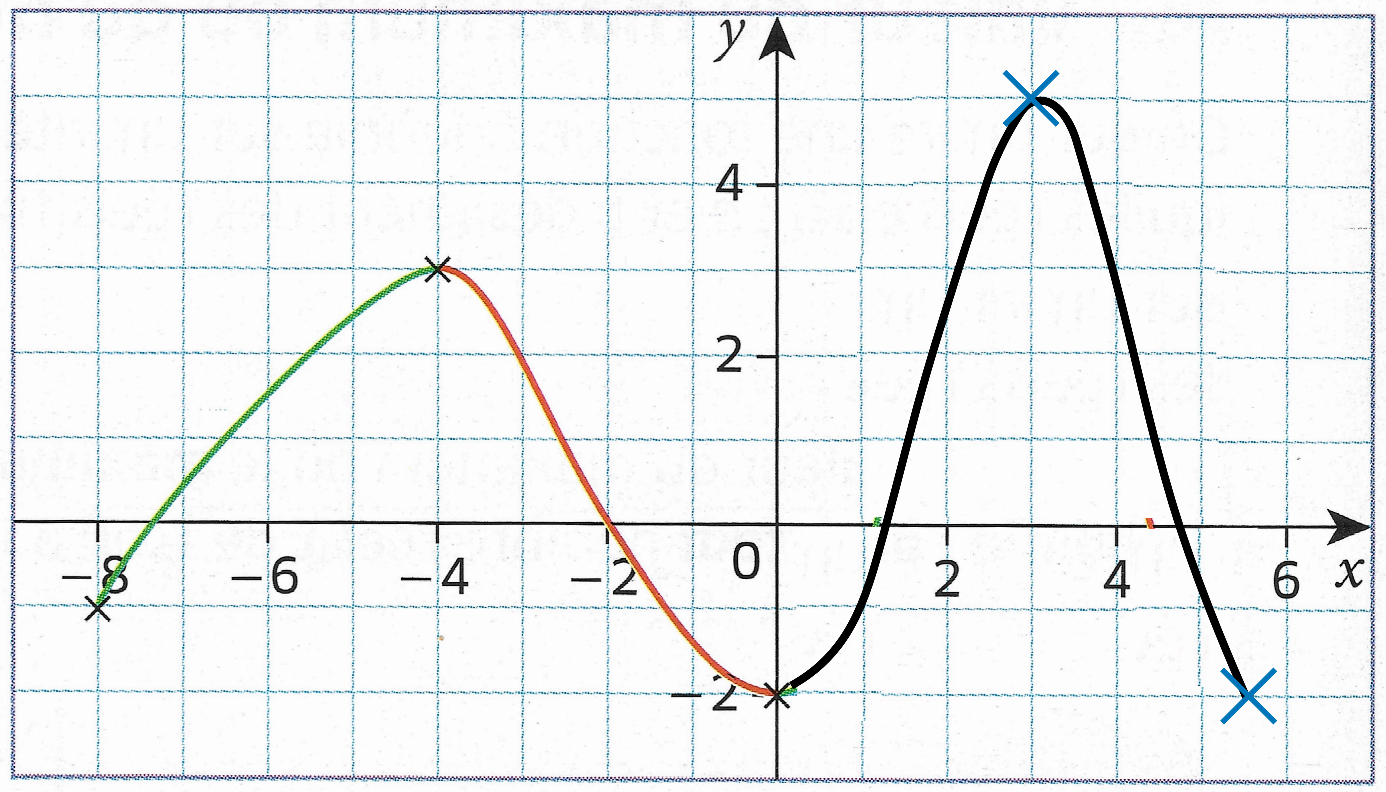
VARIATIONS D'UNE FONCTION

$7 \times \ldots = 1$

Comment déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à partir de sa courbe ?

Une fonction *f* définie sur l'intervalle [–8 ; 5,5] est représentée ci-contre. On regarde simultanément les variations des abscisses et des ordonnées des points de cette courbe, parcourue **de gauche à droite**.

- Sur l'intervalle [–8 ; –4], la courbe « monte ». Quand les abscisses augmentent de –8 à –4, les ordonnées augmentent de –1 à 3. On dit que la fonction *f* est **croissante** sur [–8 ; –4].
- Sur l'intervalle [–4 ; 0], la courbe « descend ». Quand les abscisses augmentent de –4 à 0, les ordonnées diminuent de 3 à –2. On dit que la fonction *f* est **décroissante** sur [–4 ; 0].



- la fonction *f* est **croissante** sur [0 ; 3].
  f (3) = 5
- la fonction *f* est **décroissante** sur [3 ; 5,5].
  f (5,5) = -2

- Partir d'un exemple
- Tester de suite les élèves pour savoir ce qu'ils ont compris

$\frac{a}{10^n}$

$0,999\ldots = 1$

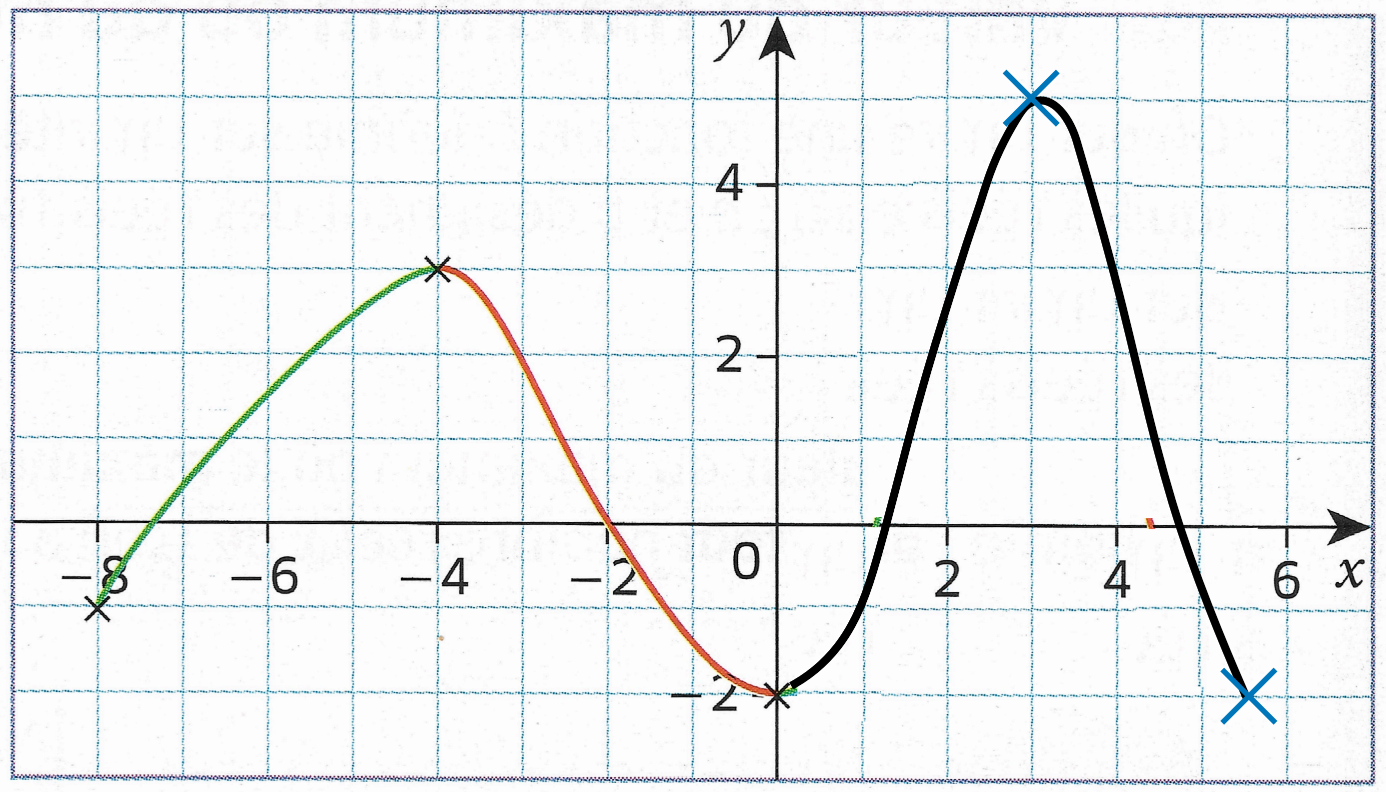
VARIATIONS D'UNE FONCTION

$7 \times \ldots = 1$

Comment déterminer si une fonction est croissante ou décroissante à partir de sa courbe ?

Une fonction *f* définie sur l'intervalle [–8 ; 5,5] est représentée ci-contre. On regarde simultanément les variations des abscisses et des ordonnées des points de cette courbe, parcourue **de gauche à droite**.

