

$$0,999\dots = 1$$

$$7 \times \dots = 1$$

Enseigner la proportionnalité



et la non-proportionnalité

guillaume.didier@inspe-paris.fr

$$\frac{a}{10^n}$$

$$0,999\dots = 1$$

$$7 \times \dots = 1$$

Liste non exhaustive de documents de référence sur la proportionnalité

Documents d'accompagnement du cycle 3 et du cycle 4 :

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 4

Articles issus de la revue petit'x :

SIMARD A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. Petit x, n°89, p. 51-63. IREM de Grenoble

SIMARD A. (2012b). Le concept de proportionnalité dans la liaison CM2-Sixième. Petit x, n°90, p. 35-52. IREM de Grenoble.

Article issu de la revue Au fil des maths :

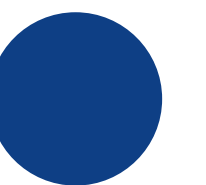
PERRIN D. et M.-J. (2021). « Proportionnalité et fonction linéaire ». APMEP *Au fil des maths*. N° 540.

Conférence :

SIMARD.A (2017), La proportionnalité, ESEN de Besançon.

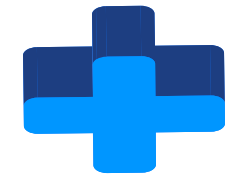


$$\frac{a}{10^n}$$

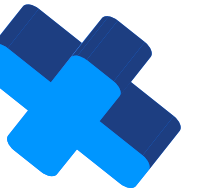


$0,999\dots = 1$

Plan de la séance 2 sur la proportionnalité ^{$7 \times \dots = 1$}

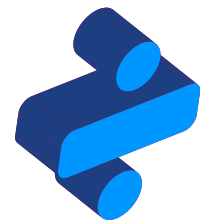


La modélisation



Les pourcentages

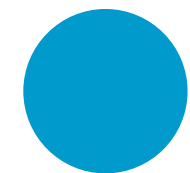
Les échelles



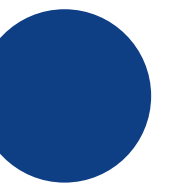
Le mouvement uniforme

$\frac{a}{10^n}$

Les ratios



Caractérisation graphique des situations de proportionnalité

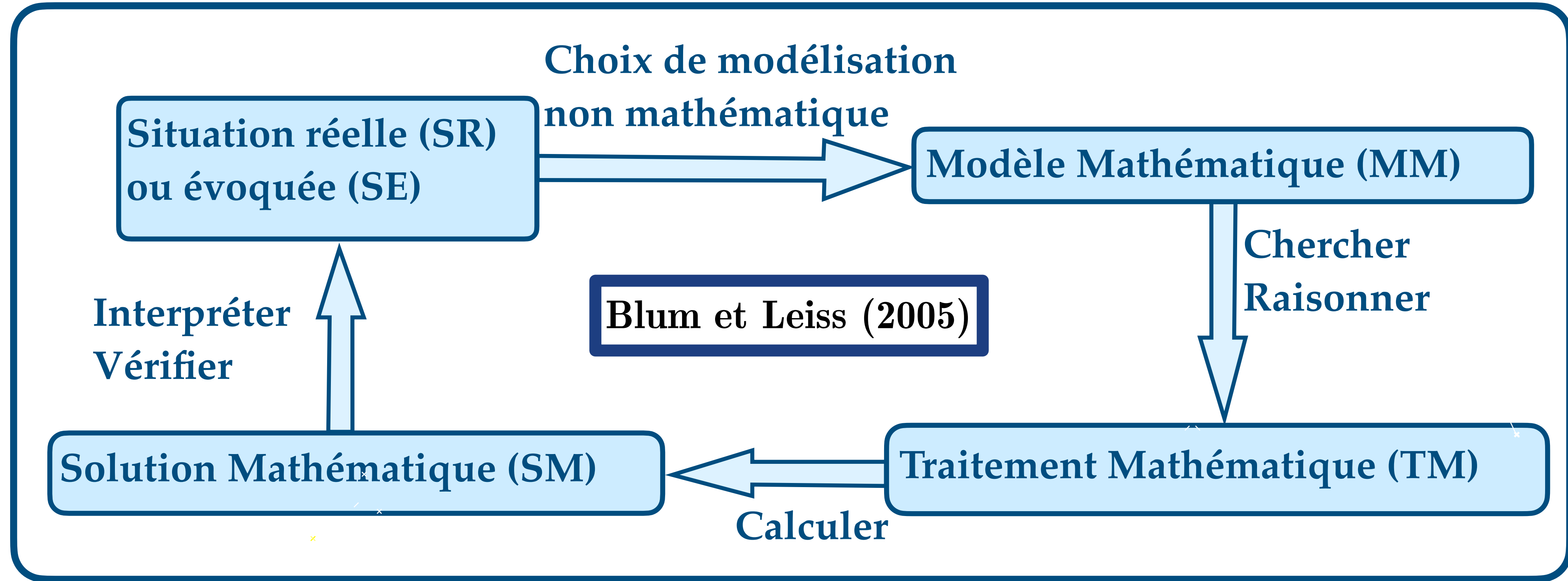


Exercices issus de la vie réelle

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation



Cycle 3

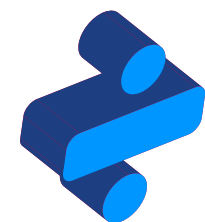
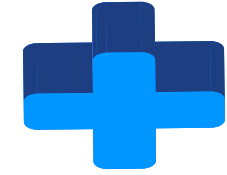
Cycle 4

Modéliser

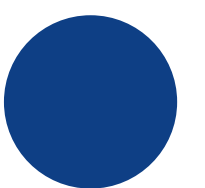
- utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;
- reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité ;

Modéliser

- reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème ;
- traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques) ;
- comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique ;
- valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu



$$\frac{a}{10^n}$$



$0,999\dots = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times \dots = 1$

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Modèle Mathématique (MM)

