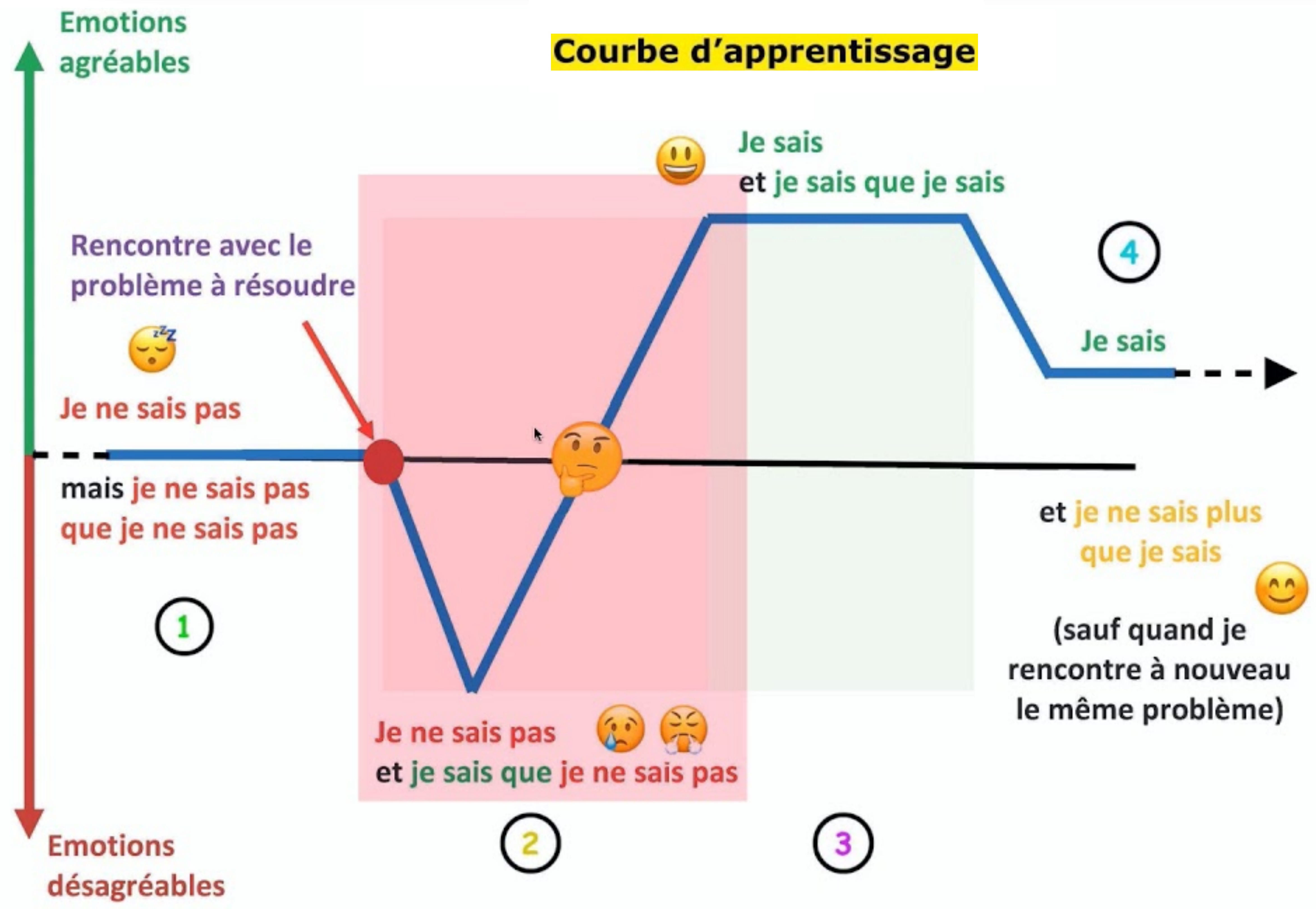
Notion de fonction



guillaume.didier@inspe-paris.fr

Liste non exhaustive de documents sur la notion de fonction

Documents d'accompagnement du cycle 4 et du lycée :

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Fonction (ressources pour la classe de 2nde)

Articles issus de la revue petit'x :

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions

Variables et fonctions du collège au lycée

Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante.