- Sur l'intervalle [–8 ; –4], la courbe « monte ». Quand les abscisses augmentent de –8 à –4, les ordonnées augmentent de –1 à 3. On dit que la fonction *f* est **croissante** sur [–8 ; –4].
- Sur l'intervalle [–4 ; 0], la courbe « descend ». Quand les abscisses augmentent de –4 à 0, les ordonnées diminuent de 3 à –2. On dit que la fonction *f* est **décroissante** sur [–4 ; 0].



- la fonction *f* est **croissante** sur [0 ; 3].
  f (3) = 5
- la fonction *f* est **décroissante** sur [3 ; 5,5].
  f (5,5) = -2

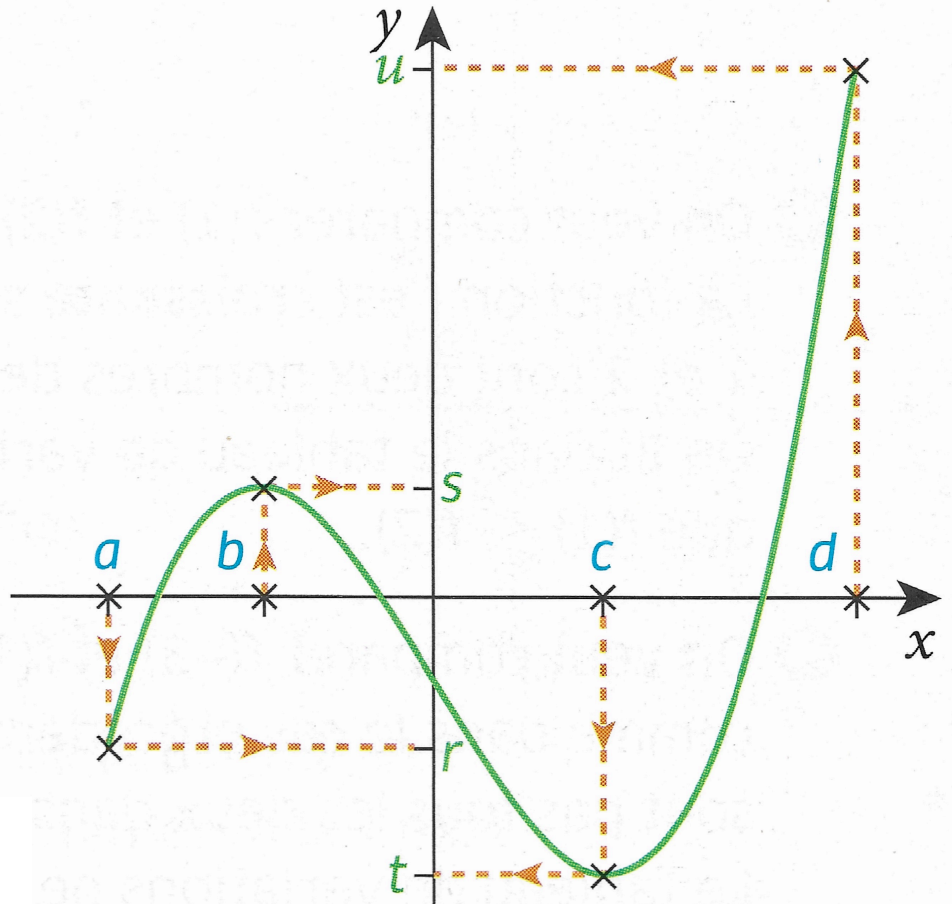
- Partir d'un exemple
- Tester de suite les élèves pour savoir ce qu'ils ont compris

$\frac{a}{10^n}$

A. Fonction croissante, décroissante : une lecture graphique

La lecture graphique permet une première approche de la croissance ou de la décroissance d'une fonction.

- La courbe de *f* « monte » sur un intervalle [*a* ; *b*] se traduit par : quand les valeurs de x **augmentent** dans l'intervalle [*a* ; *b*], les images **f(x) augmentent**. On dit alors que la fonction *f* est **croissante sur [*a* ; *b*]**.
- La courbe de *f* « descend » sur un intervalle [*b* ; *c*] se traduit par : quand les valeurs de x **augmentent** dans cet intervalle, les images **f(x) diminuent**. On dit alors que la fonction *f* est **décroissante sur [*b* ; *c*]**.



- Généraliser sans formalisme

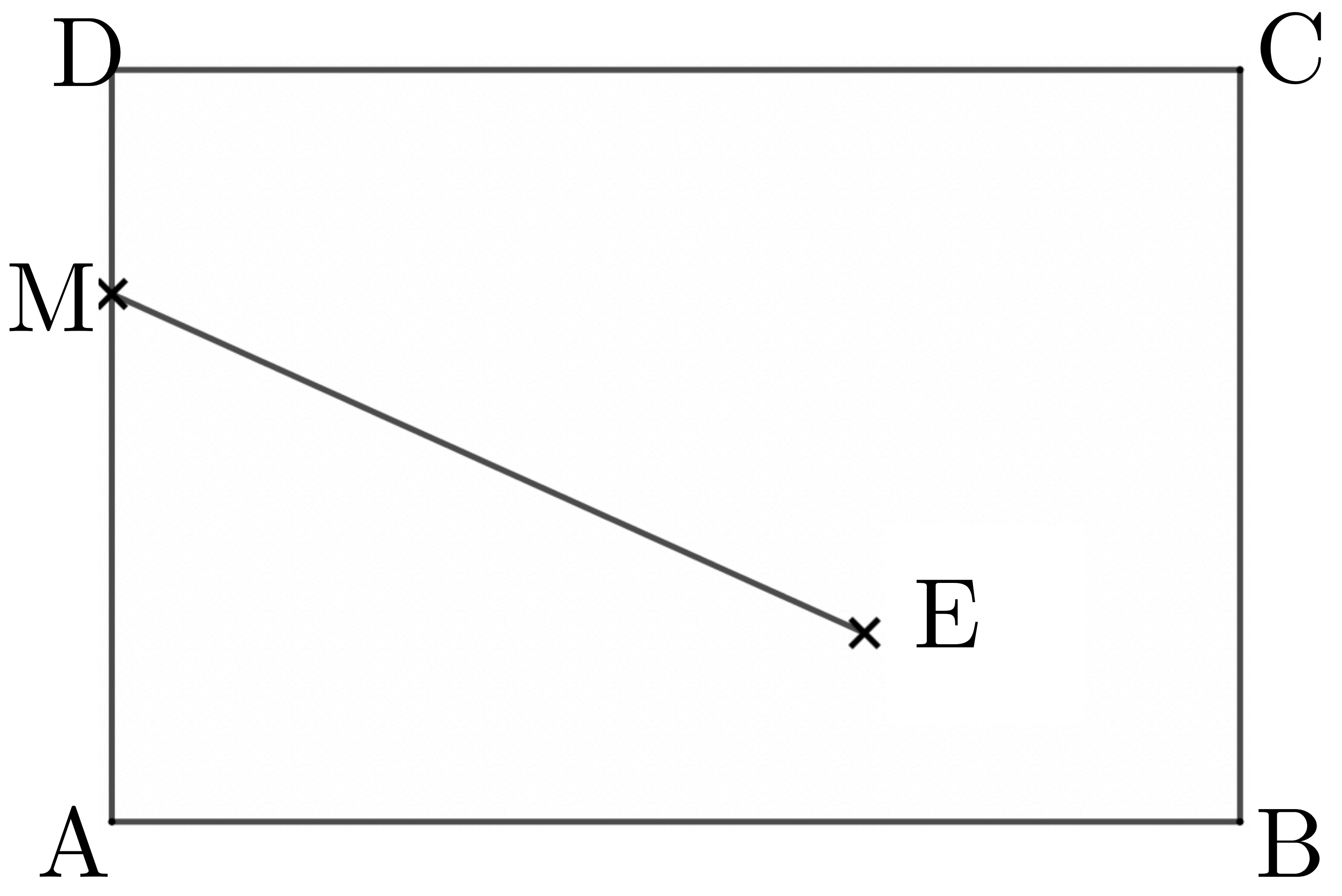
VARIATIONS DE FONCTIONS

$0{,}999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Exercice :

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 cm et BC = 4 cm.
On note E le point à l'intérieur du rectangle ABCD tel que la distance de E à la droite (BC) est égale à 2 cm et que la distance de E à la droite (AB) est égale à 1 cm.
On considère un point M se déplaçant sur le contour du rectangle ABCD.



$\frac{a}{10^n}$

Consigne 5 :

1) Décrire l'évolution de la longueur EM lorsque le point M se déplace.
2) Représenter dans un repère l'évolution de la longueur EM lorsque le point M se déplace.