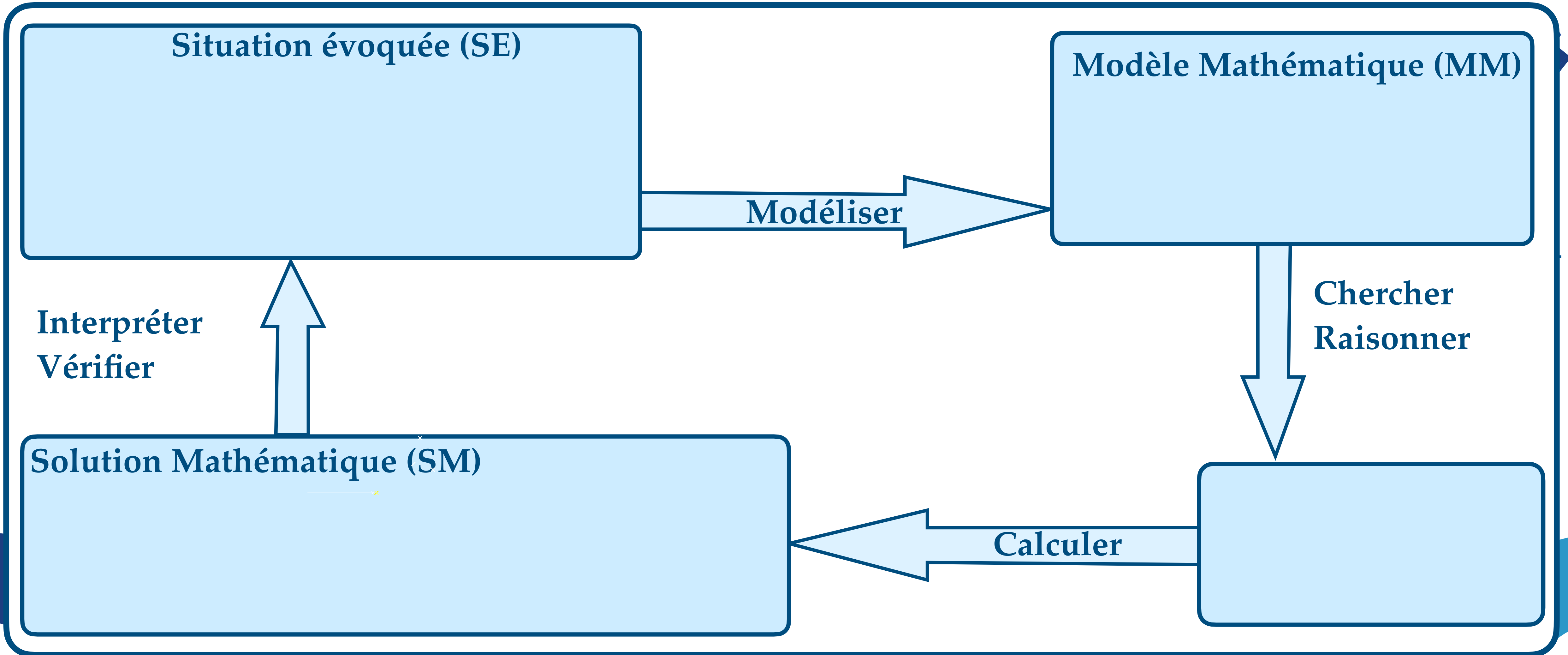
Modéliser

Interpréter
Vérifier

Chercher
Raisonner

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999\dots = 1$

$7 \times \dots = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Modèle Mathématique (MM)

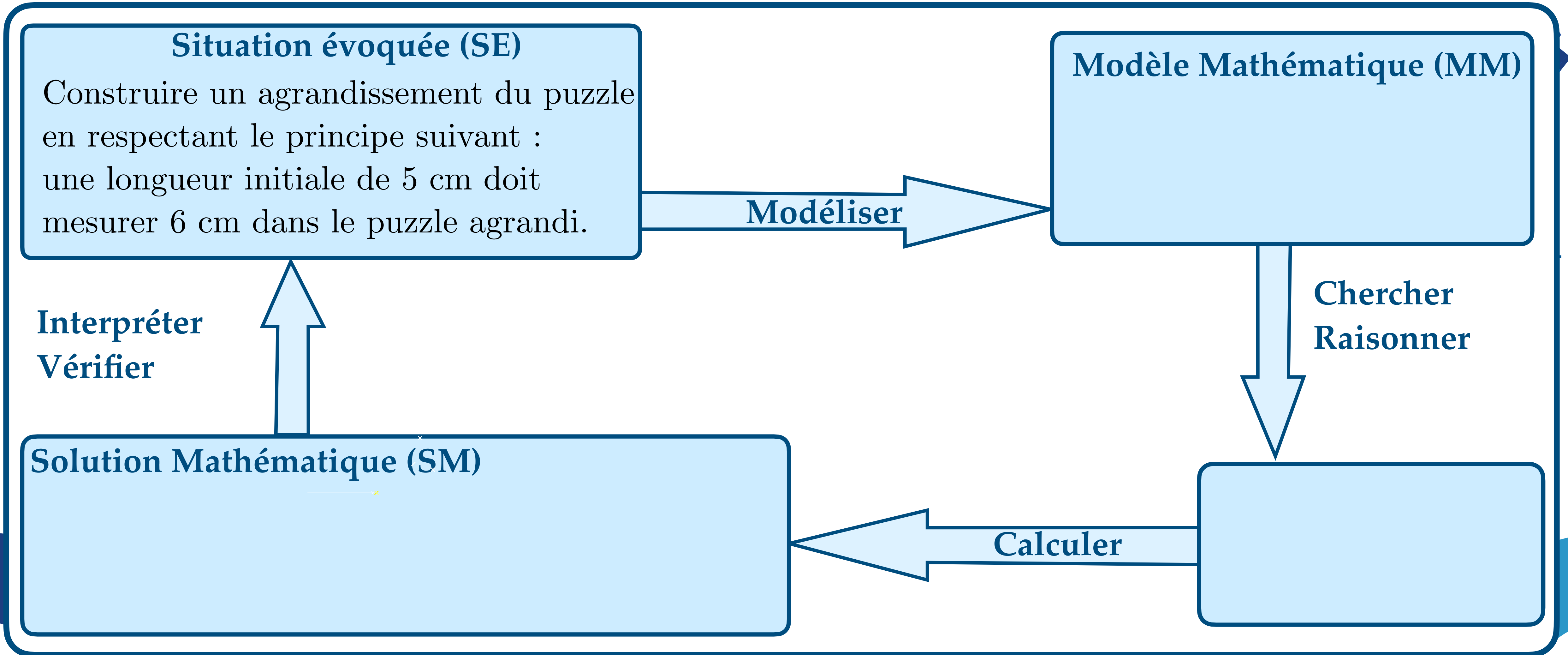
Modéliser

Interpréter
Vérifier

Chercher
Raisonner

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

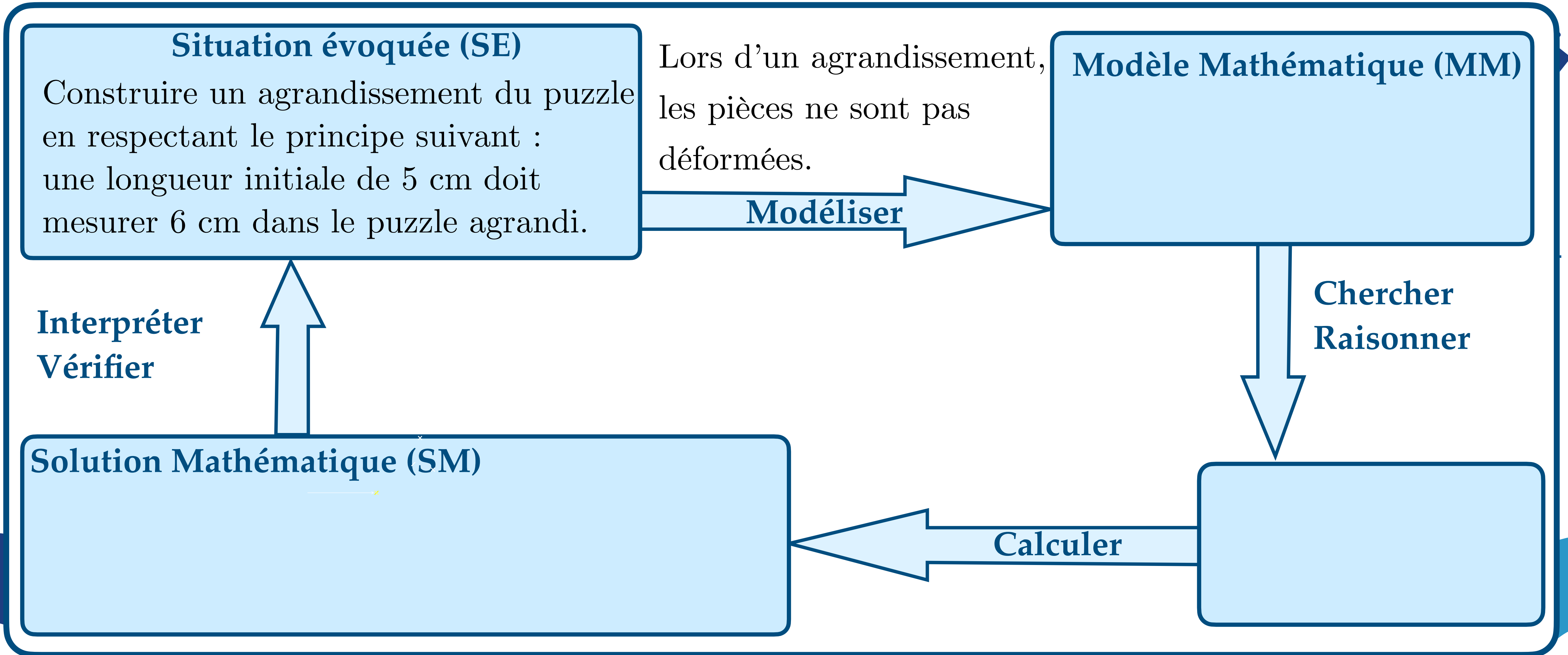
Interpréter
Vérifier

Modéliser

Chercher
Raisonner

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modéliser

Modèle Mathématique (MM)

