

## Documents 1 et 1bis :

Lorsque tu veux diviser un nombre quelconque par deux, commence par la première position et divise-la par deux. S'il s'y trouve un nombre impair, divise par deux les pairs, et il restera un que tu diviseras par deux, c'est-à-dire que tu diviseras en deux moitiés, et tu établiras une moitié qui est fraction trente de soixante qui font un, et pose 30 sous la même position. Ensuite, tu diviseras par deux la position suivante, si son nombre est pair. S'il est impair, prends une moitié du pair et pose-la à sa place; établis cinq comme moitié du un restant et pose-les dans la position qui est avant celle-ci. S'il n'y a que un dans la position que tu veux diviser par deux, pose à sa place un zéro, et pose cinq dans la position qui est avant celle-ci. Opère de même dans toutes les positions.

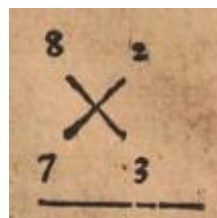
**Source :** Al-Khwarizmi (1992). *Le calcul indien (algorismus)*. Edition critique, traduction et commentaires de André Allard. Paris : Librairie A. Blanchard, et Namur : Société des Etudes Classiques.

**Pour aller plus loin :** Chorlay, R. (2021). Can students justify the correctness of an arithmetic algorithm? A case-study at the primary-secondary transition. *Recherche en didactique des mathématiques*, 41(2), 177–216.

<https://revue-rdm.com/2021/can-students-justify-the-correctness-of-an-arithmetic-algorithm-a-case-study-at-the-primary-secondary-transition/>

Si vous avez oublié vos tables de multiplication ... une astuce de 1543.

Multiply. Master. So I iudge it best, pnt because  
 eation of that great sums cannot be multiplied, but  
 Digits. by the Multiplication of Digits, therefore  
 I thinke it best to shew you first the way of  
 multiplying then: As when I say, 8. times 8  
 or 8. times 9. ec. And as for the small digits  
 under 5. it were but folly to teach any rule,  
 seeing they are so easy that euery childe can  
 doe it. but for the Multipication of the gtea-  
 ter Digits, thus shall you doe;



Last of al, I multiply the two differences,  
 saying 2, times 3, make 6. that must I ever  
 set vnder the differences, beneath the line :  
 then must I take 1. of the differences (which  
 I wil, for al is like) from the other digit (not  
 from his owne) as the lines of the Crosse  
 warne me, and that that is  
 left, must I write vnder the *Digit differēce.*  
 digits. As in this example  
 if I take 2, from 7, or 3,  
 from 8, there remaineth 5.  
 that 5, must I write vnder  
 the digits, & then there ap-  
 peareth the multiplication of 7. times 8. to  
 be 56. And so likewise of any other Digits,



Source : Robert Record. *The Ground of Arts (afterwards augmented by Dr. John Dee)*. London: imprimé par Roger Jackson, 1618. Première édition 1543.

Extraits p.102-103. Ouvrage disponible sur Google Books.

**Document 2** : Un extrait de Cléomède<sup>1</sup>

« *Qu'il soit admis pour nous :*

- *premièrement que Syène et Alexandrie sont établies sous le méridien ;*
- *deuxièmement que la distance entre les deux cités est de 5 000 stades ;*
- *troisièmement que les rayons envoyés de différents endroits du soleil sur différents endroits de la Terre sont parallèles ; en effet, les géomètres supposent qu'il en est ainsi ;*
- *quatrièmement que ceci soit admis comme démontré auprès des géomètres, que les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux ;*
- *cinquièmement que les arcs de cercle qui reposent sur des angles égaux sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont la même similitude et le même rapport relativement aux cercles correspondants, ceci étant démontré aussi chez les géomètres. Lorsqu'en effet les arcs de cercle reposent sur des angles égaux, quel que soit l'un (d'entre eux), s'il est la dixième partie de son propre cercle, tous les autres seront les dixièmes parties de leurs propres cercles.*