$0,999\ldots = 1$

VARIATIONS DE FONCTIONS

$7 \times \ldots = 1$

A partir du point A, la distance que parcoure M augmente tout le temps alors que la longueur EM n'est pas régulière. Au début EM diminue puis il augmente jusqu'à B puis diminue et réaugmente jusqu'à ~~S~~C et ainsi de ~~de~~ suite.

$\frac{a}{10^n}$

Le segment [ME] diminue jusqu'à que le segment [ME] soit perpendiculaire au segment [AB], il se réagrandit jusqu'à ce que le point M se confonde avec le point B. Il va se réaptisir jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au segment [CB] et se réagrandir jusqu'à ~~ce~~ que le point M se confonde avec le point C. C'est la même chose jusqu'à ce que le point M se confonde avec le point A.

0,999… = 1

7 × … = 1

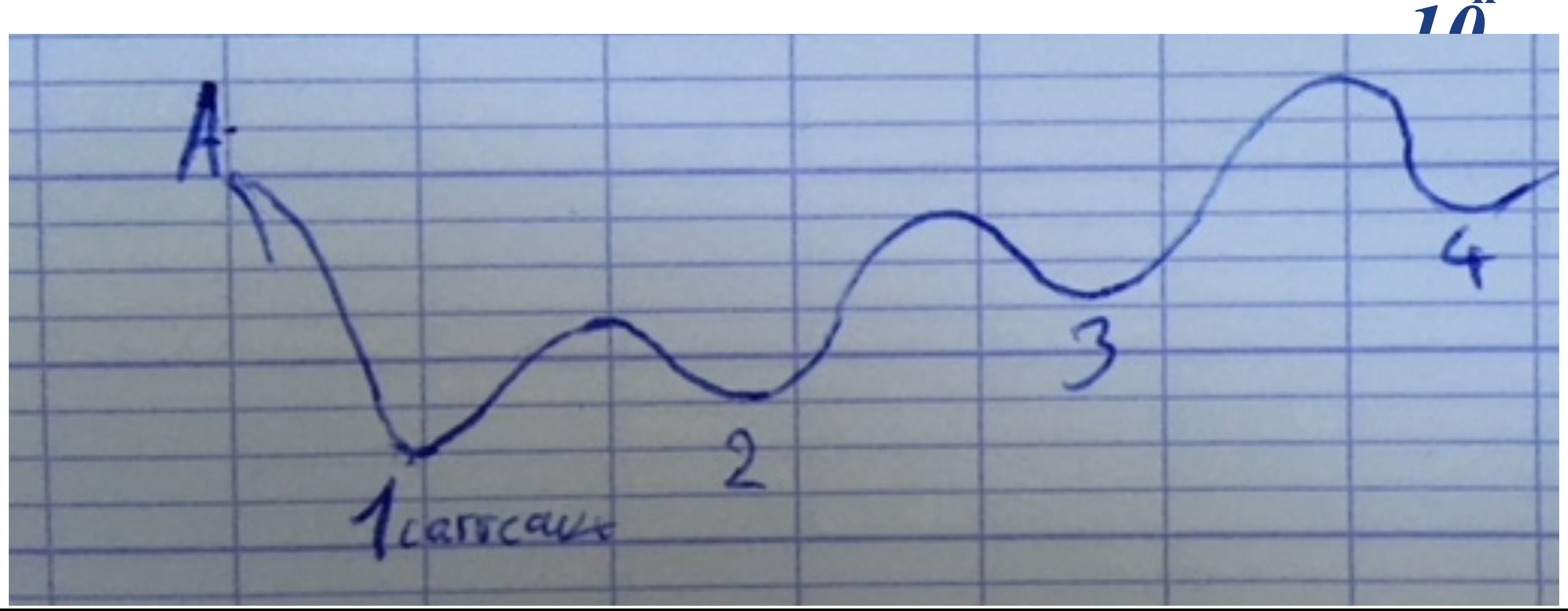
VARIATIONS DE FONCTIONS

A partir du point A, la distance que parcoure M augmente tout le temps alors que la longueur EM n'est pas régulière. Au début EM diminue puis il augmente jusqu'à B puis diminue et réaugmente jusqu'à ~~&~~C et ainsi de ~~de~~ suite.

Les élèves décrivent avec leurs mots l'évolution de la longueur EM.
Ces deux exemples montrent la nécessité d'utiliser un vocabulaire commun.

$\frac{a}{10^n}$

Le segment [ME] ~~xx~~ diminue jusqu'à que le segment [ME] soit perpendiculaire au segment [AB], il se réagrandit jusqu'à ce que le point M se confonde avec le point B. Il va se réaptisir jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au segment [CB] et se réagrandir jusqu'à ~~ce~~ que le point M se confonde avec le point C. C'est la même chose jusqu'à ce que le point M se confonde avec le point A.



Même si avec leurs mots, les élèves ont décrit la fonction, il leur est difficile de représenter correctement la fonction.