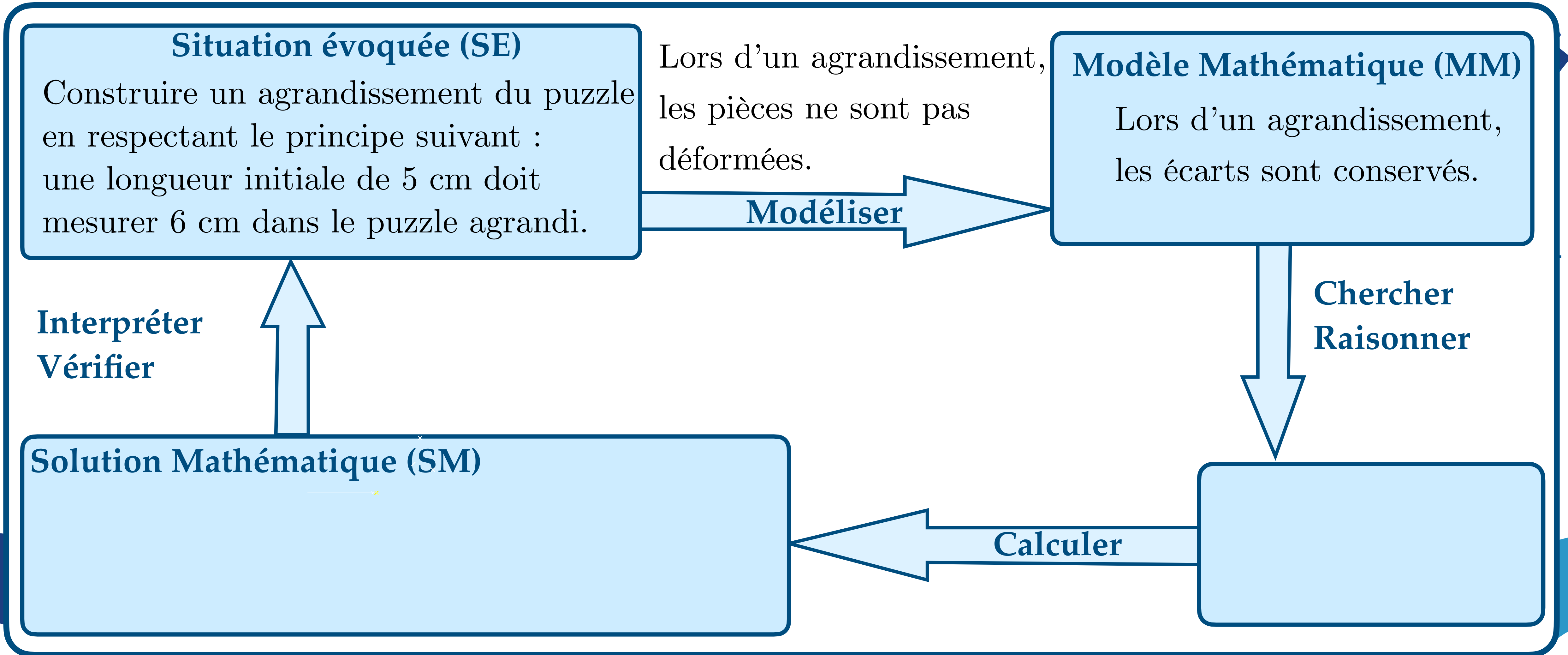
Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.

**Chercher
Raisonner**

**Interpréter
Vérifier**

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modéliser

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.

**Chercher
Raisonner**

**Interpréter
Vérifier**

Solution Mathématique (SM)

$6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$
On ajoute 1 cm à toutes les longueurs.

Calculer

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modéliser

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.

**Chercher
Raisonner**

$$2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$6 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

$$9 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

Calculer

$$6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$$

On ajoute 1 cm à toutes les longueurs.

**Interpréter
Vérifier**

Solution Mathématique (SM)

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.

Modéliser

Interpréter
Vérifier

Chercher
Raisonner

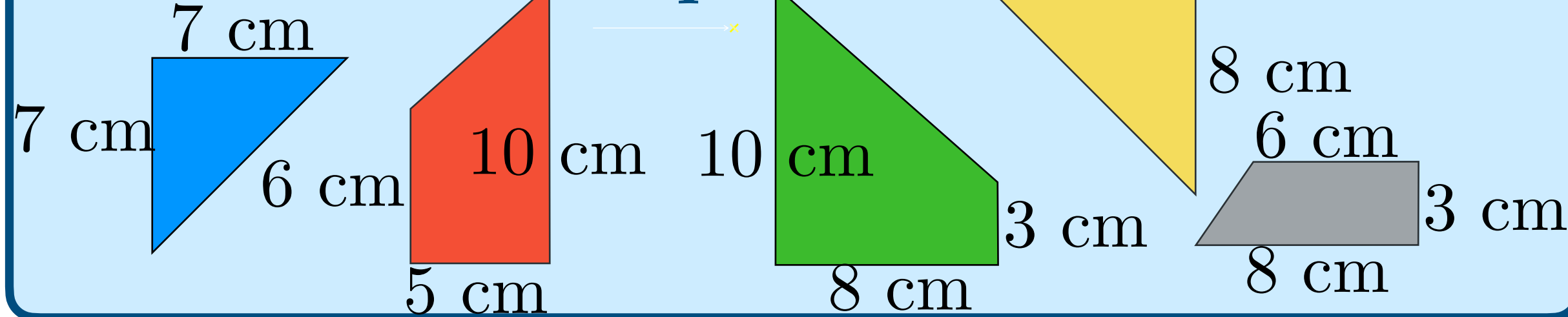
$2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

$4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

$6 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

$9 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Solution Mathématique (SM)



Calculer

$6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$

On ajoute 1 cm à toutes les longueurs.

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

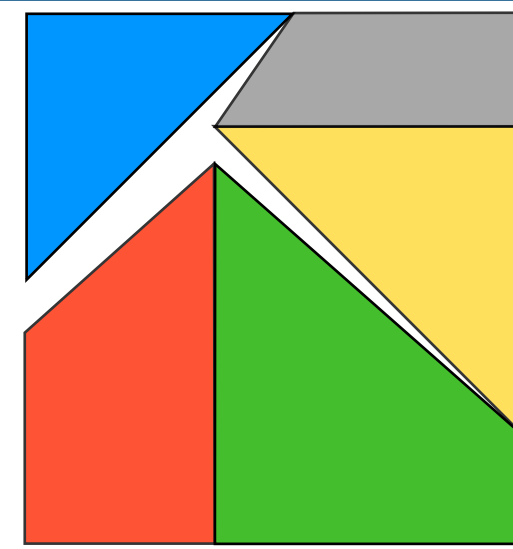
Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.