Enseigner les fonctions linéaires : le point de vue de la co-variation

Brochure Irem de Bordeaux :

Les fonctions : du collège jusqu'en seconde.

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

Plan de la séance sur la notion de fonction

Réflexions autour de la (ou des) définition(s) de fonction

Progression de l'enseignement la notion de fonction au cycle 4

Les différents registres et points de vue d'une fonction

$\frac{a}{10^n}$

Apports potentiels de GeoGebra (si le temps)

Trace écrite de cours

Introduire la notion de fonction

$0{,}999\ldots = 1$

QUELS PRÉ-REQUIS ?

$7 \times \ldots = 1$

<u>Consigne 1 :</u>

Quel(s) pré-requis à l'acquisition de la notion de fonction identifiez-vous ?

$\dfrac{a}{10^n}$

$0{,}999\ldots = 1$

QUELS PRÉ-REQUIS ?

$7 \times \ldots = 1$

Consigne 1 :
Quel(s) pré-requis à l'acquisition de la notion de fonction identifiez-vous ?

De type algébrique :
- Sens du signe =
- Statut de la lettre
- Transformer l'écriture d'une expression littérale (savoir si une fonction est affine, linéaire)
- Résoudre une équation (calcul d'un antécédent)

$\frac{a}{10^n}$

De type graphique/tableau :
- Savoir lire et interpréter des informations à partir d'une courbe ou d'un tableau
- Savoir représenter un tableau par des points dans un repère
- Savoir représenter des points d'un repère par un tableau

Sur la compétence «modéliser» :
- Modéliser des situations par une expression littérale
  (relations de dépendance de deux grandeurs, programmes de calcul)

QUELLE PROGRESSION ?

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

> MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

La notion de fonction ne se travaille pas qu'en 3e. Il y a tout un travail préparatoire à concevoir et à réaliser en amont : changements de registres, en fonction de,…

Comprendre et utiliser la notion de fonction

Progressivité des apprentissages

$\frac{a}{10^n}$

Un chapitre spécifique sur cette notion n'a pas sa place en 5e et 4e.

- En 5e et 4e l'usage de graphiques (par exemple distance en fonction de la durée d'un trajet), de tableaux (par exemple aire du carré en fonction de la longueur du côté) et de formules (par exemple l'indice de masse corporelle) permettent à la fois la résolution de problèmes et le changement de registres (formule/tableau de valeurs, graphique/tableau de valeurs, tableau de valeurs/graphiques).
- Le travail des expressions « en fonction de » ou « est fonction de » doit être mené en parallèle avec l'étude du calcul littéral.

$0{,}999\ldots = 1$

CONCEPT DE FONCTION

$7 \times \ldots = 1$

<u>Court éclairage historique sur l’apparition du concept de fonction :</u>

Le concept de fonction a émergé au XIVe siècle avec l’étude de phénomènes naturels continus (chute d’un corps, écoulement de l’eau, trajectoire du Soleil,…) car il est impossible de les représenter (et de les étudier) par des valeurs numériques.
En effet, de tels phénomènes ne sont plus vus de manière isolée mais comme des phénomènes qui évoluent au cours du temps.
Au gré des problèmes étudiés (tant internes qu’externes aux mathématiques) par les mathématiciens, le concept de fonction a évolué à plusieurs reprises au cours de l’histoire ; donnant lieu à des différentes définitions pour la notion de fonction.

$\frac{a}{10^n}$

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

<u>**Consigne 2 :**</u>

Parmi les définitions suivantes, laquelle est :

1) la plus proche de votre représentation du concept de fonction ?

2) la plus éloignée de votre représentation du concept de fonction ?

$\frac{a}{10^n}$

1. **Allez sur wooclap.com**
2. **Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur**

Code d'événement

YDNIAM

$0{,}999\ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times \ldots = 1$

Définition 1 : (dite de Dirichlet par Hankel, 1870)

On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en x.

Définition 2 : (Bourbaki, 1939)

$\frac{a}{10^n}$

Soit E et F deux ensembles distincts ou non.
Une relation d'une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y si quel que soit x appartenant à E, il existe un élément y de F et un seul qui soit dans la relation considérée avec x.
On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y de F qui se trouve dans la relation donnée avec x.
On dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

$0,999... = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times ... = 1$

<u>Définition 3 :</u> **<u>(Euler, 1755)</u>**

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x .