VARIATIONS DE FONCTIONS

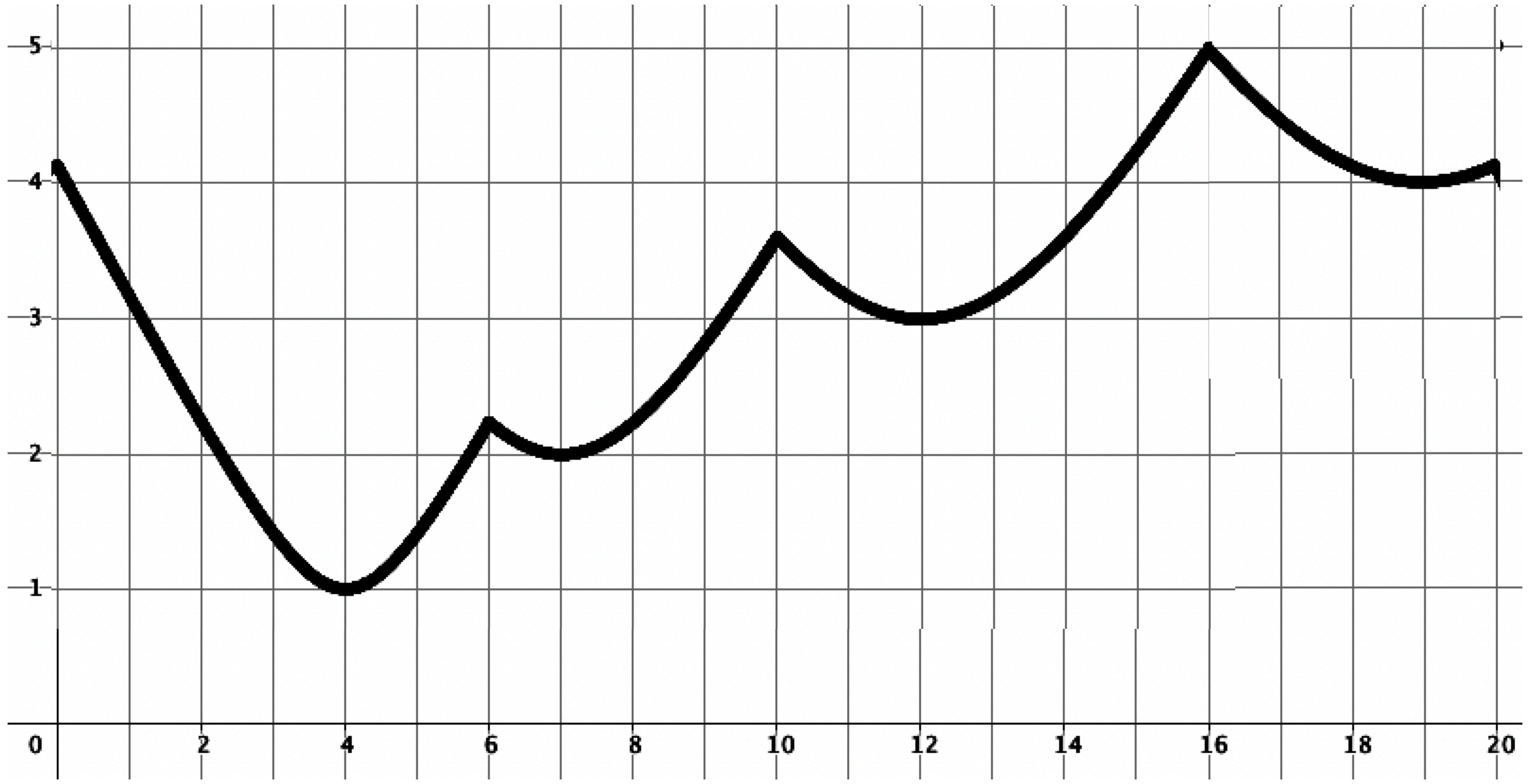
$0{,}999\ldots = 1$

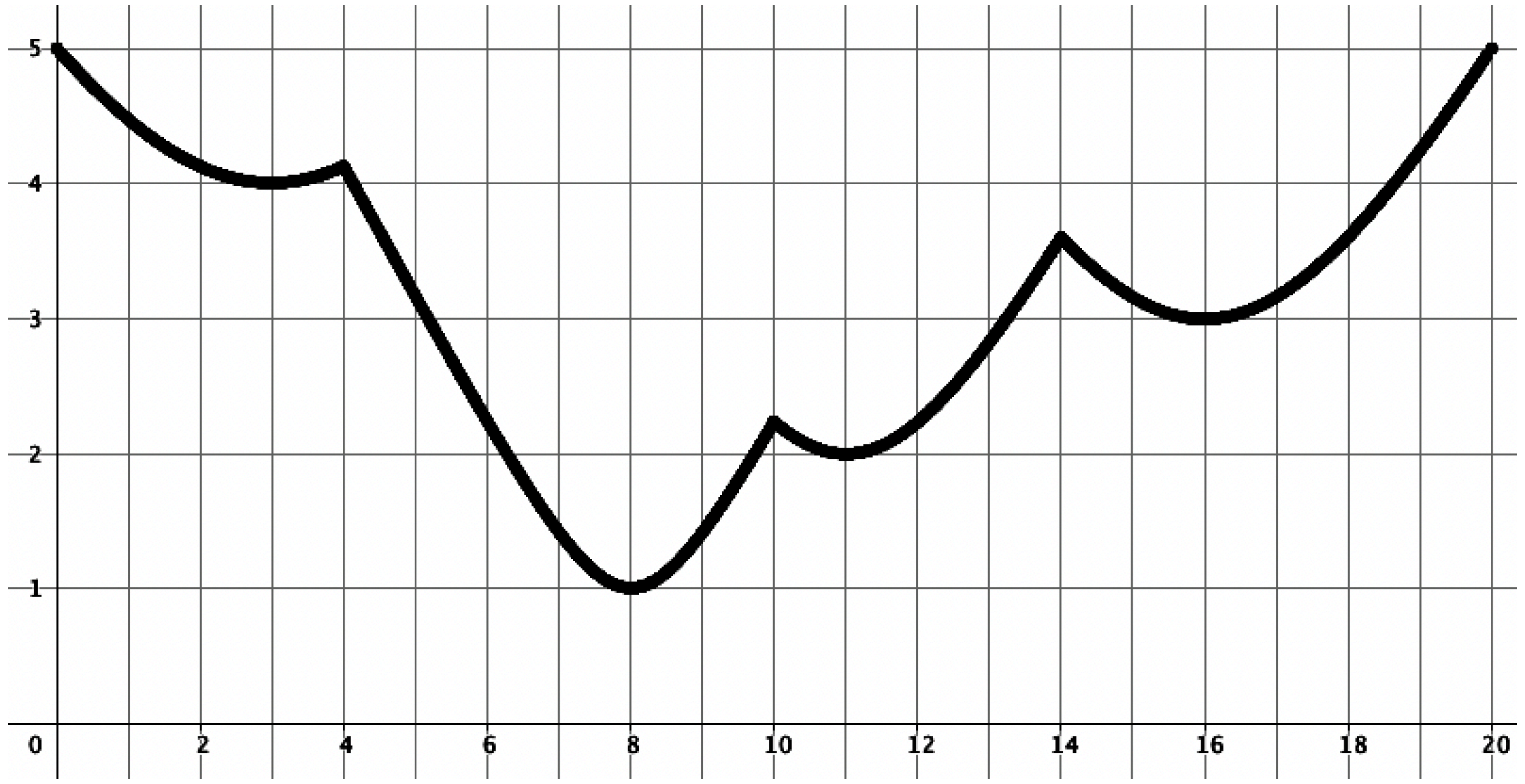
$7 \times \ldots = 1$

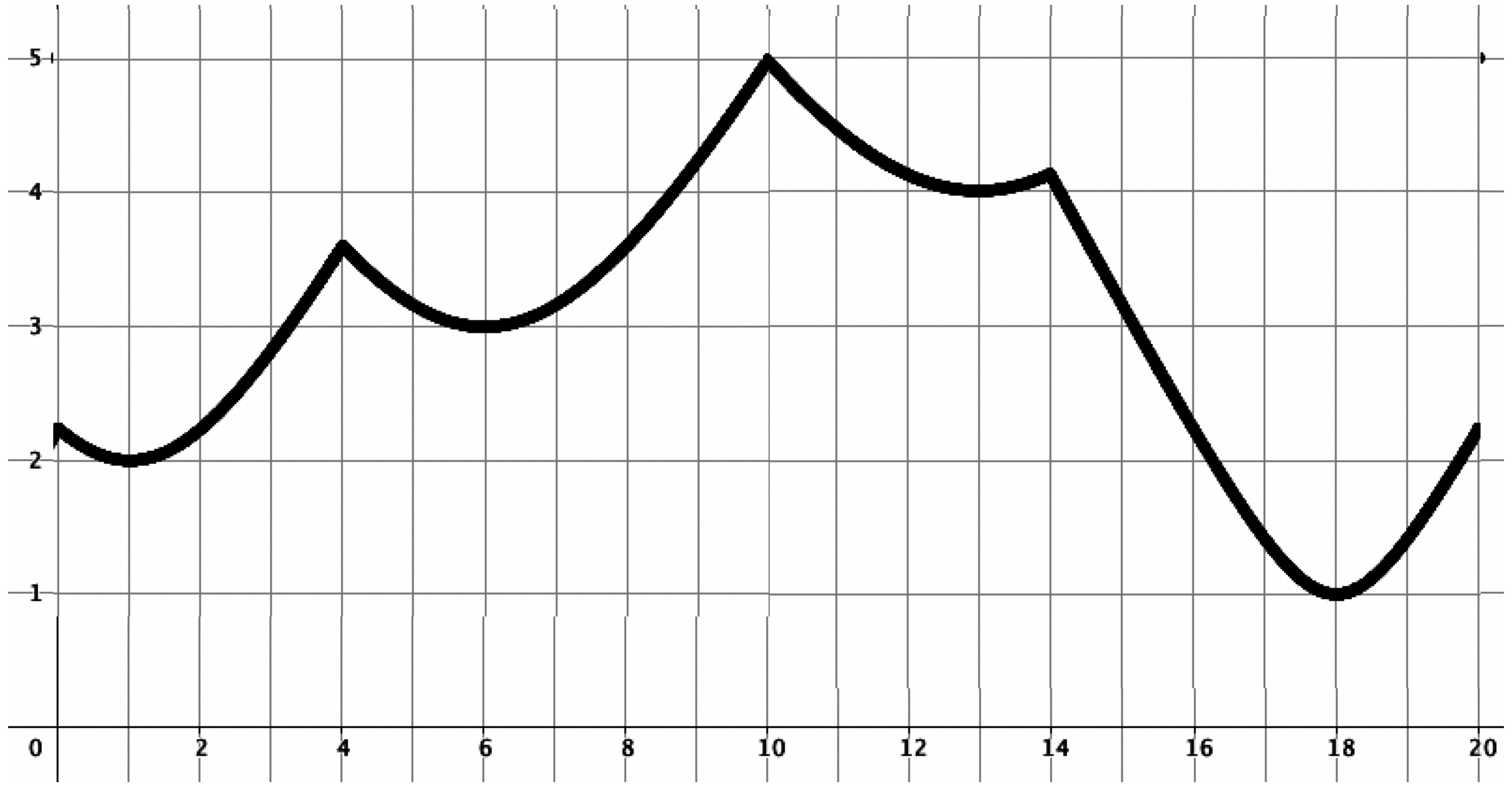
$\frac{a}{10^n}$

<u>Question :</u>

Parmi ces courbes, laquelle ou lesquelles modélisent ce problème ?