Modéliser

Interpréter
Vérifier



Chercher
Raisonner

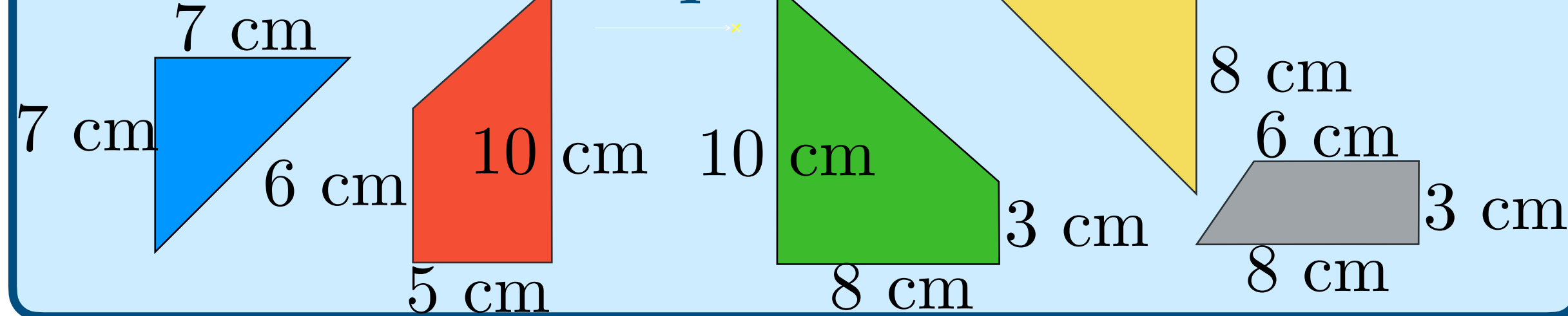
$2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

$4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

$6 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

$9 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Solution Mathématique (SM)



Calculer

$6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$

On ajoute 1 cm à toutes les longueurs.

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

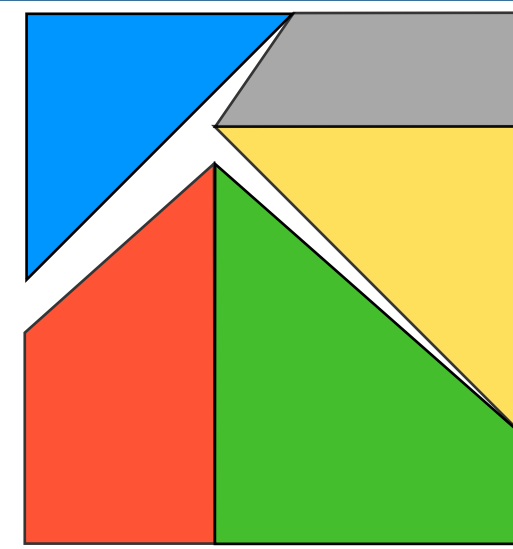
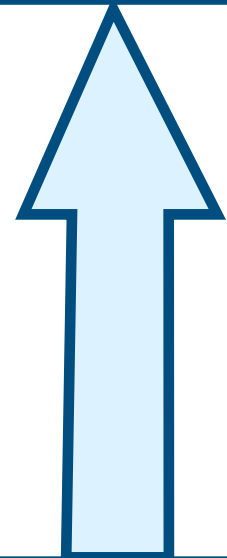
Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

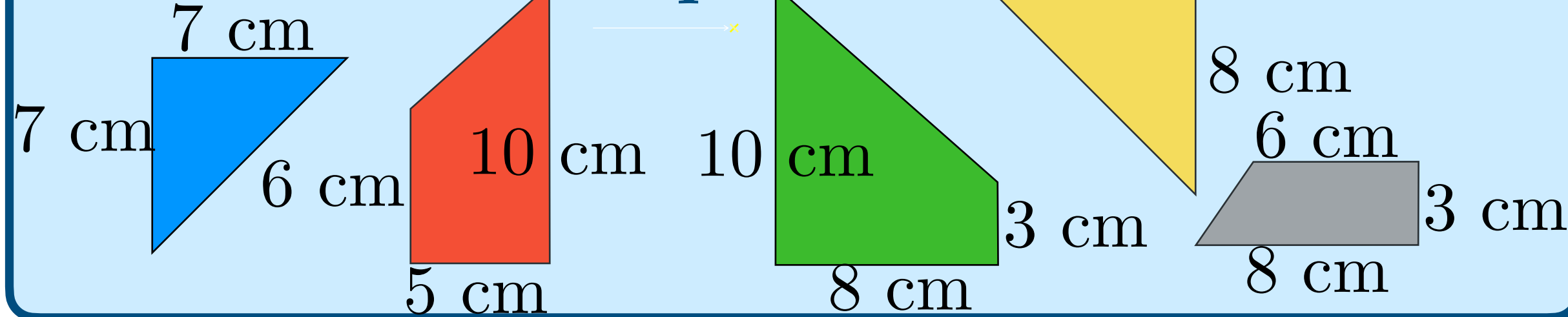
~~Lors d'un agrandissement, les écarts sont conservés.~~

Modéliser

**Interpréter
Vérifier**



Solution Mathématique (SM)



$$2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$4 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

$$6 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

$$9 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

**Chercher
Raisonner**



$$6 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$$

On ajoute 1 cm à toutes les longueurs.

Calculer

$0,999\dots = 1$

$7 \times \dots = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Modèle Mathématique (MM)