*Celui qui pourrait se prévaloir de ces faits comprendrait sans difficulté le cheminement d'ÉRATOSTHÈNE qui tient en ceci : il affirme que Syène et Alexandrie se tiennent sous le même méridien [...]. Il dit aussi, et il en est ainsi, que Syène est située sous le tropique de l'été. À cet endroit, au solstice d'été, lorsque le Soleil est au milieu du ciel, les gnomons des cadrans solaires concaves sont nécessairement sans ombres, le soleil se situant exactement à la verticale [...]. À Alexandrie à cette heure-là, les gnomons des cadrans solaires projettent une ombre, puisque cette ville est située davantage vers le nord que Syène [...].*

*Si nous nous représentons des droites passant par la Terre à partir de chacun des gnomons, elles se rejoindront au centre de la Terre. Lorsque donc le cadran solaire de Syène est à la verticale sous le soleil, si nous imaginons une ligne droite venant du Soleil jusqu'au sommet du gnomon du cadran, il en résultera une ligne droite venant du soleil jusqu'au centre de la Terre.*

*Si nous imaginons une autre ligne droite à partir de l'extrémité de l'ombre du gnomon et reliant le sommet du gnomon du cadran d'Alexandrie au soleil, cette dernière ligne et la ligne qui précède seront parallèles, reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre.*

*Sur ces droites donc, qui sont parallèles, tombe une droite qui va du centre de la terre jusqu'au gnomon d'Alexandrie, de manière à créer des angles alternes égaux ; l'un*

*d'eux se situe au centre de la Terre à l'intersection des lignes droites qui ont été tirées des cadrans solaires jusqu'au centre de la Terre, l'autre se trouve à l'intersection du sommet du gnomon d'Alexandrie et de la droite tirée de l'extrémité de son ombre jusqu'au soleil, à son point de contact avec le gnomon.*

---

<sup>1</sup> Source : N. Decamp et C. de Hosson (2011). Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Eratosthène. *Bulletin de l'Union des Physiciens* n°105, pages 1065-1082.

Et sur cet angle s'appuie l'arc de cercle qui fait le tour de la pointe de l'ombre du gnomon jusqu'à sa base tandis que celui qui est proche du centre de la Terre s'appuie l'arc qui va de Syène à Alexandrie. Ces arcs de cercle sont donc semblables l'un à l'autre en s'appuyant sur des côtés égaux. Le rapport qu'a l'arc du cadran avec son propre cercle, l'arc qui va de Syène à Alexandrie a ce rapport aussi. Mais on trouve que l'arc du cadran est la cinquantième partie de son propre cercle. Il faut donc nécessairement que la distance qui va de Syène à Alexandrie soit la cinquantième partie du plus grand cercle de la Terre. Et elle est de 5 000 stades. Le cercle dans sa totalité fait donc 250 000 stades. Voilà la méthode d'ÉRATOSTHÈNE ».

CLÉOMÈDE, *Le mouvement circulaire des corps célestes*, dans la traduction de Richard GOULET

Document 3 : Deux extraits de *La Disme* de Simon Stevin (1548-1620)

DEFINITION I.

**D**ISME est une espèce d'Arithmétique, inventée par la Dixiesme progression, consistente en caractères des chiffres, par lesquels se décrit quelque nombre, & par laquelle l'on dépêche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par caractères des chiffres en ceste sorte IIII, auxquels appert que chaque 1 est la dixiesme part de son prochain caractère precedent. Semblablement en 2378, chaque unité du 8, est la dixiesme de chaque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traiter, ayent des noms, & que ceste maniere de computation est trouvée par consideration de telle dixiesme ou disme progression, voire qu'elle consiste entierement en icelle, comme apparoitra cy apres, nous nommons ce traité proprement & convenablement la DISME, par la mesme on peut operer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrans en nos affaires, comme sera demonstré au suyvant.

