

DU Maths 2nd degré

TD 1 SUR LA NOTION DE FONCTION

Quels pré-requis ?

Consigne 1 :

Quel(s) pré-requis indispensables concernant la notion de fonction ?

Quelle définition ?

Court éclairage historique sur l'apparition du concept de fonction :

Le concept de fonction a émergé au XIV^e siècle avec l'étude de phénomènes naturels continus (chute d'un corps, écoulement de l'eau, trajectoire du Soleil,...) car il est impossible de les représenter (et de les étudier) par des valeurs numériques.

En effet, de tels phénomènes ne sont plus vus de manière isolée mais comme des phénomènes qui évoluent au cours du temps.

Au gré des problèmes étudiés (tant internes qu'externes aux mathématiques) par les mathématiciens, le concept de fonction a évolué à plusieurs reprises au cours de l'histoire ; donnant lieu à des différentes définitions pour la notion de fonction.

Consigne 2 :

Parmi les définitions suivantes, laquelle est :

- 1) la plus proche de votre représentation du concept de fonction ?
- 2) la plus éloignée de votre représentation du concept de fonction ?
- 3) la plus accessible pour des élèves de cycle 4 ?

Définition 1 :

On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en x .

Définition 2 :

Soient E et F deux ensembles distincts ou non. Une relation d'une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y si quel que soit x appartenant à E , il existe un élément y de F et un seul qui soit dans la relation considérée avec x . On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E , l'élément y de F qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x , et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.

Définition 3 :

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x , sont appelées fonctions de x .

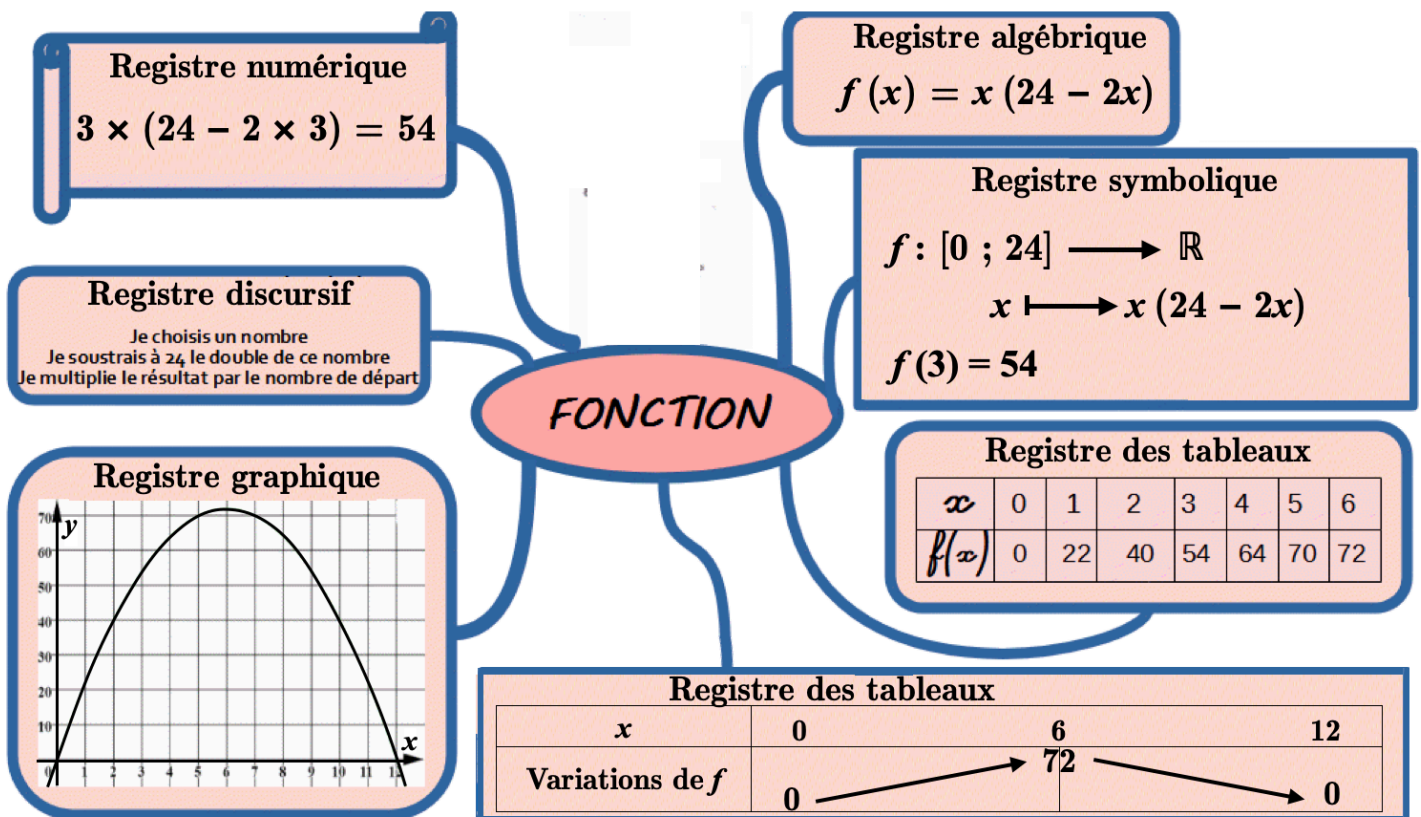
Définition 4 :