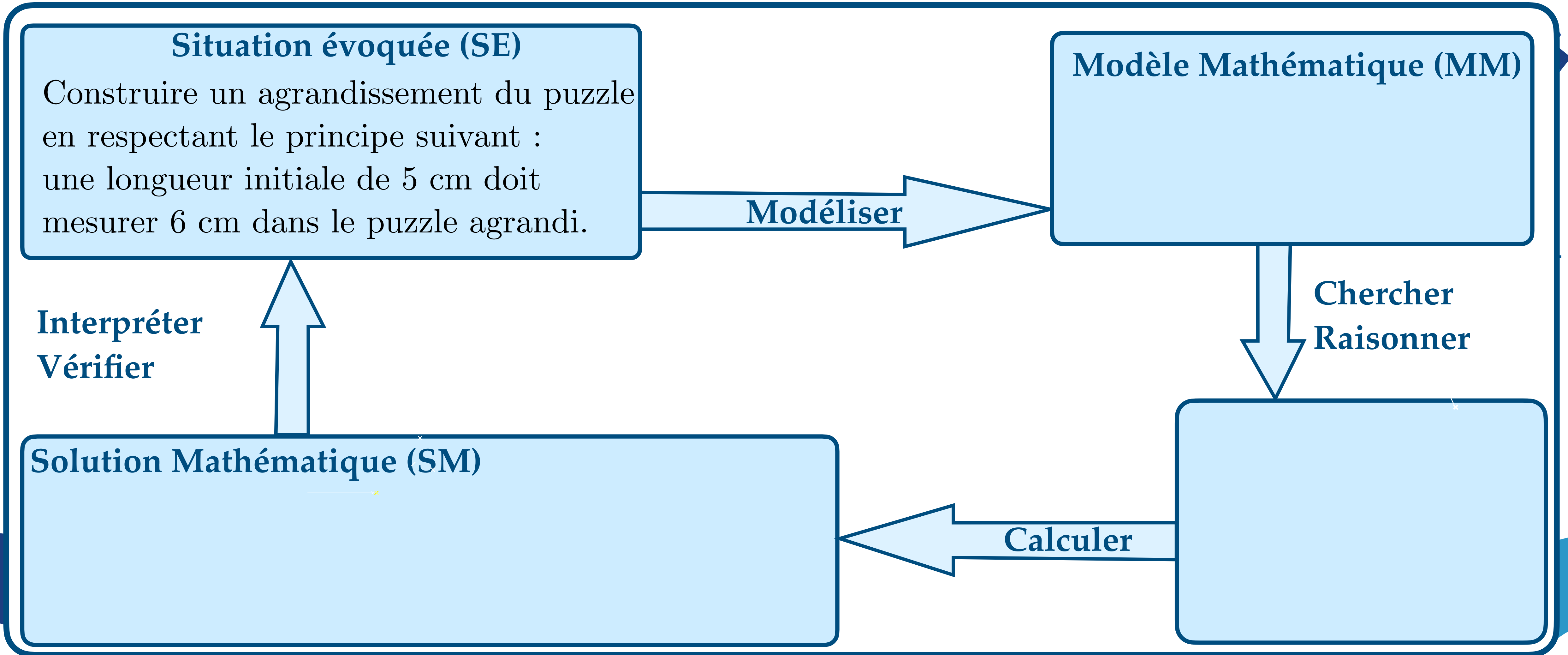
Modéliser

Chercher
Raisonner

Interpréter
Vérifier

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

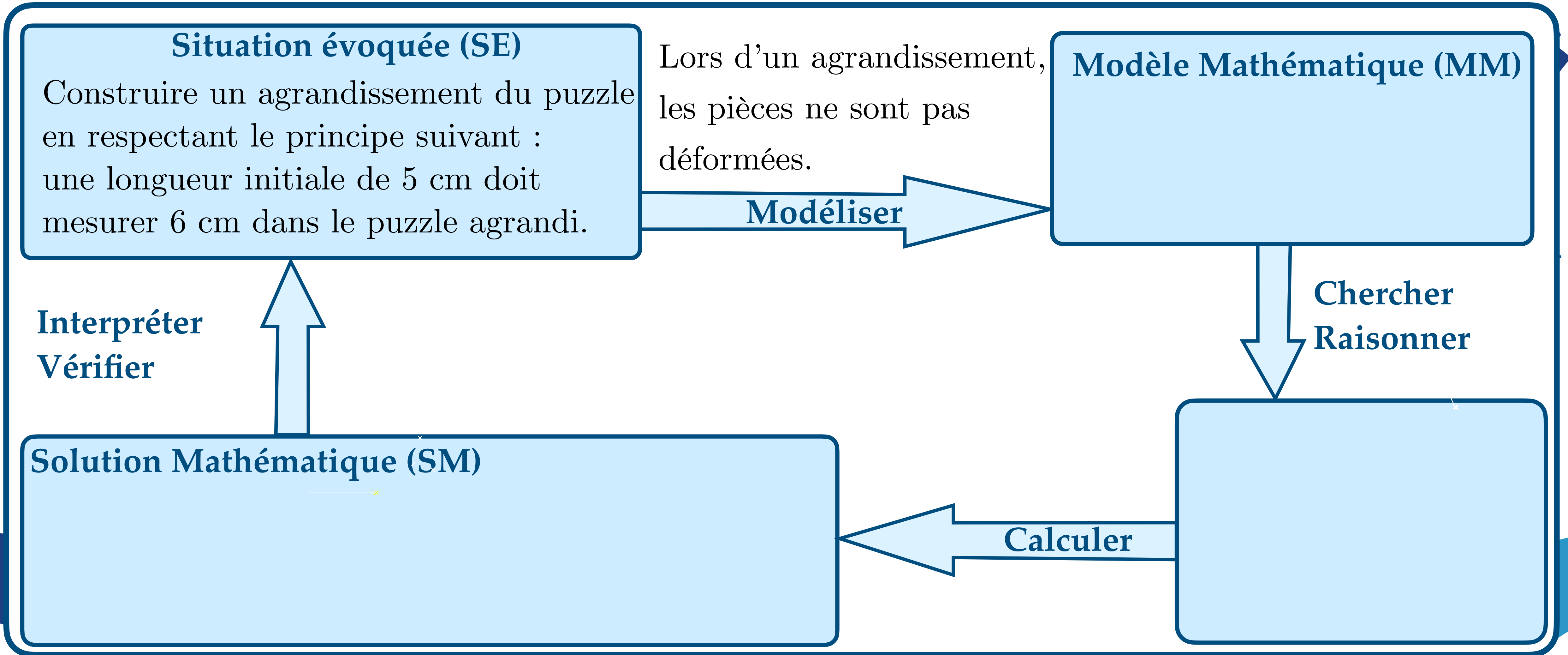
Interpréter
Vérifier

Modéliser

Chercher
Raisonner

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999\dots = 1$

$7 \times \dots = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'une réduction, les longueurs initiales et agrandies sont proportionnelles.

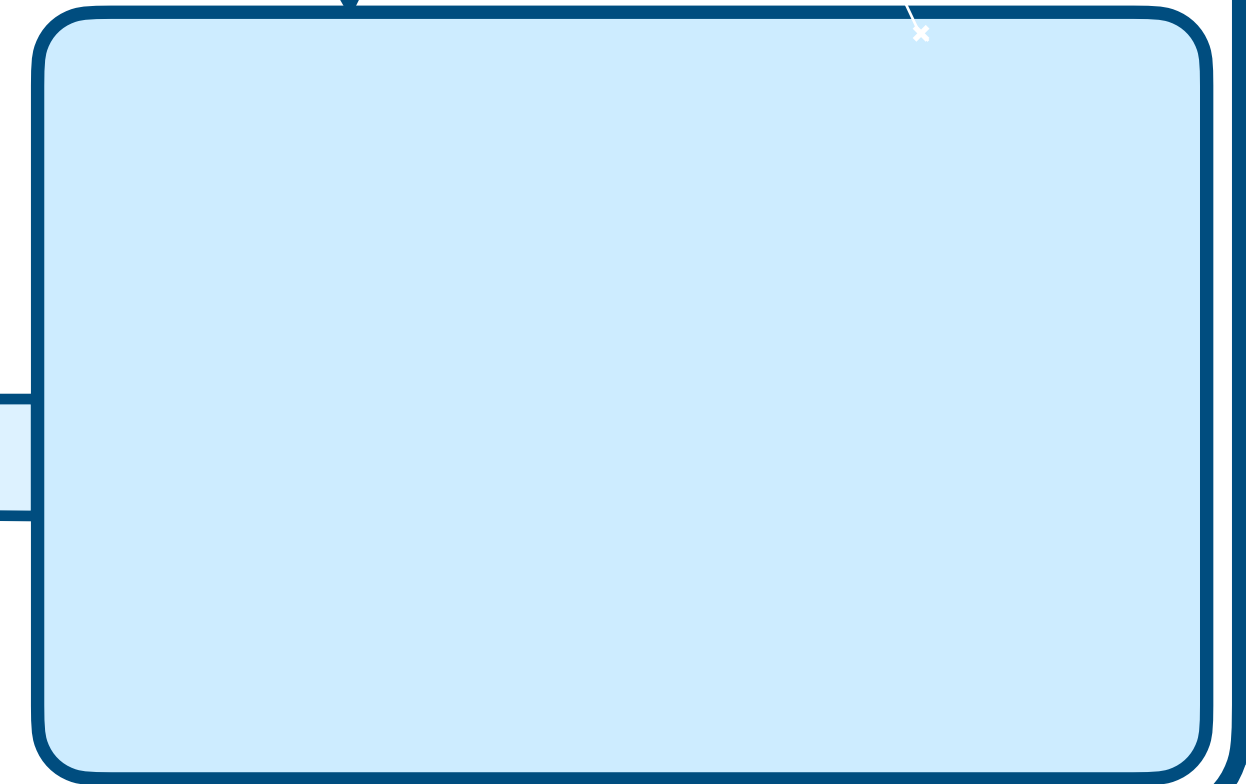
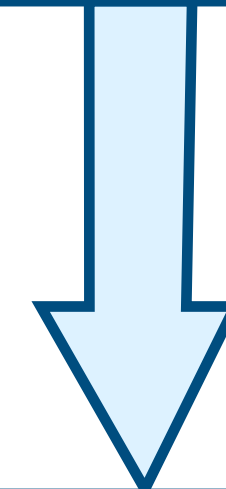
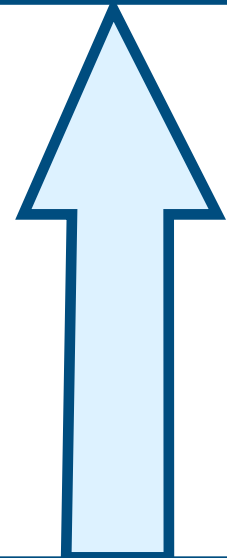
Modéliser

**Chercher
Raisonner**

**Interpréter
Vérifier**

Solution Mathématique (SM)

Calculer



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modéliser

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'une réduction, les longueurs initiales et agrandies sont proportionnelles.