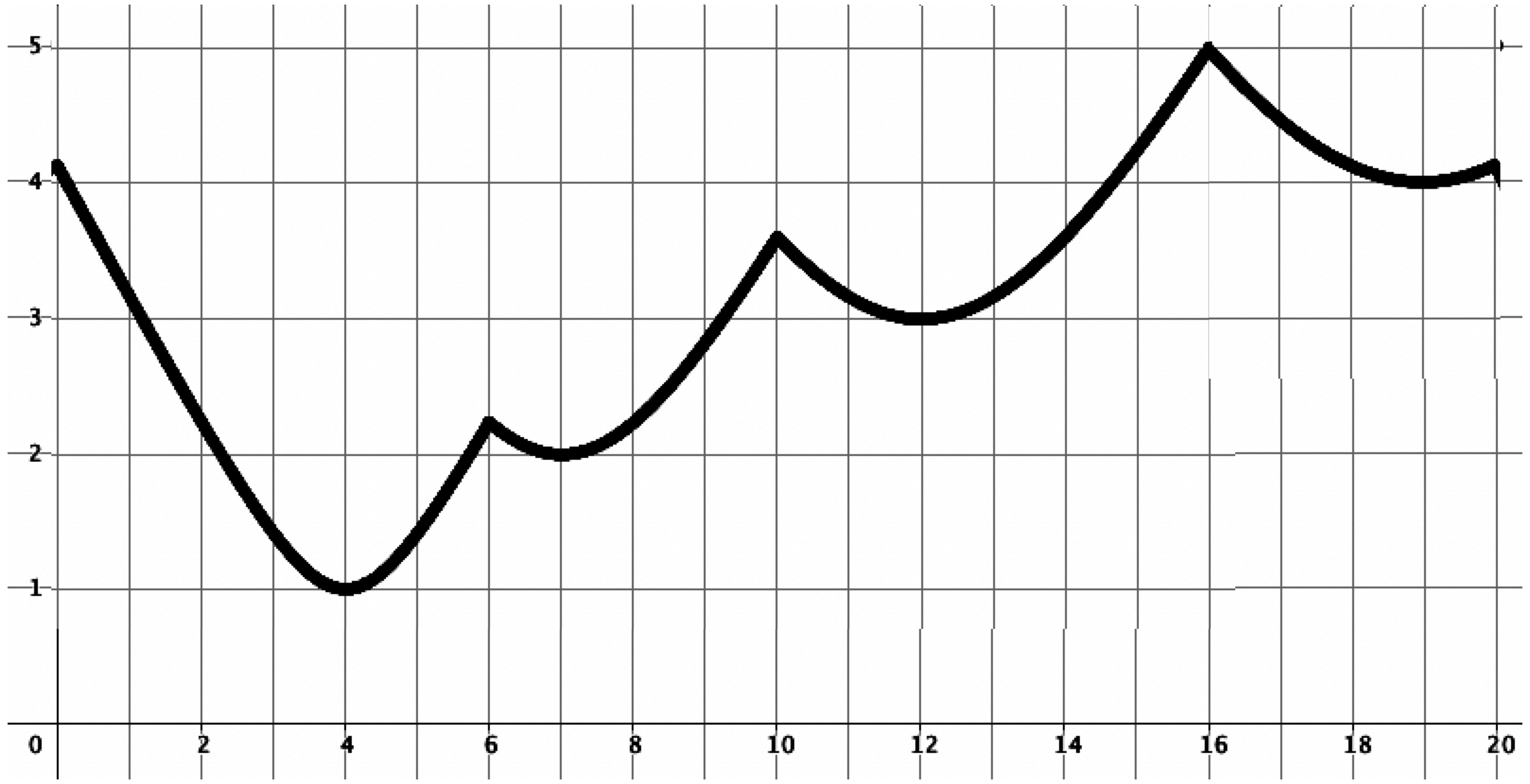
$0{,}999\ldots = 1$

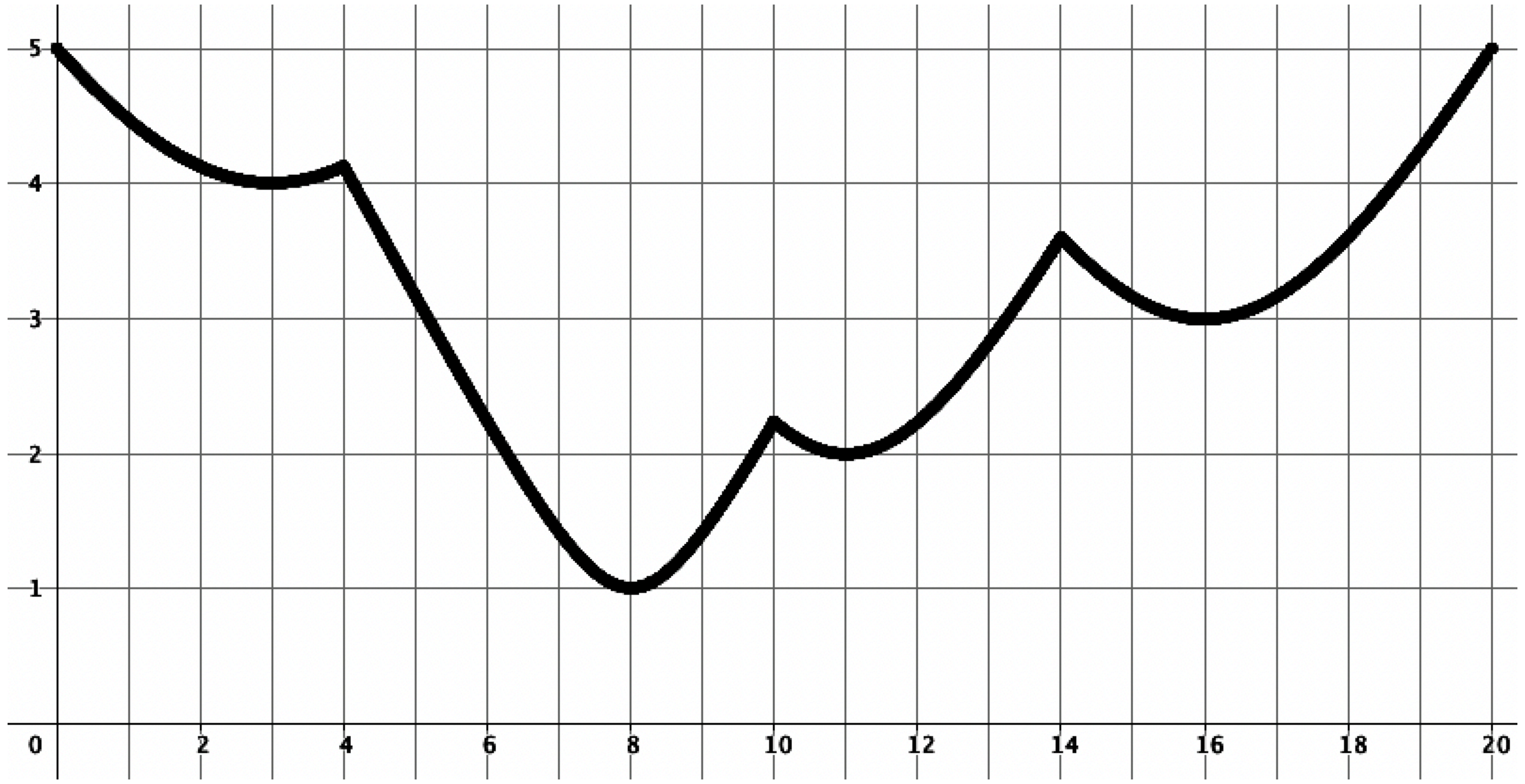
$7 \times \ldots = 1$

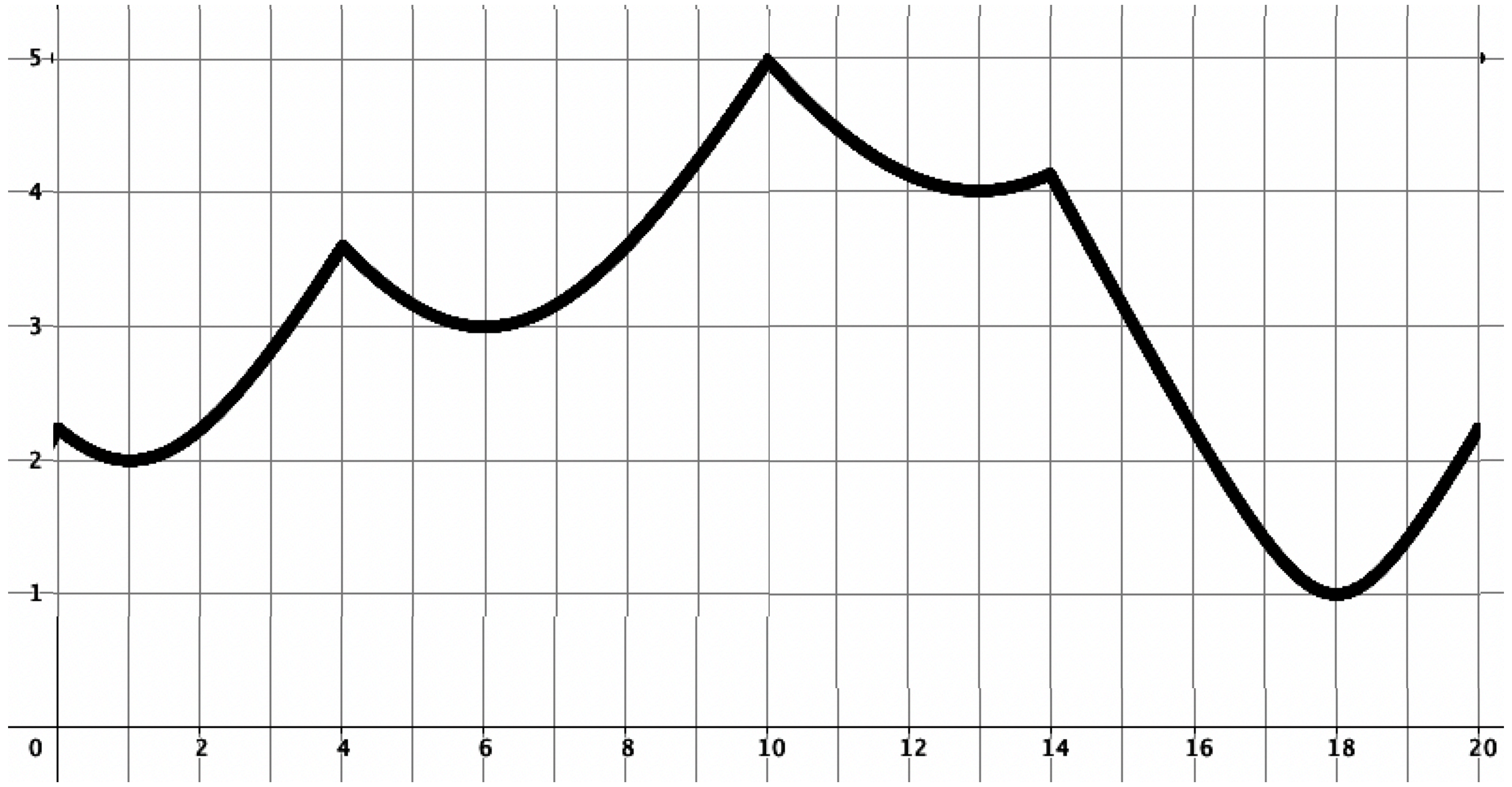
VARIATIONS DE FONCTIONS

<u>Question :</u>

Parmi ces courbes, laquelle ou lesquelles modélisent ce problème ?







$\dfrac{a}{10^n}$

Toutes !

Seul, le choix de la variable est différent.