Une fonction f de E dans F est la donnée d'un sous ensemble $G \subset E \times F$ appelé graphe de la fonction tel que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $(x ; y) \in G$.


Définition 5 :

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette valeur variable et de constantes.

Registres de représentation d'une fonction



Changements de registres de représentation d'une fonction

|  | NUMÉRIQUE | ALGÈBRIQUE | GRAPHIQUE | TABLEAUX | SYMBOLIQUE |
|---|---|--|---|--|---|
| NUMÉRIQUE | | Pas toujours possible | Placer une série de points de la courbe Allure de la courbe | Tableau de valeurs | écritures du type $f(3) = 4$ |
| ALGÈBRIQUE | Trouver un grand nombre de valeurs exactes | | Tracer sa courbe avec un logiciel | Tableau de valeurs et/ou de variations | Passer de $f(x) = 5x^2 + 7$ à $f : x \mapsto 5x^2 + 7$ |
| GRAPHIQUE | Trouver un grand nombre de valeurs (approchées) | Pas toujours possible | | Tableau de valeurs et/ou de variations | Passer de « le point $M(5 ; 8)$ appartient à C_f » à « $f(5) = 8$ » |
| TABLEAUX | Valeurs particulières Encadrement (TVI) Signe des images | Pas toujours possible | Tracer l'allure de la courbe | | Le symbolique est inclus dans les tableaux |
| SYMBOLIQUE | Passer de « $f(3) = 4$ » à « si je substitue 3 à la variable x , j'obtiens 4 ». | Passer de $f : x \mapsto 5x^2 + 7$ à $f(x) = 5x^2 + 7$ | Passer de « $f(5) = 8$ » à « le point $M(5 ; 8)$ appartient à C_f » | Tableau de valeurs et/ou de variations | D'après Duval |

Consigne 3 :

- 1) Pour chaque question, identifier les changements de registres.
- 2) Faire une analyse critique de l'exercice.

On considère la fonction f qui, à un nombre x , fait correspondre la moitié de son carré.

- 1** Démontrer que $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
- 2** Démontrer que $f(4) = 8$ et $f(2) = 2$.
- 3** Calculer $f(5)$ et en déduire l'image du nombre 5 par la fonction f .
- 4**
 - a. Démontrer que $f : 6 \mapsto 18$.
 - b. Quelle est l'image du nombre 6 par la fonction f ?
 - c. Recopier et compléter : $f : 7 \mapsto \dots$
En déduire l'image de 7 par la fonction f .

- 5** a. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

| | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|---|---|---|----|
| x | -10 | -5 | -2 | 0 | 2 | 5 | 10 |
| $f(x)$ | 50 | | | | | | |

- b. À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes.
 - Quelle est l'image de -5 par la fonction f ?
 - Quelle est l'image de 10 par la fonction f ?
 - Donner deux nombres qui possèdent la même image par la fonction f .
- 6** a. À l'aide d'un logiciel, tracer la représentation graphique de la fonction f .
 - b. placer tous les points dont les coordonnées $(x ; f(x))$ sont données dans le tableau précédent.

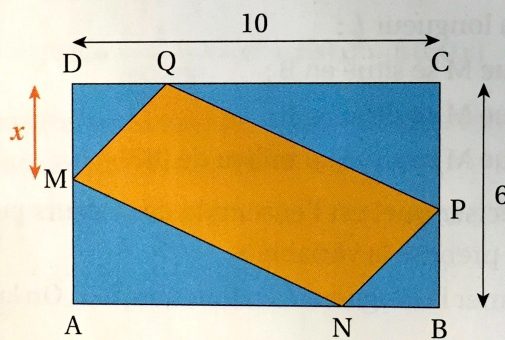
Consigne 4 :

- 1) Analyser les tâches en jeu (ce que l'on doit faire pour réussir) et les changements de registres utilisés dans cet exercice.
- 2) Un manuel scolaire de 2nde incorpore cet exercice dans son chapitre sur les fonctions. Êtes-vous d'accord avec ce choix ?