DEFINITION II.

Tout nombre entier proposé se dict COMMENCEMENT, son signe est tel ①.

EXPLICATION.

Par exemple quelque nombre proposé de trois cens soixantequatre, nous le nommons trois cens soixantequatre COMMENCEMENT, les descrivant en ceste sorte 364 ①. Et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chaque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ②; & chaque dixiesme partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ③. Et ainsi des autres chaque dixiesme partie, de l'unité de son signe precedent, tousiours en l'ordre un d'avantage.

EXPLICATION.

Comme 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, c'est à dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces 9 Quartes; & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdits nombres sont  $\frac{3}{10} \frac{7}{100} \frac{5}{1000} \frac{9}{10000}$ , ensemble  $\frac{3759}{10000}$ , ensemble  $\frac{3759}{10000}$ . Semblablement 8 ① 9 ② 3 ③ 7 ④ vallent  $8 \frac{9}{10} \frac{3}{100} \frac{7}{1000}$ , ensemble  $8 \frac{937}{1000}$ . Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi sçavoir que nous n'usons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté ①, n'excede jamais le 9. Par exemple nous n'eschivons pas 7 ① 12 ②, mais en leur lieu 8 ① 2 ②, car ils vallent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la precedente seconde & troisieme Definition se disent en general NOMBRES DE DISME.

Fin des Definitions.

(...)

PROPOSITION III, DE LA  
MULTIPLICATION.

**E**stant donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur: Trouver leur produit.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32<sup>ⓐ</sup> 5<sup>ⓑ</sup> 7<sup>ⓒ</sup> 2<sup>ⓓ</sup>, & multiplicateur 89<sup>ⓔ</sup> 4<sup>ⓕ</sup> 6<sup>ⓖ</sup> 2<sup>ⓗ</sup>. Explication du requis. Il faut trouver leur produit. Construction. On mettra les nombres donnez en ordre comme cy joignant, multipliant selon la vulgaire manière de multiplication par nombres entiers, en ceste sorte:

$$\begin{array}{r}
 \text{ⓐ} \text{ⓑ} \text{ⓒ} \text{ⓓ} \\
 3257 \\
 8946 \\
 \hline
 19542 \\
 13028 \\
 29313 \\
 26056 \\
 \hline
 29137122 \\
 \text{ⓔ} \text{ⓕ} \text{ⓖ} \text{ⓗ}
 \end{array}$$

Donne produit (par le 3<sup>e</sup> probleme de l'Arithmetique) 29137122. Or pour sçavoir que ce sont, on ajoutera les deux derniers signes donnez, l'un 2<sup>ⓗ</sup>, & l'autre aussi

2<sup>ⓔ</sup>, font ensemble 4<sup>ⓕ</sup>, nous dirons donc que le signe du dernier caractère du produit sera 4<sup>ⓕ</sup>, lequel estant cogneu, tous les autres seront notoires, à cause de leur ordre continu; De sorte que 2 9 1 3 7 1 2 2 4<sup>ⓕ</sup> sont le produit requis.

(...)

## NOTA.

Si le dernier signe du nombre à multiplier fust inegal au dernier signe du multiplicateur; par exemple l'un 3<sup>ⓐ</sup> 7<sup>ⓑ</sup> 8<sup>ⓒ</sup>, l'autre 5<sup>ⓔ</sup> 4<sup>ⓕ</sup> 2<sup>ⓗ</sup>, l'on fera comme dessus, & la disposition des caracteres de l'operation sera telle:

$$\begin{array}{r}
 \text{ⓐ} \text{ⓑ} \text{ⓒ} \\
 378 \\
 542 \\
 \hline
 1512 \\
 1890 \\
 \hline
 20412 \\
 \text{ⓔ} \text{ⓕ} \text{ⓗ}
 \end{array}$$

Source : Simon Stevin, *La Disme*, in *Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard*, Bonaventure & Elsevier, Leyde, 1634. p.206-213.