$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS DE FONCTIONS

$7 \times \ldots = 1$

Alternative possible :

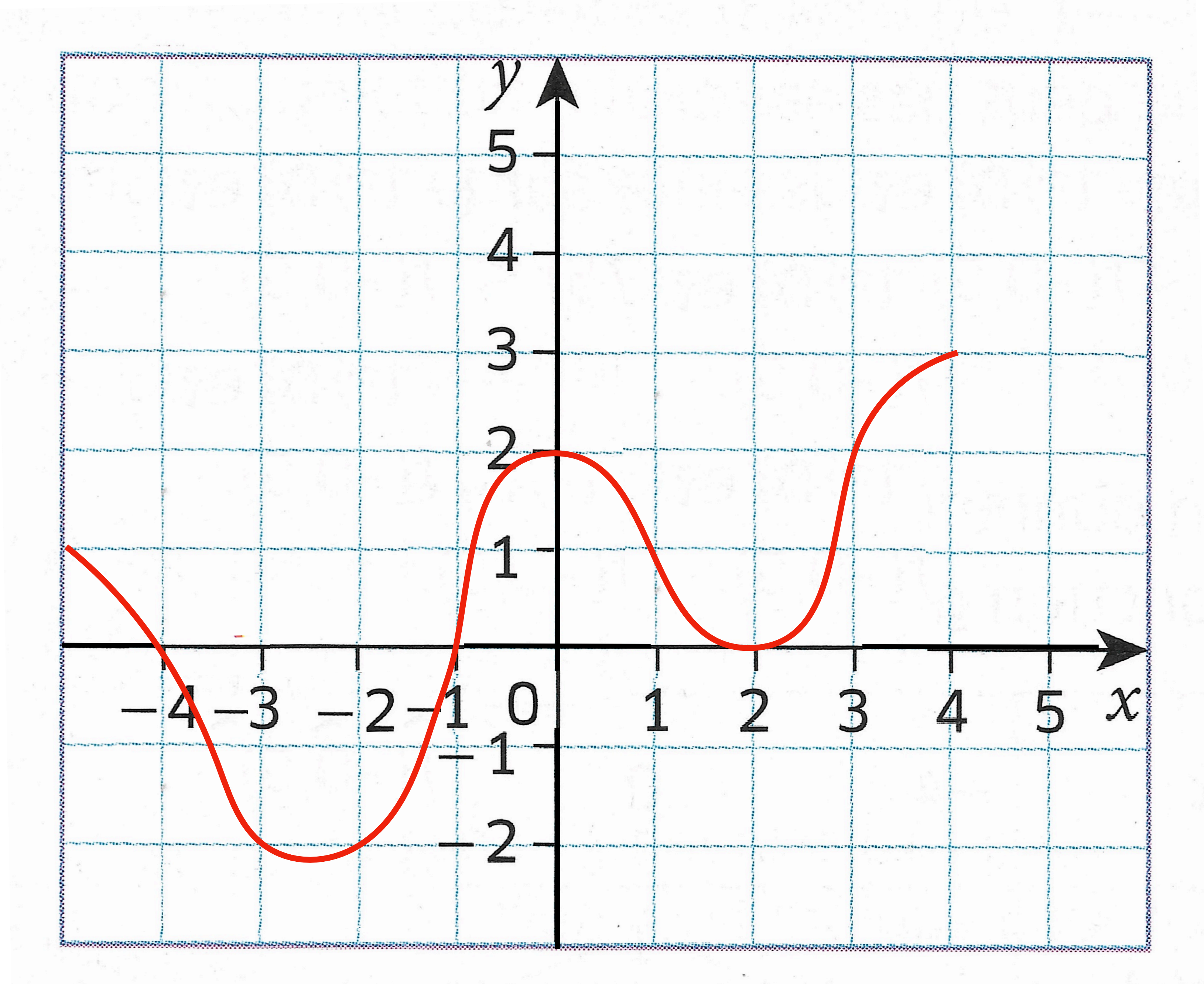
Émetteur :

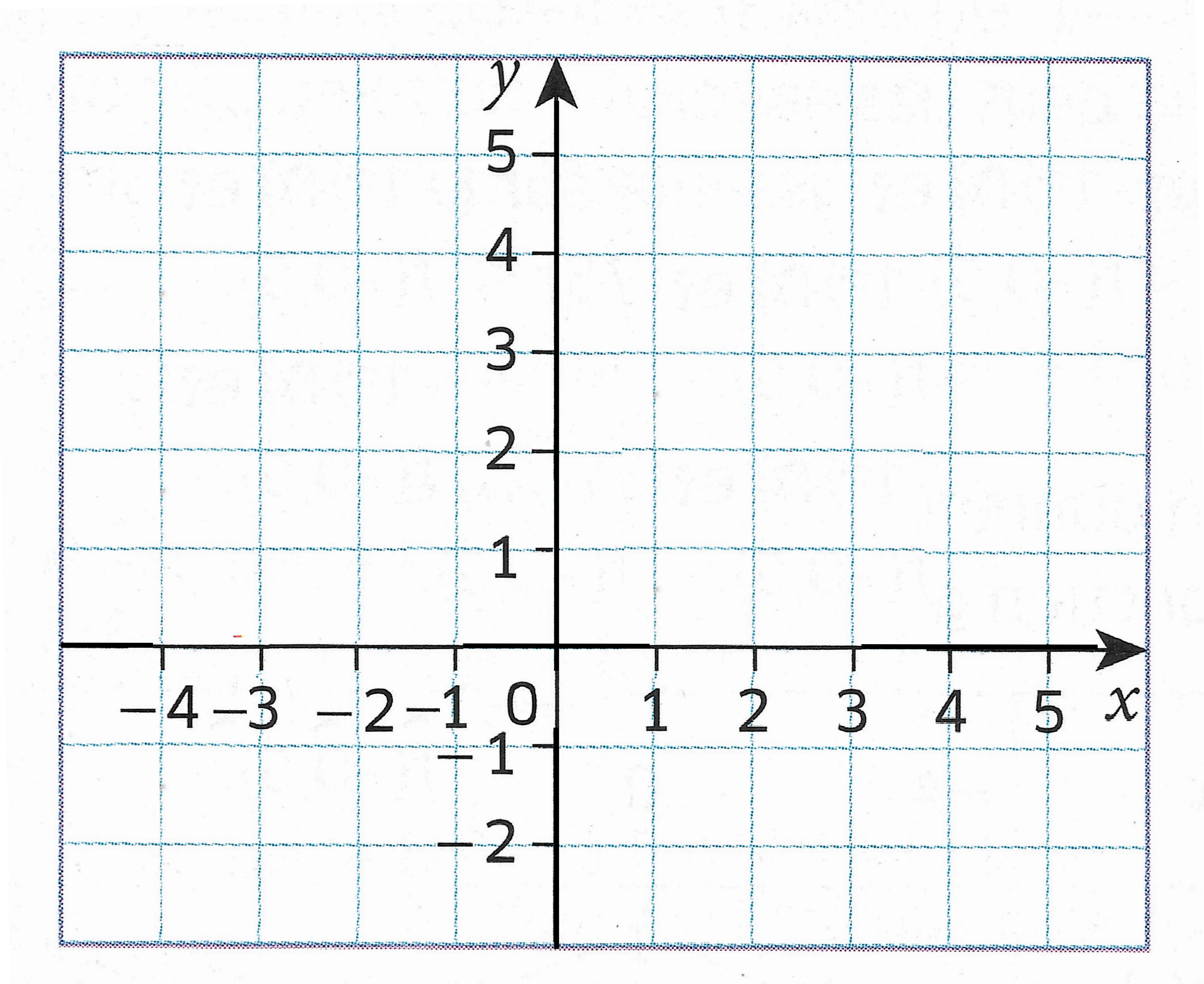
Décrire la courbe représentative de la fonction ci-dessous afin qu'une personne recevant vos informations puisse reproduire l'allure de cette courbe.