$\frac{a}{10^n}$

<u>Définition 4 :</u> **<u>(inspirée par Fréchet, 1909)</u>** ← La plus proche de 50% d'entre vous

Une fonction f de E dans F est la donnée d'un sous ensemble $G \subset E \times F$ appelé graphe de la fonction tel que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x ; y) \in G$.

<u>Définition 5 :</u> **<u>(J.Bernoulli, 1718)</u>** ← La plus éloignée de 50% d'entre vous

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette valeur variable et de constantes.

$0,999\ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times \ldots = 1$

Considérer au début une fonction comme **un processus de co-variation :**
une variation d'une variable x engendre une variation d'une autre variable y.

Sophie René de Cottret :

« Il est intéressant de constater que dans les premières définitions du concept de fonction, les notions centrales sont la variation et la dépendance ; la correspondance étant présente, mais de façon implicite. Puis, plus on se rapproche des définitions modernes, plus on voit disparaître graduellement la variation, puis la dépendance, dont on peut retrouver quelques traces avec la règle de correspondance, pour finalement aboutir à une pure correspondance. Les définitions modernes, excluant la variation et la dépendance et ne conservant que la correspondance, sont difficilement accessibles à des élèves du secondaire, car elles leur permettent peu d'accéder intuitivement à un premier concept de fonction. »

Anna Siepinska :

« Je doute que le choix de présenter la fonction selon la conception moderne aux élèves soit justifié par des raisons didactiques ou épistémologiques...une introduction de la fonction selon la conception ancienne serait plus judicieux. »

QUELLE DÉFINITION ?

$0{,}999\ldots = 1$

$7 \times \ldots = 1$

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

éduscol Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

> MATHÉMATIQUES

Organisation et gestion de données, fonctions

Attention au formalisme !
Privilégier auparavant le sens.

Comprendre et utiliser la notion de fonction

$\frac{a}{10^n}$

Un des objectifs du cycle 4 est de prendre appui sur des situations où la dépendance de deux grandeurs est mise en évidence afin de construire progressivement le concept de fonction.

Dès le début du cycle 4, la notion de fonction est abordée sans formalisation particulière.
Le travail sur les grandeurs et leur dépendance est une source de problèmes qui peuvent être modélisés par une fonction.

Le vocabulaire (image, antécédent, fonctions linéaires et affines) est introduit, ainsi que la notation $f(x)$. Cette notation reste délicate à maitriser et son introduction doit être progressive et motivée.

La définition rigoureuse d'une fonction numérique n'est pas un objectif de l'enseignement secondaire.

Ne pas croire que les notations $f(x)$ et $f : x \longmapsto f(x)$ vont de soi pour les élèves

Au collège, on n'aborde pas le domaine de définition d'une fonction

$0{,}999\ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times \ldots = 1$

Cours

Des vidéos de cours
jaicompris.com

1 Notion de fonction

DÉFINITION À un nombre x (appelé **la variable**), une fonction f associe un nombre et **un seul** que l'on note $f(x)$ (lire « f de x »).
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.

Fonction f

$$x \longmapsto f(x)$$

L'image de x par f

Exemple

À un nombre, on associe son double. On définit ainsi une fonction, car un nombre donné n'a qu'un seul double.
Par cette fonction, l'image de 3 est 6 et l'image de -4 est -8.

DÉFINITION Lorsque l'image d'un nombre a par une fonction f est un nombre b (c'est-à-dire $f(a) = b$), on dit aussi que a est **un antécédent** de b par f.

Fonction f

$$a \longmapsto b$$

Un antécédent de b par f

Exemple

À un nombre, on associe son double. L'image de 5 est son double 10.
Donc l'antécédent de 10 par cette fonction est 5 (sa moitié).

<u>**Transmaths 3ème**</u>

$\dfrac{a}{10^n}$

$0,999... = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times ... = 1$

DÉFINITION Le processus qui, à un nombre, fait correspondre un autre nombre unique s'appelle une **fonction**.

Nombre de départ → Fonction → Nombre correspondant

A Exemple et notations

Exemple

- On définit la fonction, appelée f, par le programme de calcul suivant :
« Élever au carré le nombre choisi, puis ajouter 1. »

– Au nombre 4 correspond le nombre 17 ; en effet : $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.
– Au nombre 6 correspond le nombre 37 ; en effet : $6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$.