Disponible sur [http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101\\_11463Index.asp](http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101_11463Index.asp)

Pour aller plus loin : C. Goldstein (2014) *Les fractions décimales : un art d'ingénieur ?*

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00734932/document>

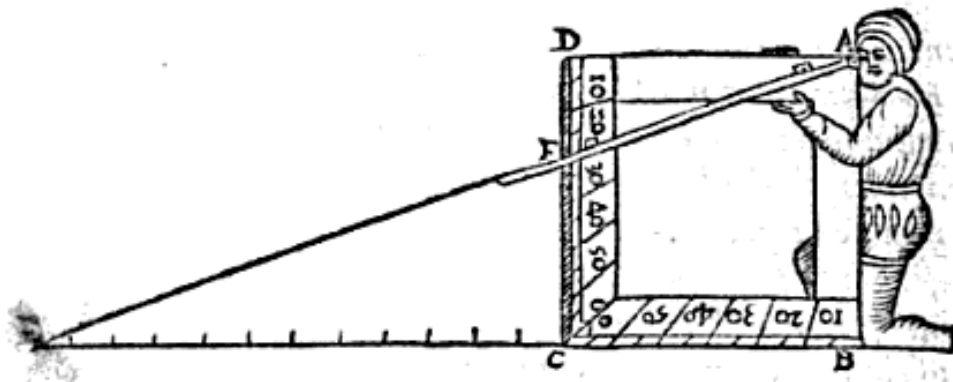
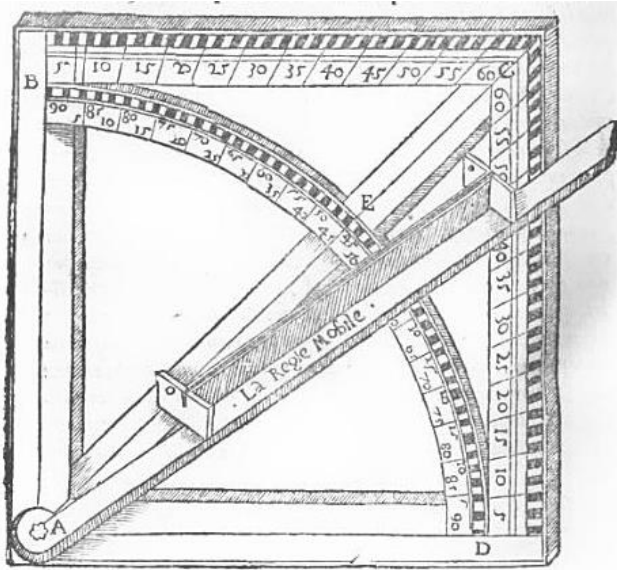
**Document 4 :**

Au V<sup>ème</sup> siècle de notre ère, le philosophe néo-platonicien Proclus de Lycie rapportait certaines méthodes pour obtenir des triangles « rectangles en nombres », c'est-à-dire des triangles rectangles dont les longueurs des côtés ont des mesures entières. Voici un extrait :

(...) certaines méthodes pour découvrir de tels triangles nous ont été transmises, et l'on fait remonter l'une à Platon, l'autre à Pythagore. La méthode pythagoricienne part de nombres impairs, pose le nombre impair donné comme étant le plus petit des côtés situés autour de l'angle droit, et, après avoir pris le carré de ce nombre et en avoir retranché une unité, pose la moitié du nombre restant comme étant le plus grand des côtés situés autour de l'angle droit, et forme enfin le côté restant, qui sous-tend, après avoir ajouté aussi une unité à ce nombre. Ainsi, par exemple, si, après avoir pris 3, l'avoir carré et en avoir retranché une unité, l'on prend 4, moitié de 8, et, si on lui ajoute de nouveau une unité, on forme 5 et l'on trouve le triangle rectangle ayant un côté de trois unités, un autre de quatre unités et un autre de cinq unités. D'autre part, la méthode platonicienne procède en partant de nombres pairs. En effet, prenant le nombre donné pair, elle le pose comme étant un des côtés situés autour de l'angle droit, le divise en deux parties égales, carre la moitié, puis forme le côté qui sous-tend l'angle droit [côté que nous nommons l'hypoténuse] en ajoutant une unité à ce carré et forme l'autre côté situé autour de l'angle droit en retranchant une unité de ce carré. Ainsi, ayant pris le nombre 4, ayant carré sa moitié 2 et formé 4, si l'on retranche une unité, on forme 3, et, en ajoutant une unité, on forme 5 et obtient le même triangle produit par l'autre méthode ; car le carré de ce dernier nombre est égal à la somme des carrés de 3 et de 4.