77 Le plus grand parallélogramme

Le parallélogramme MNPQ est inscrit dans le rectangle ABCD, tel que $DM = DQ = BN = BP$.

On appelle x la longueur DM et on cherche la valeur de x telle que l'aire de MNPQ soit maximale.



- a. Exprimer l'aire $A(x)$ du parallélogramme MNPQ en fonction de x , en précisant pour quelles valeurs de x la figure est réalisable.
- b. Montrer que $A(x) = -2(x - 4)^2 + 32$.
- c. En déduire la valeur de x telle que l'aire de MNPQ soit maximale.

Préciser l'aire correspondante.

Apports potentiels de GeoGebra

Consigne 5 :

- 1) Analyser les tâches en jeu (ce que l'on doit faire pour réussir) et les changements de registres utilisés dans cet exercice.
- 2) Quels sont les apports de GeoGebra pour l'enseignement de la notion de fonction ?

Exercice n°2 :

Le parallélogramme MNPQ est inscrit dans le rectangle ABCD, tel que $DM = DQ = BN = BP$.

1) Travail sur Geogebra :

Réaliser la figure en utilisant :

- un curseur pour la longueur DM.



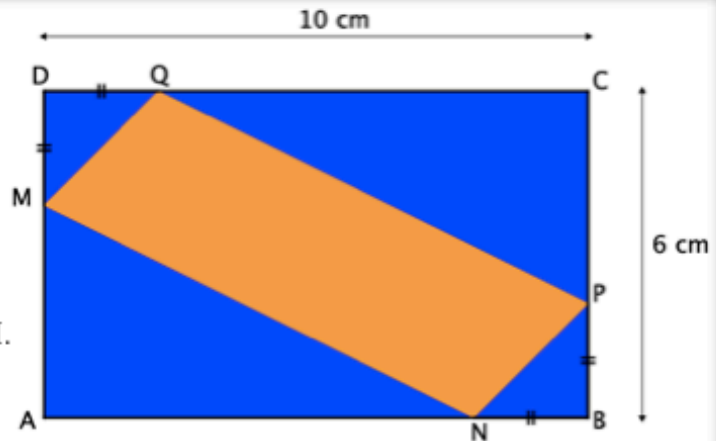
Curseur

- l'onglet polygone pour le parallélogramme MNPQ afin



Polygone

de pouvoir afficher la valeur de l'aire parallélogramme MNPQ.



- 2) Conjecturer sur l'évolution de l'aire du parallélogramme MNPQ selon la longueur DM.

- 3) Démontrer votre conjecture.

Trace écrite de cours

Consigne 6 :

Analyser ces définitions d'un antécédent d'un nombre par une fonction.

Myriade 3ème

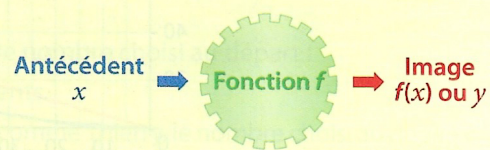
DÉFINITION Par une fonction f , lorsqu'à un nombre de départ a , on fait correspondre le nombre b , on dit que a est un **antécédent** de b par la fonction f .

$f(a) = b$
Le nombre a est un **antécédent** de b par la fonction f .

Mission indigo 3ème

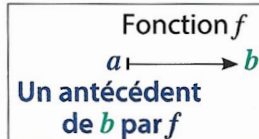
Définition

Si un nombre x a pour **image** le nombre y par une **fonction f** , on dit que x est un **antécédent** de y par la **fonction f** .



Transmath 3ème

DÉFINITION Lorsque l'image d'un nombre a par une fonction f est un nombre b (c'est-à-dire $f(a) = b$), on dit aussi que a est un **antécédent** de b par f .



Introduire la notion de fonction

Critères pour analyser la pertinence d'une situation pour introduire la notion de fonction

- Le problème peut-il être résolu sans la notion de fonction ?
- La co-variation entre deux grandeurs dépendantes l'une de l'autre est-elle mise en avant ?
- L'emploi du registre algébrique est-il à la charge des élèves (introduction de la lettre) ?
- Plusieurs registres de représentation et/ou plusieurs points de vue sont-ils nécessaires pour pouvoir résoudre le problème ?