De façon générale : par la fonction f, à un nombre x, on fait correspondre le nombre $x^2 + 1$.

x s'appelle la variable.
On peut faire varier ce nombre !

Notations

On note : $\underbrace{f : x \mapsto x^2 + 1}$ ou $\underbrace{f(x) = x^2 + 1}$.

se lit : « la fonction f qui à x fait correspondre $x^2 + 1$ ».

se lit : « f de x égal $x^2 + 1$ ».

Myriade 3ème

$\frac{a}{10^n}$

$0{,}999\ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times \ldots = 1$

Définition

Une **fonction** est un procédé qui, à un nombre x, fait correspondre un nombre unique appelé **image** de x.

Notation

Par une fonction f, l'image d'un nombre x est notée $f(x)$ (lire « f de x »).

On note $f : x \longmapsto f(x)$.

Remarque

Il ne faut pas confondre f et $f(x)$:
- f désigne une **fonction** ;
- $f(x)$ désigne un **nombre** et non une fonction : c'est l'image d'un nombre x par la fonction f.

Définition

Si un nombre x a pour **image** le nombre y par une **fonction f**, on dit que x est un **antécédent** de y par la **fonction f**.

Antécédent x → Fonction f → Image $f(x)$ ou y

Remarques

- Un nombre x ne peut pas avoir plusieurs images, mais un nombre y peut avoir plusieurs antécédents. Par exemple, si $f(x) = x^2$, le nombre 9 a deux antécédents : 3 et –3.
- Un nombre y peut n'avoir aucun antécédent. Par exemple, si $f(x) = x^2$, le nombre –25 n'a aucun antécédent car aucun carré ne peut être négatif.

Indigo 3ème

$\frac{a}{10^n}$

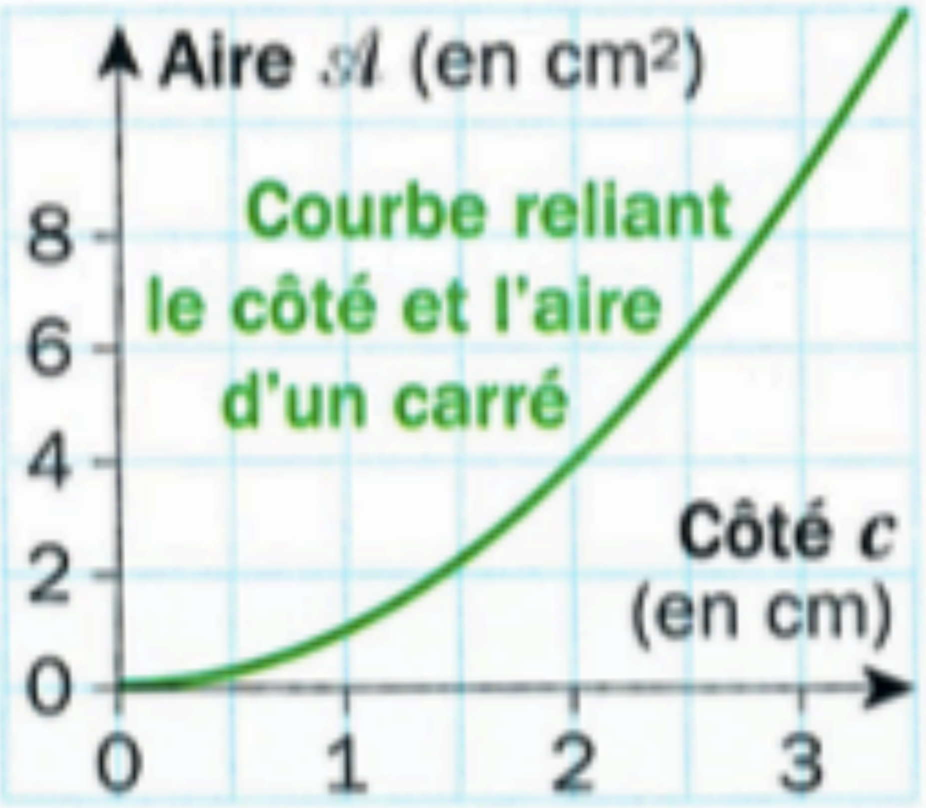
$0{,}999\ldots = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times \ldots = 1$

DÉFINITION Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est **fonction** de l'autre. Dans ce cas, on peut :
- trouver une **relation algébrique** qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;
- tracer une **courbe** qui relie ces deux grandeurs ;
- construire un **tableau de valeurs** qui associe les nombres des deux grandeurs.