Récepteur :

Dessiner la courbe représentative d'une fonction respectant les informations reçues.

$\frac{a}{10^n}$





$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS DE FONCTIONS

$7 \times \ldots = 1$

$\frac{a}{10^n}$

Scénario possible :

Objectif :

- Introduire le vocabulaire associé aux variations d'une fonction et l'utilisation des tableaux de variations

Déroulé :

- Travail en binômes pour écrire sur une feuille un message (en fin de séance)
- Récupérer les messages (deux fois le même message par binôme) et les analyser
- Donner un message à chaque élève et une feuille avec un repère pour qu'il trace sa courbe (Prévoir une grille pour mieux gérer cette phase)
- Travail individuel : chaque élève trace la courbe à l'aide du message reçu
- Faire venir au tableau deux élèves ayant fait des erreurs pertinentes
- Débat avec la classe autour de la nécessité d'un vocabulaire pour communiquer
- Trace écrite

VARIATIONS DE FONCTIONS

Consigne 6 :

1) Quelles sont les fausses représentations que peuvent avoir les élèves sur la monotonie d'une fonction ?
2) Inventer un Vrai/Faux pour les déconstruire.

VARIATIONS DE FONCTIONS

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

$\frac{a}{10^n}$

Consigne 6 :

1) Quelles sont les fausses représentations que peuvent avoir les élèves sur la monotonie d'une fonction ?
2) Inventer un Vrai/Faux pour les déconstruire.

Monotonie ≠ Signe

Monotonie ≠ ordre des images des extrémités

Monotonie locale ≠ Monotonie globale

$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS DE FONCTIONS

$7 \times \ldots = 1$

Consigne 6 :

1) Quelles sont les fausses représentations que peuvent avoir les élèves sur la monotonie d'une fonction ?
2) Inventer un Vrai/Faux pour les déconstruire.

Exercice :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) Si une fonction f est croissante sur $[0 ; 5]$ alors elle est positive sur $[0 ; 5]$.

$\frac{a}{10^n}$

$\boxed{\textbf{Monotonie} \neq \textbf{Signe}}$

b) Si une fonction f vérifie $f(0) > f(5)$ alors f est décroissante sur croissante sur $[0 ; 5]$

$\boxed{\textbf{Monotonie} \neq \textbf{ordre des images des extrémités}}$

c) Si une fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0[$ et croissante sur $]0 ; +\infty[$ alors pour tout $x > 0$ et tout $y < 0$, on a : $f(x) > f(y)$.

$\boxed{\textbf{Monotonie locale} \neq \textbf{Monotonie globale}}$

VARIATIONS DE FONCTIONS

<u>Consigne 6 :</u>

3) Construire un Vrai/Faux permettant de travailler de fausses conceptions-élèves sur les tableaux de variations.

$0{,}999\ldots = 1$

VARIATIONS DE FONCTIONS

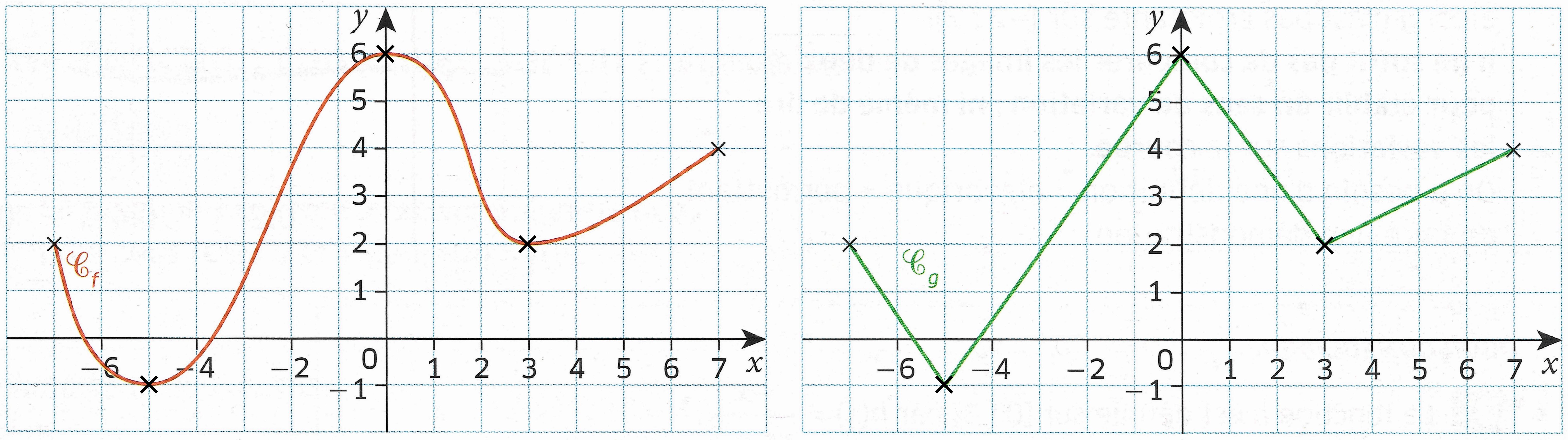
$7 \times \ldots = 1$

Consigne 6 :

3) Construire un Vrai/Faux permettant de travailler de fausses conceptions-élèves sur les tableaux de variations.

$\dfrac{a}{10^n}$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g ci-dessous.



L'affirmation suivante est-elle vraie ?

Ces deux fonctions sont différentes donc elles n'ont pas le même tableau de variations.

MODÉLISER ET NOTION DE FONCTION

<u>Consigne 7 :</u>

Les suisses sont les plus grands consommateurs de chocolat au monde.
Ils consomment en moyenne 10 kg de chocolat par an et par habitant.
Le directeur d'un supermarché dans la banlieue de Genève achète à une usine des boites de chocolats au prix de 5 € la boite.
Il revend ses boites de chocolat dans son supermarché à 13,60 € la boite.
Habituellement, il en vend 3000 par semaine.
Une étude de marché montre que toute baisse du prix de 20 centimes fait augmenter la vente de 300 boites par semaine.

Quel prix de vente de la boite de chocolat le directeur doit-il fixer pour réaliser un maximum de bénéfices ?

MODÉLISER ET NOTION DE FONCTION

$0{,}999\ldots = 1$ $7 \times \ldots = 1$ $\frac{a}{10^n}$

Consigne 7 :

Les suisses sont les plus grands consommateurs de chocolat au monde.
Ils consomment en moyenne 10 kg de chocolat par an et par habitant.
Le directeur d'un supermarché dans la banlieue de Genève achète à une usine des boites de chocolats au prix de 5 € la boite.
Il revend ses boites de chocolat dans son supermarché à 13,60 € la boite.
Habituellement, il en vend 3000 par semaine.
Une étude de marché montre que toute baisse du prix de 20 centimes fait augmenter la vente de 300 boites par semaine.