Consigne 7 :

Analyser la pertinence de cette situation pour introduire la notion de fonction..

Je découvre

Transmaths 3ème

ACTIVITÉ

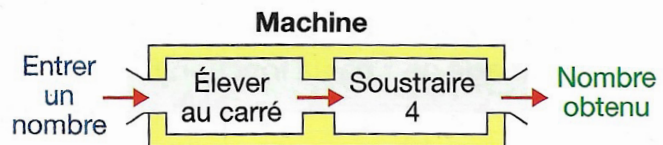
1

Définir une fonction avec un programme de calcul

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Élever au carré.
- Soustraire 4.
- Écrire le nombre obtenu.

Il peut être représenté par la machine ci-dessous.



- 1 a.** Vérifier qu'en choisissant le nombre 4, on obtient 12.
b. Quel nombre obtient-on lorsqu'on choisit au départ le nombre 7 ? le nombre -7 ?
c. Quels nombres peut-on choisir pour obtenir 0 ?

2 À un nombre x de départ, ce programme associe le nombre $x^2 - 4$.
On dit que l'on définit **la fonction** qui à un nombre x (la variable), associe son **image** $x^2 - 4$.
Par la suite, on note f cette fonction ; l'image de x par f est notée $f(x)$ (lire « f de x »).

Ainsi, $f(x) = x^2 - 4$.

- a.** Vérifier que $f(4) = 12$.
- b.** Comment note-t-on l'image de -1 par la fonction f ? Calculer cette image.
- c.** Trouver les nombres qui ont pour image 21 par la fonction f .

On dit que ces nombres sont les **antécédents** de 21 par cette fonction.

Consigne 8 :

Quels sont les types de problèmes dont la résolution nécessite obligatoirement d'utiliser la notion de fonction ?

Lequel vous semble-t-il le plus approprié pour introduire la notion de fonction au cycle 4 ?

Consigne 9 :

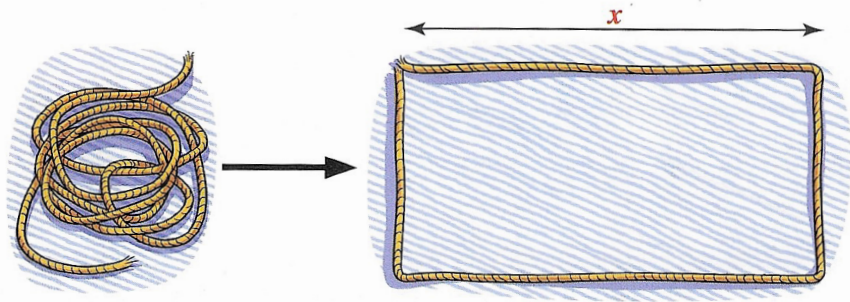
Modifier l'activité suivante pour qu'elle respecte les critères permettant d'analyser la pertinence d'une situation d'introduction pour la notion de fonction.

1

Découvrir la notion de fonction

OBJECTIF **1**

Avec une corde de longueur 11 m étendue sur le sol, on fabrique un rectangle. On désigne par x la longueur en mètres d'un côté de ce rectangle.



La longueur x est appelée la « **variable** » de la situation.

- 1 a. Quelles sont les dimensions du rectangle lorsque $x = 1$ m ? Calculer l'aire du rectangle dans ce cas.
- b. Mêmes questions pour $x = 2$ m.

- 2 a. Exprimer les dimensions du rectangle en fonction de x .
- b. Démontrer que l'aire $A(x)$ du rectangle en m^2 s'exprime, en fonction de x , par la formule : $A(x) = 5,5x - x^2$.



On écrit $A(x)$ car l'aire dépend de la longueur x . $A(x)$ se lit « A de x ».

- 3 On cherche la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est la plus grande possible.
- a. Pour les différentes valeurs de x données dans le tableau, calculer l'aire $A(x)$ du rectangle.

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| $A(x)$ | 4,5 | | | | | | | | |



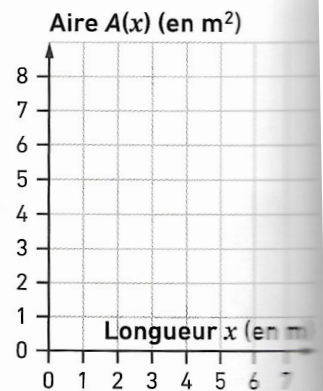
On écrit $A(1) = 4,5$. Cela signifie que, pour $x = 1$ m, l'aire est égale à $4,5 m^2$.