EXEMPLE 1 : L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré est fonction de la longueur c de son côté selon la relation algébrique $\mathcal{A} = c^2$.



EXEMPLE 2 : Le tableau de valeurs suivant donne la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1er semestre de l'année 2015.

Mois	1	2	3	4	5	6
T (en °C)	10,1	11,7	15,1	17,3	21,2	24,5

La température dépend du mois considéré, mais on ne connait pas la relation algébrique qui relie ces deux grandeurs.

Dimension 3ème

$\frac{a}{10^n}$

$0{,}999... = 1$

QUELLE DÉFINITION ?

$7 \times ... = 1$

DÉFINITION Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est **fonction** de l'autre. Dans ce cas, on peut :

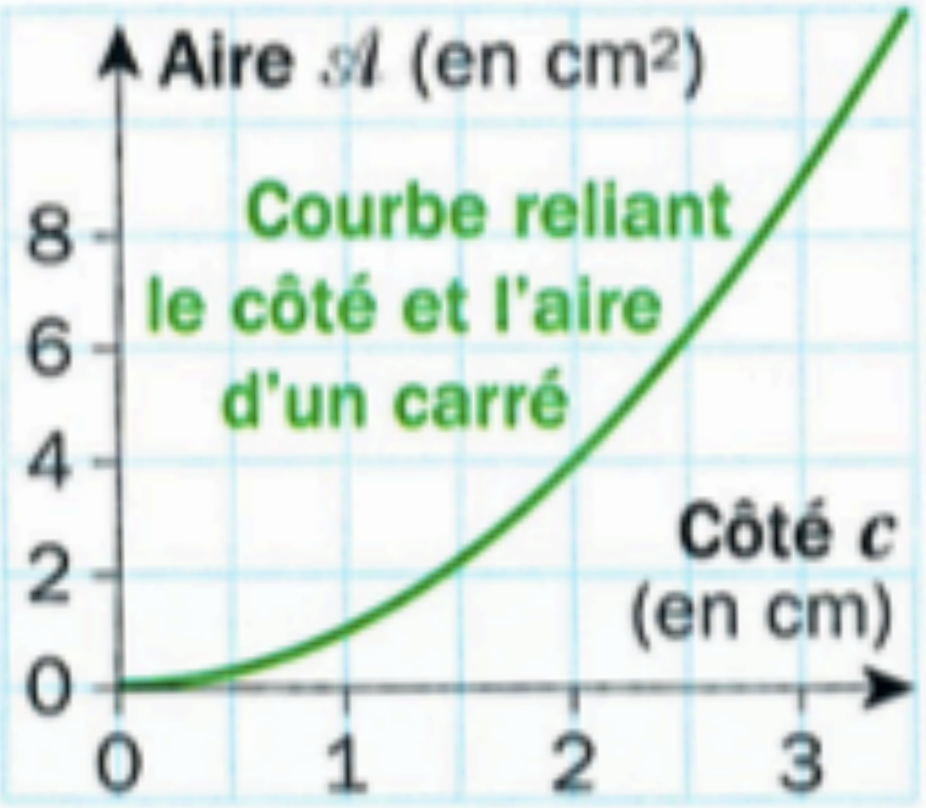
– trouver une **relation algébrique** qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;

– tracer une **courbe** qui relie ces deux grandeurs ;

– construire un **tableau de valeurs** qui associe les nombres des deux grandeurs.

Dimension 3ème

EXEMPLE 1 : L'aire $\mathscr{A}$ d'un carré est fonction de la longueur c de son côté selon la relation algébrique $\mathscr{A} = c^2$.



$\frac{a}{10^n}$

EXEMPLE 2 : Le tableau de valeurs suivant donne la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1er semestre de l'année 2015.

Mois	1	2	3	4	5	6
T (en °C)	10,1	11,7	15,1	17,3	21,2	24,5

La température dépend du mois considéré, mais on ne connait pas la relation algébrique qui relie ces deux grandeurs.

Rares sont les manuels scolaires qui abordent la notion de fonction en partant de la dépendance de deux grandeurs pour arriver à la correspondance.