Source : Proclus de Lycie *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide* Traduits du grec par Paul Ver Eecke (1948) Réédition IREM de Lille. Extrait du commentaire sur la proposition 47.

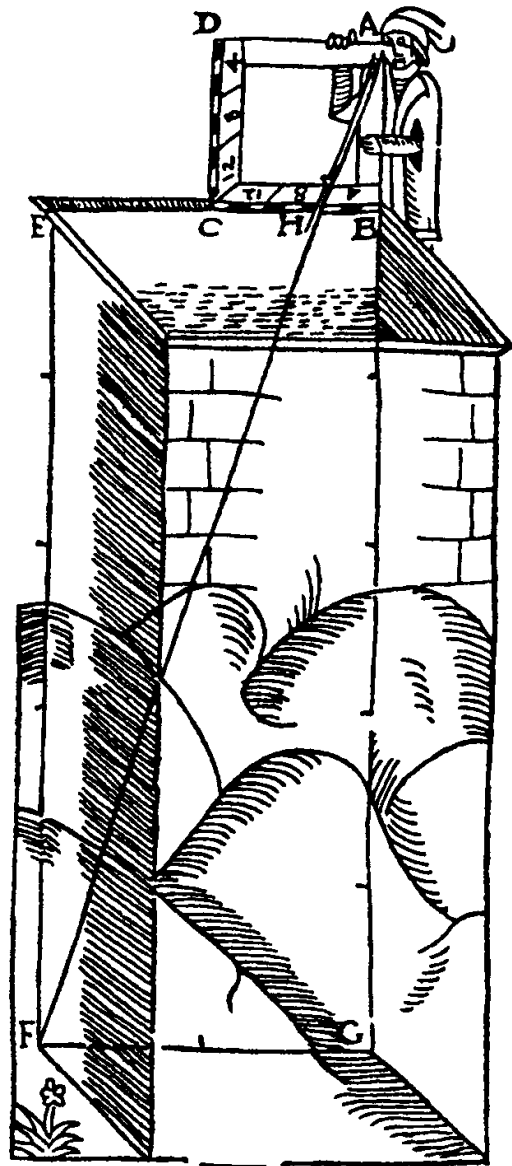
**Document 5<sup>2</sup> : Le carré géométrique** (*Protomathesis*, fol.2verso, 3verso, 22verso)



<sup>2</sup> Sources :

- Chapitres de F. Métin et P. Guyot dans : E. Hébert (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire*. Paris : Ellipses, 2004.
- Oronce Finé, *Protomathésis* (1532), disponible sur GoogleBooks. Sa version en français (par Pierre Forcadel, 1870) l'est aussi. C'est à la pagination de ce dernier que nous renvoyons)