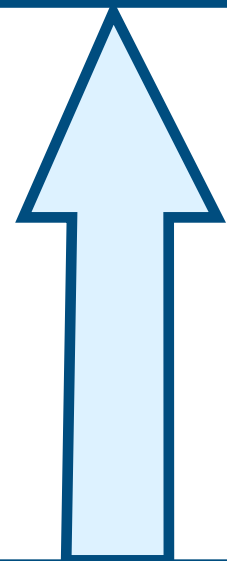
**Chercher
Raisonner**

Coefficient de proportionnalité =
 $6 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 1,2$
On multiplie
les longueurs par 1,2

Calculer

Solution Mathématique (SM)

**Interpréter
Vérifier**



$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'une réduction, les longueurs initiales et agrandies sont proportionnelles.

Modéliser

Interpréter
Vérifier

Solution Mathématique (SM)

- $2 \text{ cm} \times 1,2 = 2,4 \text{ cm}$
- $4 \text{ cm} \times 1,2 = 4,8 \text{ cm}$
- $6 \text{ cm} \times 1,2 = 7,2 \text{ cm}$
- $7 \text{ cm} \times 1,2 = 8,4 \text{ cm}$
- $9 \text{ cm} \times 1,2 = 10,8 \text{ cm}$

Chercher
Raisonner

Coefficient de proportionnalité =
 $6 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 1,2$
On multiplie
les longueurs par 1,2

Calculer

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

Lors d'une réduction, les longueurs initiales et agrandies sont proportionnelles.

Modéliser

Interpréter
Vérifier

Chercher
Raisonner

$2 \text{ cm} \times 1,2 = 2,4 \text{ cm}$

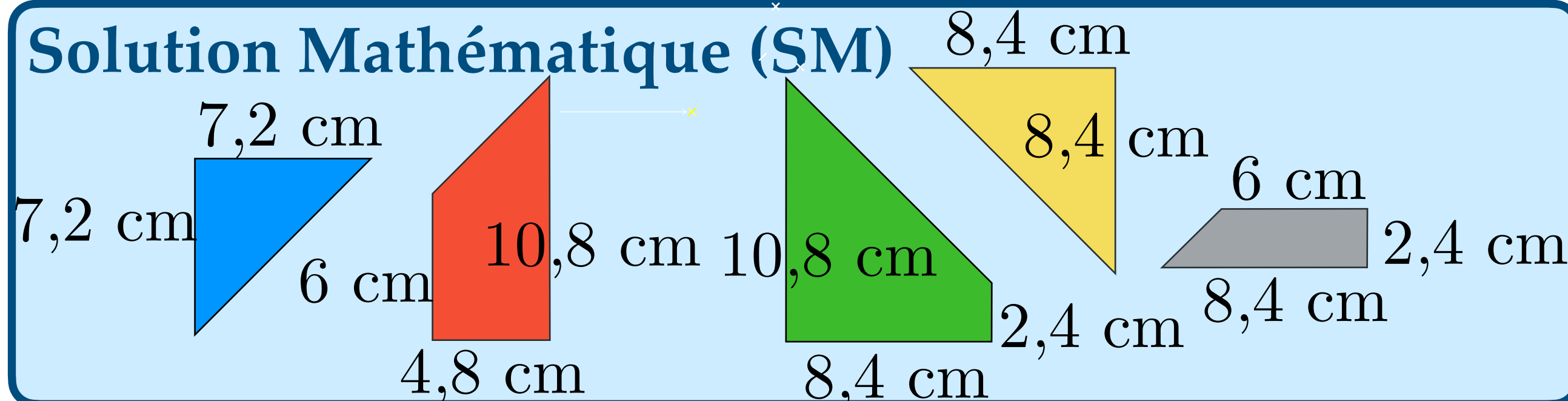
$4 \text{ cm} \times 1,2 = 4,8 \text{ cm}$

$6 \text{ cm} \times 1,2 = 7,2 \text{ cm}$

$7 \text{ cm} \times 1,2 = 8,4 \text{ cm}$

$9 \text{ cm} \times 1,2 = 10,8 \text{ cm}$

Solution Mathématique (SM)



Calculer

Coefficient de proportionnalité =
 $6 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 1,2$
On multiplie les longueurs par 1,2

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

Retour sur le puzzle :

Situation évoquée (SE)

Construire un agrandissement du puzzle en respectant le principe suivant : une longueur initiale de 5 cm doit mesurer 6 cm dans le puzzle agrandi.

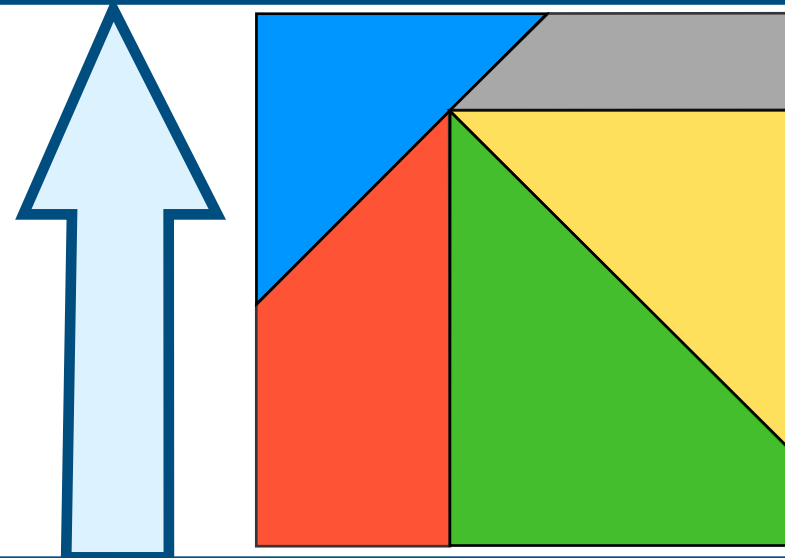
Lors d'un agrandissement, les pièces ne sont pas déformées.

Modèle Mathématique (MM)

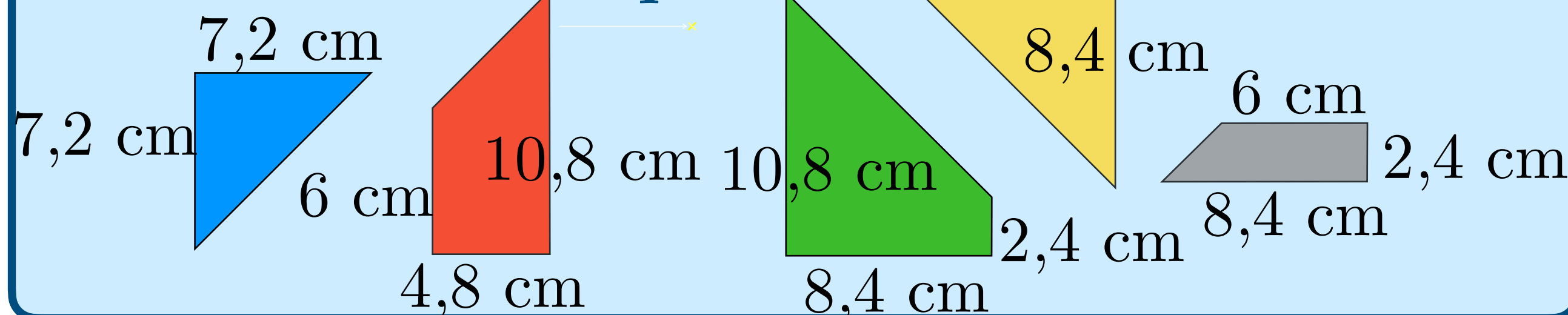
Lors d'une réduction, les longueurs initiales et agrandies sont proportionnelles.