- b. Pour quelle valeur de x , l'aire du rectangle semble-t-elle la plus grande ?

- 4 a. Recopier le repère ci-contre, puis y placer tous les points dont les coordonnées $(x ; A(x))$ sont données dans le tableau précédent.



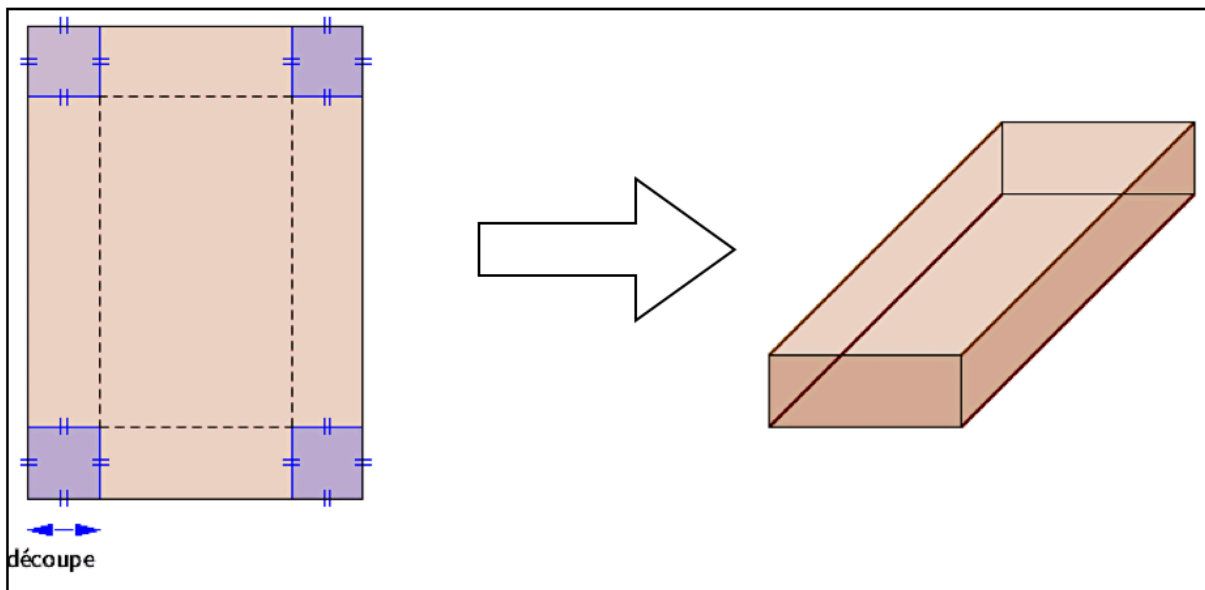
Tu dois placer, par exemple, le point de coordonnées $(1 ; 4,5)$.



- b. Décrire comment l'aire du rectangle semble évoluer lorsque la longueur x augmente.
- c. Estimer graphiquement l'aire maximale du rectangle.

Inspirée de la brochure Irem de Bordeaux

A partir d'une plaque de carton rectangulaire (26 cm × 20 cm), en découpant quatre carrés dans les coins, l'entreprise MAXI-BOÎTE fabrique une boîte sans couvercle selon le principe ci-contre :



- 1) a) Fabriquer une telle boîte.
b) Indiquer la longueur de la découpe et le volume de votre boîte.
- 2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
 - a) Le volume de la boîte est le même quelle que soit la longueur de la découpe.
 - b) Le volume de la boîte augmente lorsque la longueur de la découpe augmente.
 - c) Le volume de la boîte diminue lorsque la longueur de la découpe augmente.
- 3) Pour fabriquer une boîte sans couvercle de **volume maximal**, l'entreprise a besoin de connaître la longueur de la découpe à effectuer et d'inscrire sur la boîte les dimensions de celle-ci. Quelle la longueur de la découpe à effectuer va-t-elle choisir ?

Consigne 10 :

On considère la situation très connue et analysée de la brochure de l'Irem de Bordeaux.

- 1) Quel(s) objectif(s) attribuez-vous aux questions 1a) et 1b) ?
- 2) Quel(s) objectif(s) attribuez-vous aux questions 2a), 2b) et 2c) ?
- 3) Quel scénario envisagez-vous lors de la question 3) tout en respectant les critères d'une bonne situation d'introduction pour la notion de fonction ?