Soit doncques (à fin que premierement nous entrons en matiere) présenté le puis quadrangulaire  $befg$ , la profondeur duquel  $bg$ , ou  $ef$ , soit proposée à mesurer. Dresse le quarré sur le costé  $bc$ , & au droit du costé de la bouche du puis  $be$  : & soit aussi le costé  $ab$ , pareillement au droit de  $bg$ . En apres ayant mis l'œil en  $a$ , remuë tant de fois la reigle iusques à ce que par l'un ou l'autre trou des pinules tu aperçois le visible & plus bas terme  $f$ , constitué diametrallement à  $bg$ . Ces choses ainsi gardées, prens garde à l'attouchement de la reigle au costé  $bc$ , aduenant en la ligne de foy : & icelluy soit fait au poinct  $h$ . Celle raison doncques que aura la partie  $hb$ , au costé  $ba$ , la mesme gardera  $gf$ , c'est à dire  $be$  (car elles sont egalles) à la longueur de la profondeur donnée  $ag$ . Pour ce que les deux triangles  $abh$ , &  $agf$ , sont equiangles ensemble : ainsi comme est facilement manifeste par la 29. du premier des Elemens d'EUCLIDE, & l'angle  $abh$ , est egal à l'angle  $agf$ , car l'un & l'autre est droict : parquoy est fait, par la 4. du sixiesme du mesme EUCLIDE, comme  $hb$ , à  $ba$ , ainsi la largeur du puis  $fg$ , à la longueur ou profondeur  $ga$ , composée de  $gb$ , &  $ba$ .



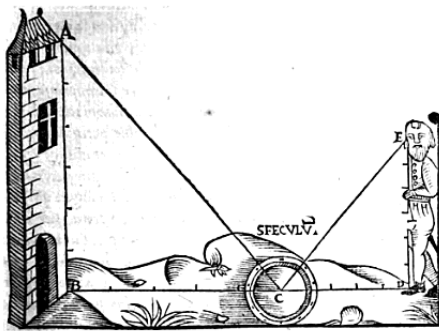
Soit pour exemple  $bh$ , de 20. parties, desquelles le costé du quarré est 60 : & soit mesurée  $be$ , & soit par exemple de 9. piedz ; d'autant de piedz aussi sera  $gf$  : Car ce sont les costez opposez du parallelograme  $befg$ , qui sont egaux ensemble par la 34. du mesme premier. Multiplie doncques 9. par 60. feront 540 que tu diuieras par 20. & auras pour quotient 27 : d'autant de piedz doncques sera  $ag$  :

Questions :

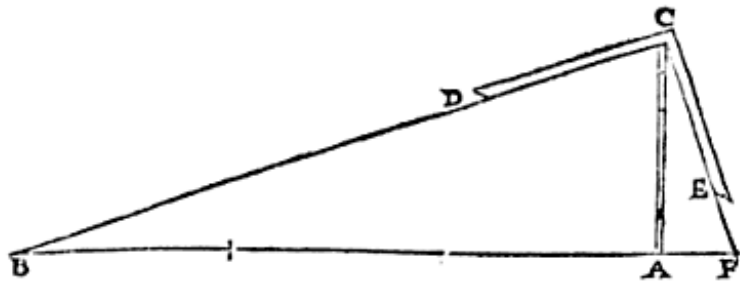
- Le texte cite trois propositions d'Euclide. En vous appuyant sur le contexte, proposer un énoncé des propositions I.34 et VI.4.
- Rappelez les grandes étapes des démonstrations de ces deux propositions. Plusieurs démonstrations peuvent être envisagées.
- La fin du texte utilise une procédure pour obtenir le nombre 27 : laquelle ? Quelle est son but ? Connaissez-vous d'autres procédures utilisables dans ce contexte ? En quelles classes ces procédures sont-elles étudiées ?
- Dans le calcul final, certaines longueurs sont mesurées en « parties » et d'autres en « pieds », est-ce grave ?

**Document 5bis : autres instruments de mesure de distances inaccessibles**

(*Protomathesis*, 16recto, 7recto, 15 recto)



Le *speculum* (miroir)



L'équerre

Questions :

- Justifier le principe du miroir, en précisant les connaissances requises.
- Énoncer et démontrer le théorème justifiant l'utilisation de l'équerre.