Document 1A[1]

§784. Lorsque les racines d'une équation ne sont pas rationnelles, soit qu'on puisse les exprimer par des quantités radicales, soit qu'on n'ait pas même cette ressource, comme c'est le cas pour les équations qui passent le quatrième degré, on est obligé de se contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'est-à-dire par des voies qui font qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, jusqu'à ce que l'erreur puisse être censée nulle. On a proposé différentes méthodes de cette espèce, nous allons en détailler les principales.

(…)

§786. Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$. On voit ici que x est plus grand que 4 & plus petit que 5 ; en conséquence de cela on fera $x = 4+p$, & on aura $xx = 16+8p+pp = 20$; mais comme pp est très-petit, on négligera ce terme pour avoir seulement l'équation $16+8p = 20$, ou $8p = 4$; elle donne $p = \frac{1}{2}$ & $x = 4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on suppose à présent $x = 4\frac{1}{2} + p$; on est sûr que p signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raison. On aura donc $xx = 20\frac{1}{4} + 9p$, ou $9p = -\frac{1}{4}$, et par conséquent $p = -\frac{1}{36}$; donc $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$
Que si l'on vouloit approcher davantage de la vraie valeur, on feroit $x = 4\frac{17}{36} + p$, & on auroit $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; ainsi $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$, & $p = -\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$. Donc $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

[1] Source :
EULER Léonard, 1774, *Elémens d'algèbre, tome 1er, traduits de l'allemand avec des notes et additions* [par Jean III Bernoulli], Lyon, Bruyset Père & Fils. Consultable sur gallica.bnf.fr

Document 1B : la méthode de Héron d'Alexandrie (1er siècle de notre ère)[2]

Il y a une méthode générale pour trouver, sans perpendiculaire, la surface d'un triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.

Par exemple, que les côtés du triangle soient de 7, 8 et 9 unités. Additionne 7, 8 et 9 ; cela fait 24 ; de ceci prends la moitié ; cela fait 12 ; retranche 7 ; il reste 5. De nouveau retranche de 12, 8 ; il reste 4 ; et retranche-lui de nouveau 9, il reste 3. Fais le produit de 12 par 5 ; cela fait 60, multiplie-le par 4 ; cela fait 240 ; multiplie ce dernier par 3, cela fait 720. Prends la racine[3] de celui-ci : ce sera la surface du triangle.

Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante : puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait $26\frac{2}{3}$; ajoute 27 ; cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié ; cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.
En effet, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même fait $720\frac{1}{36}$; de sorte que, la différence est de $\frac{1}{36}$.

Si nous voulons que la différence devienne inférieure à $\frac{1}{36}$, nous mettrons les $720\frac{1}{36}$ trouvés tout à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que la différence devient inférieure de beaucoup à $\frac{1}{36}$.

Document 1C :

102 APPROFONDISSEMENT

Méthode de Héron

Soit a un nombre réel strictement positif.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0\,;+\infty[$ et,

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est positive.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n - \sqrt{a} \geqslant 0\,.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

4. On admet que ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$.

Déterminer la valeur de ℓ.

Source : *Le livre scolaire*, Spécialité Maths Terminale, 2020. p.156
https://www.lelivrescolaire.fr/books/4634715

[2] **Source** : Traduit du grec par J. GUICHARD à partir de l'édition bilingue (grec-allemand) de Hermann Schöne - Leipzig 1903 : HERONIS ALEXANDRINI OPERA - Vol. III : *Métriques et Dioptrique* pp. 18 à 24.
Pour une traduction complète de l'ouvrage :
Héron d'Alexandrie *Metrica*. Introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac. Farbizio Serra Editore : Rome, Pise. 2014.

[3] C'est le même mot qui, en grec, désigne la racine et le côté : πλευρα (pleura).

Document 2[4] :

Mais à fin de rendre cette matière plus intelligible, je dis premièrement que l'apparence se peut estimer, et même qu'elle peut se vendre ou acheter.

(…) *Prenons un example. Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour lequel des deux il faudroit plutost parier. Je dis qu'il faut plutost parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est à dire que je pourrois parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ay un grand avantage. Il est vray que non obstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'auray gagné plutost que perdu.*

Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voicy la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4. l'autre 2 et 3. au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, sçavoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles), qu'il y a de manières. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables pour huit.

(…) *Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est à dire que cette maxime fondamentale aura lieu :*

L'apparence ou probabilité de l'effect A, garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effect B, que le nombre de toutes les manières capables de produire l'effect A garde au nombre de toutes les manières de produire l'effect B, supposant toutes ces manières également faisables.

G.W. Leibniz, *Du jeu de Quinquenove* (1678), extraits.

[4] Sources:
MORA-CHARLES Maria Sol. « Quelques jeux de hazard selon Leibniz ». *Historia Mathematica*, 1992, n°19, p.125-157.
Reproduit trois manuscrits inédits de Leibniz, avec une présentation rapide de Madame Mora-Charles (Université de San Sebastian).
LEIBNIZ Gottfried Whilhelm. *L'estime des apparences : 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Textes édités et présentés par Marc Parmentier. Paris : Vrin, 1995.