Quel prix de vente de la boite de chocolat le directeur doit-il fixer pour réaliser un maximum de bénéfices ?

On note n le nombre de baisse de 20 centimes.

Prix de vente d'une boîte $= 13{,}6 - 0{,}2n$

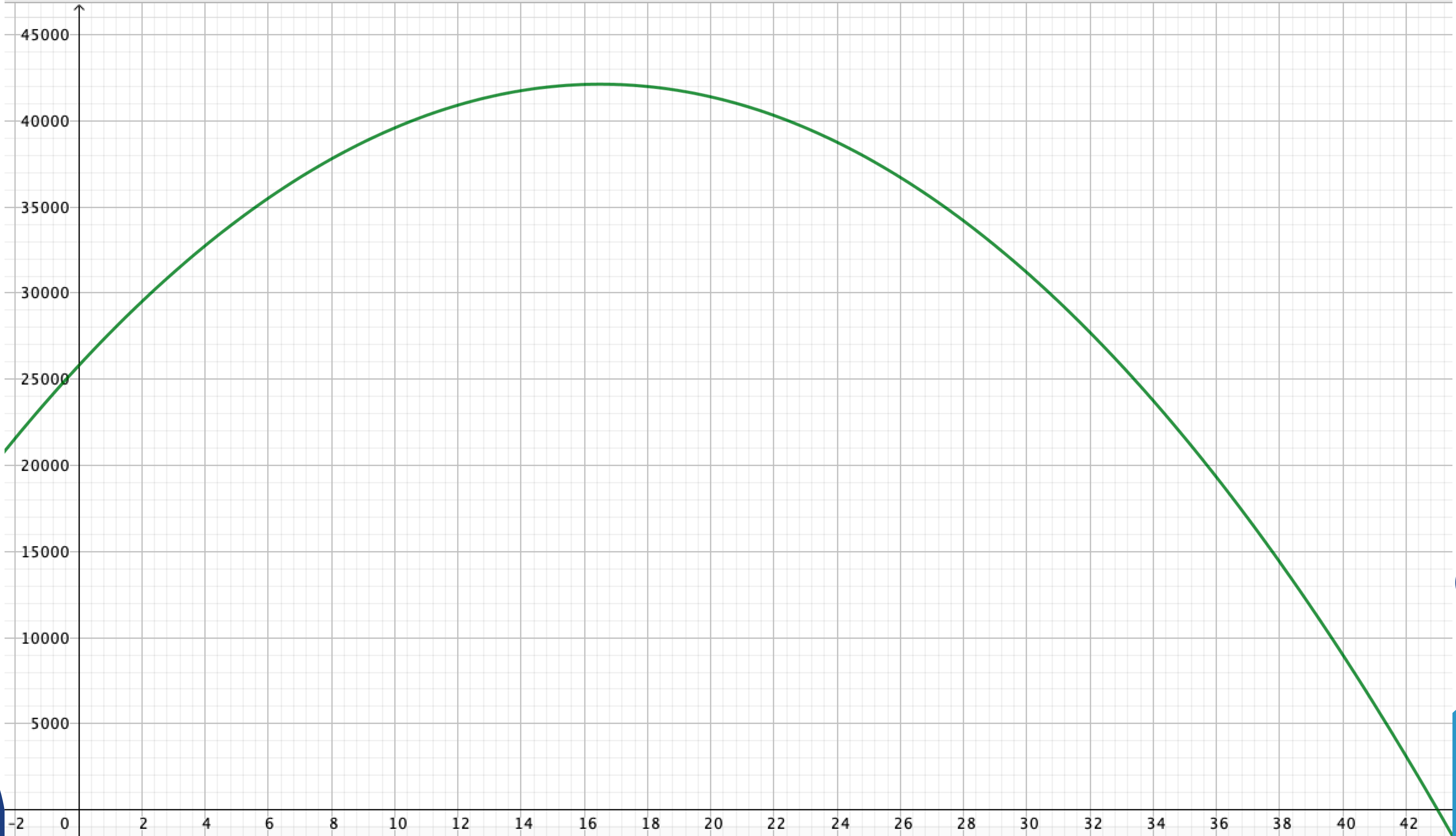
Nombre de ventes $= 3000 + 300n$

Prix de vente des boîtes $= (13{,}6 - 0{,}2n) \times (3000 + 300n)$

Coût de fabrication $= 5 \times (3000 + 300n)$

Bénéfices $= (8{,}6 - 0{,}2n) \times (3000 + 300n)$

MODÉLISER ET NOTION DE FONCTION

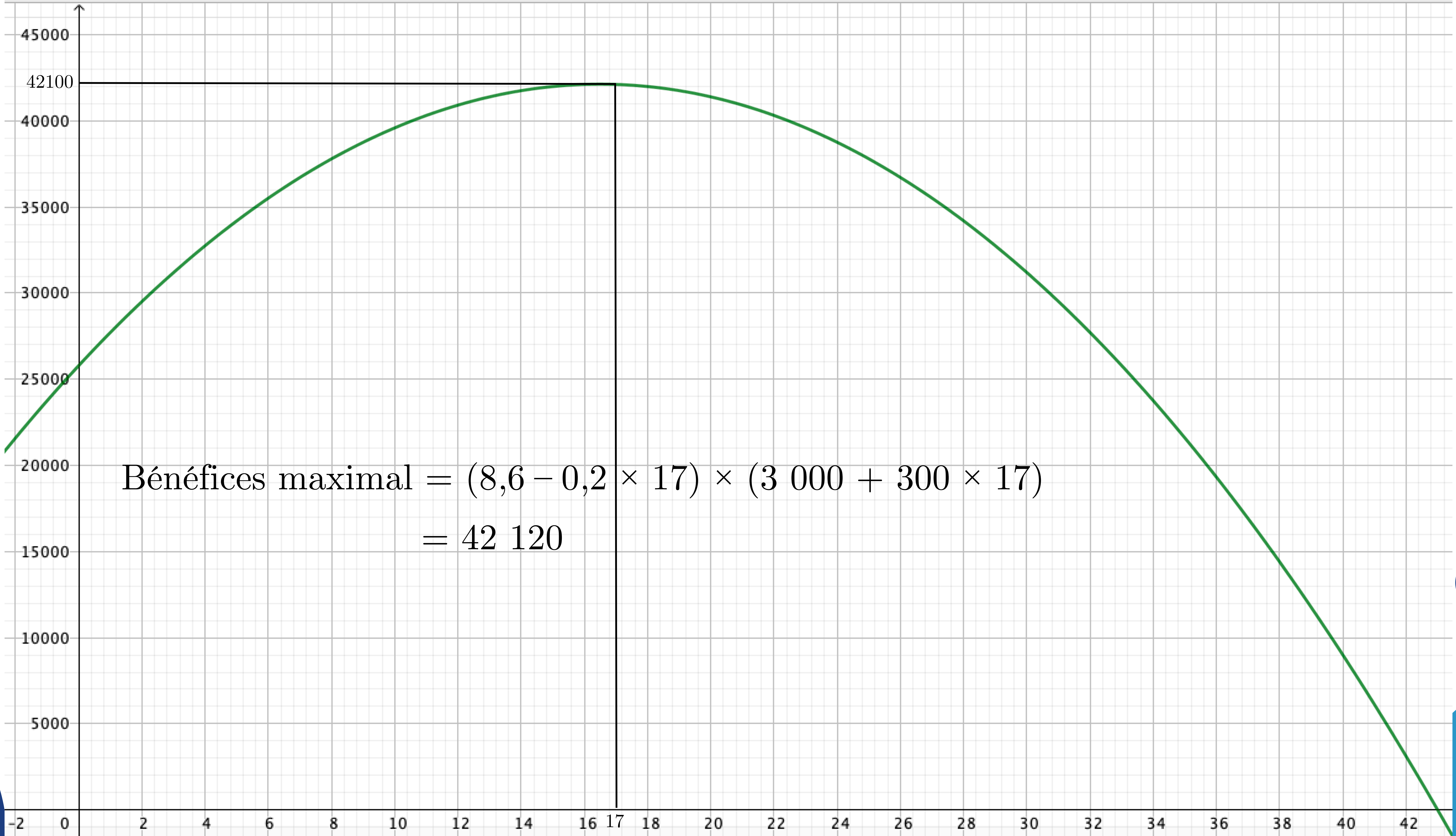


MODÉLISER ET NOTION DE FONCTION

0,999… = 1

7 × … = 1

$\frac{a}{10^n}$



$$\text{Bénéfices maximal} = (8{,}6 - 0{,}2 \times 17) \times (3\,000 + 300 \times 17)$$
$$= 42\,120$$