Modéliser

Interpréter
Vérifier



Solution Mathématique (SM)



- $2 \text{ cm} \times 1,2 = 2,4 \text{ cm}$
- $4 \text{ cm} \times 1,2 = 4,8 \text{ cm}$
- $6 \text{ cm} \times 1,2 = 7,2 \text{ cm}$
- $7 \text{ cm} \times 1,2 = 8,4 \text{ cm}$
- $9 \text{ cm} \times 1,2 = 10,8 \text{ cm}$

Chercher
Raisonner

Coefficient de proportionnalité =
 $6 \text{ cm} : 5 \text{ cm} = 1,2$
On multiplie
les longueurs par 1,2

Calculer

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

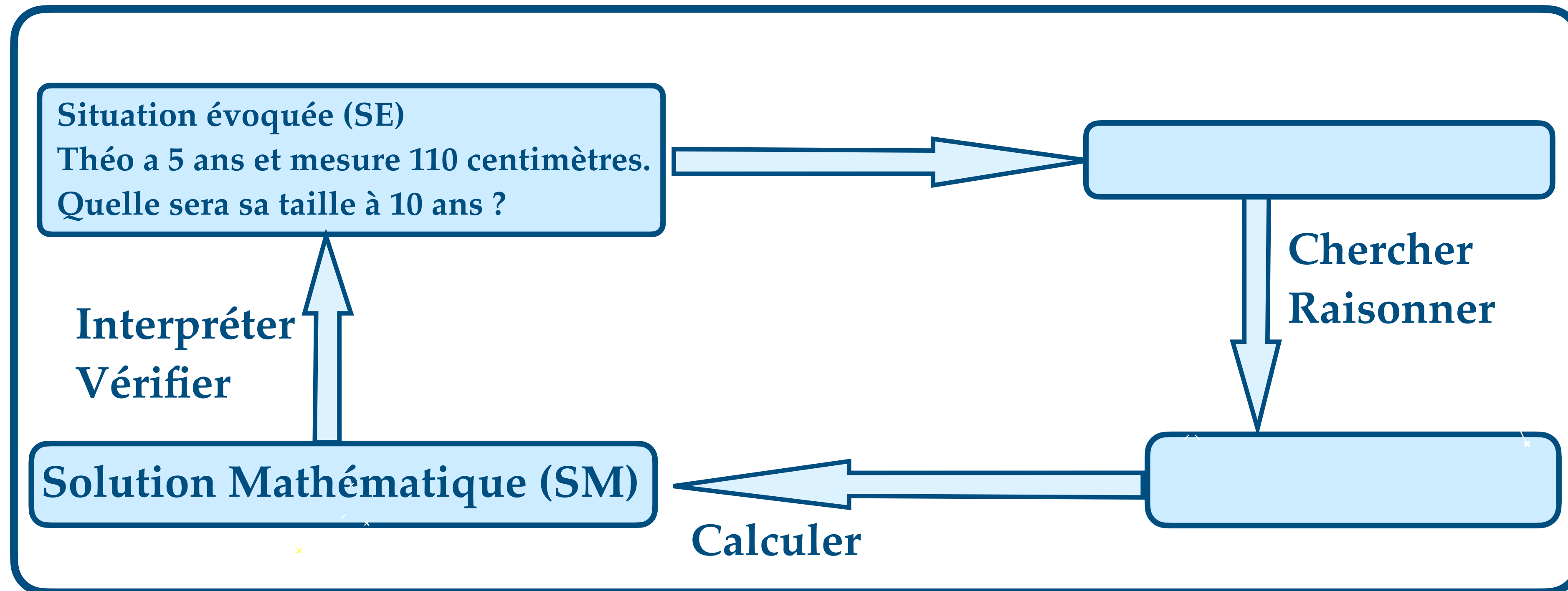
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce $2m20cm$
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

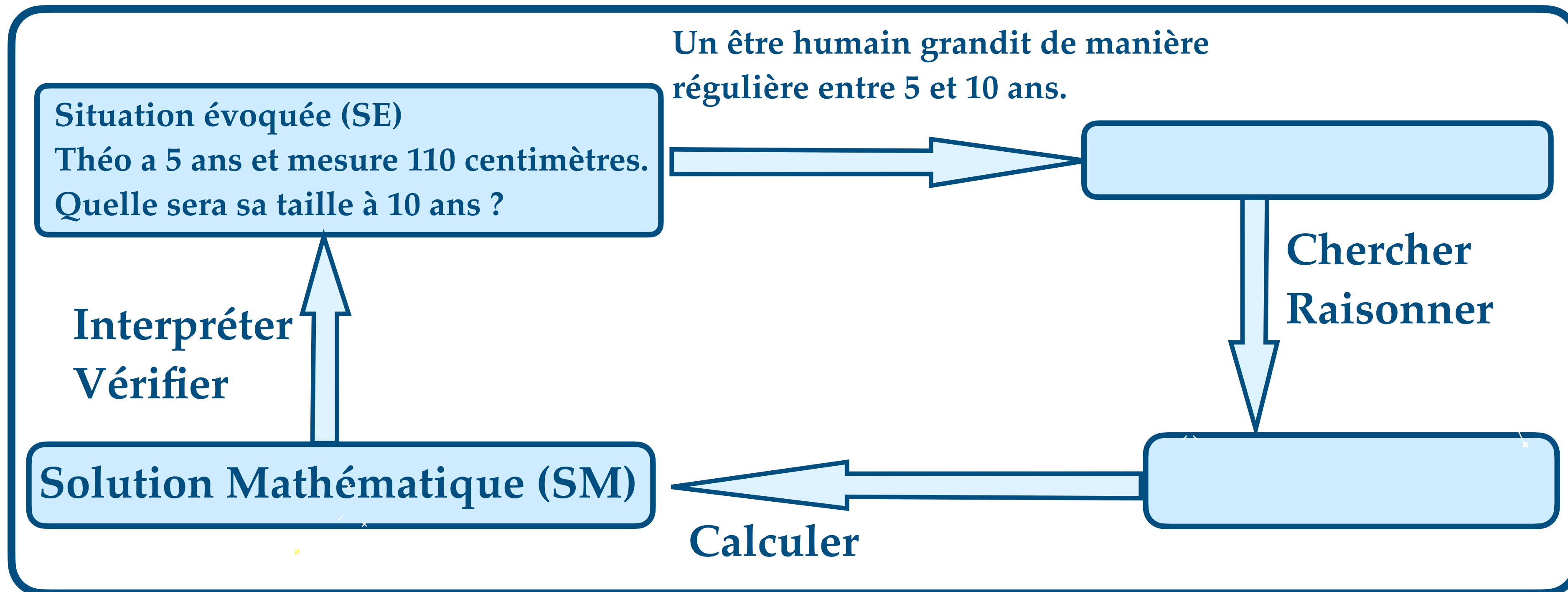
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce $2m20cm$
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

0,999... = 1

7 x ... = 1

Cycle de modélisation

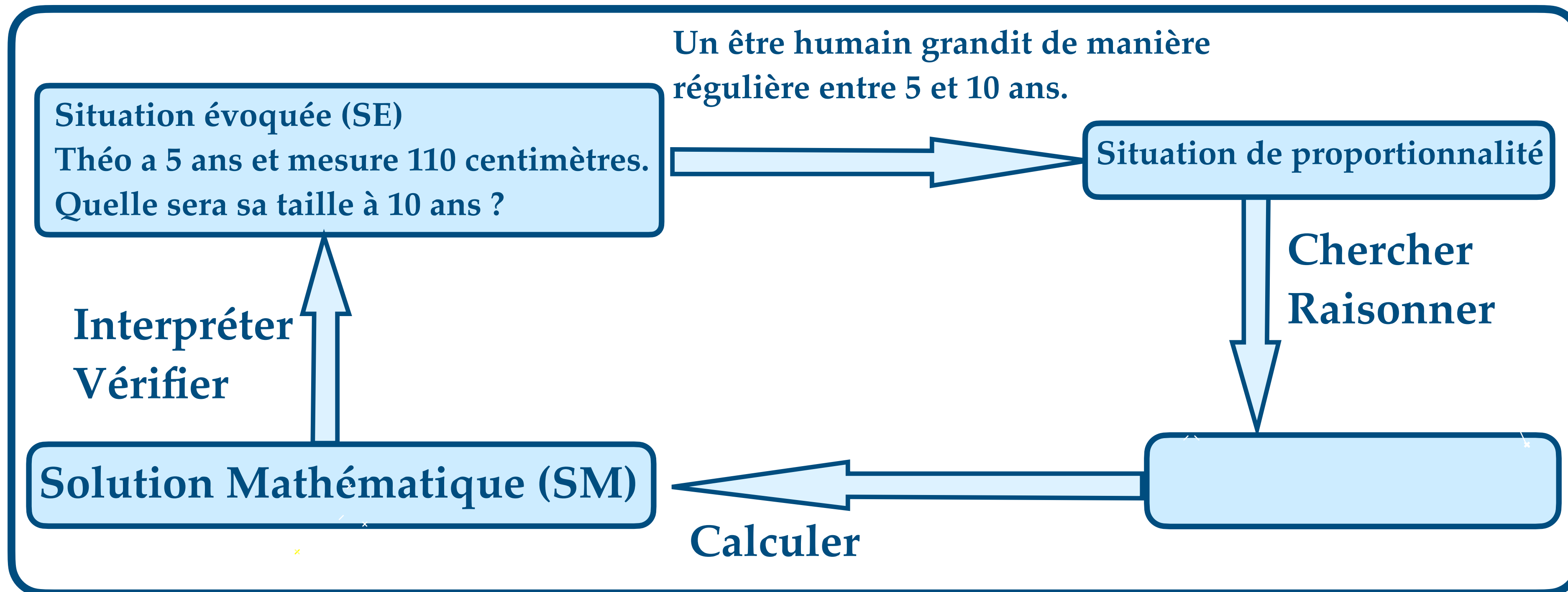
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce $2m20cm$
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

$0,999... = 1$

$7 \times ... = 1$

Cycle de modélisation

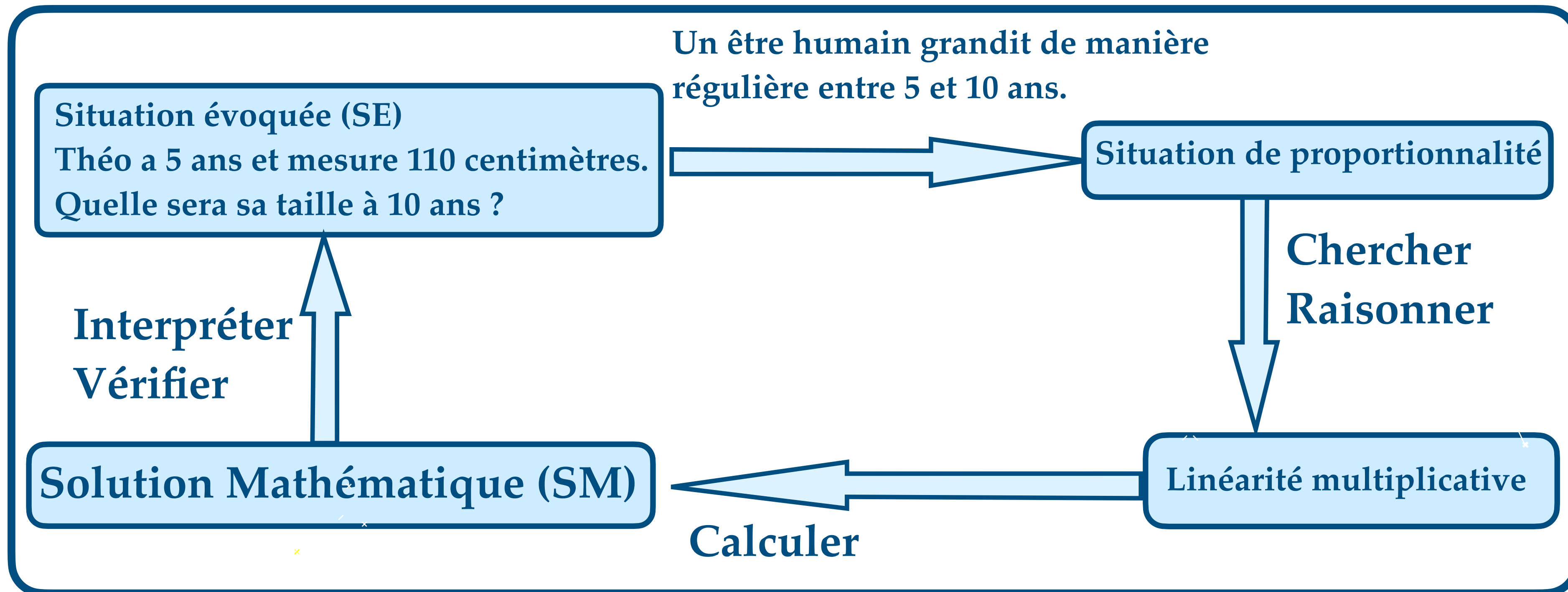
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce $2m20cm$
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

0,999... = 1

7 x ... = 1

Cycle de modélisation

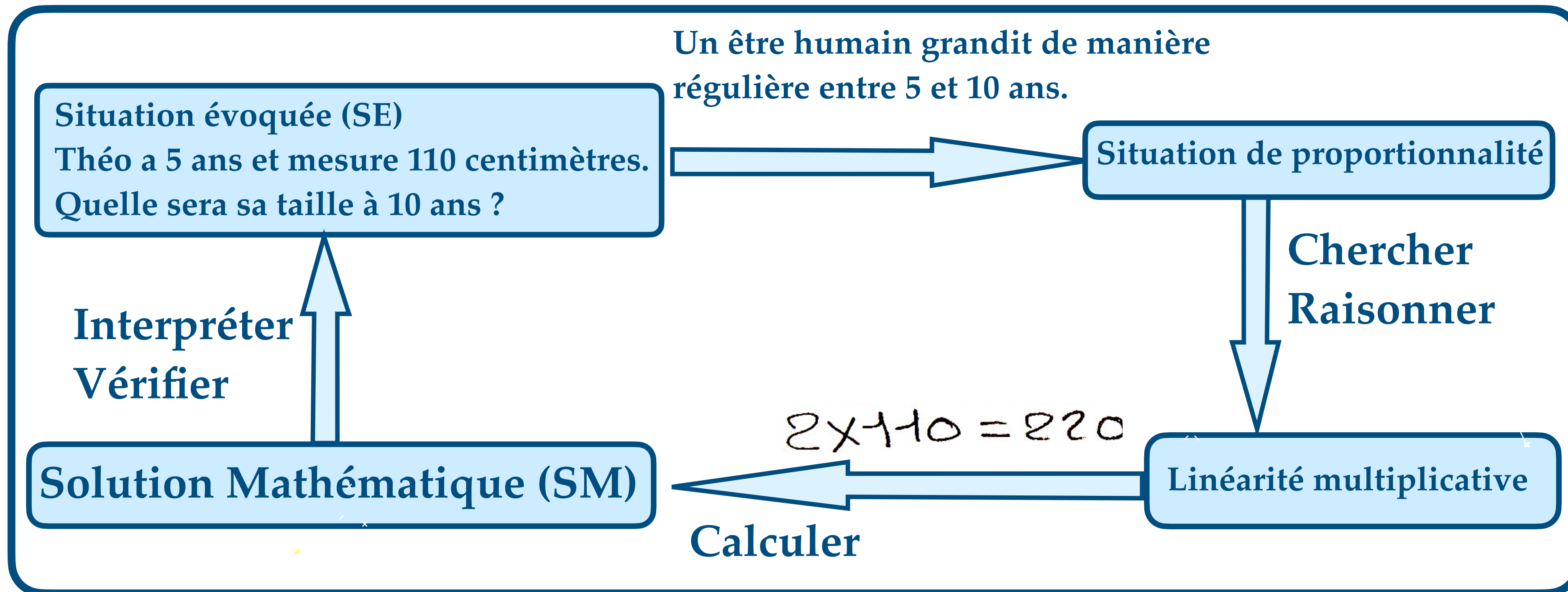
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce $2m20cm$
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

0,999... = 1

7 x ... = 1

Cycle de modélisation

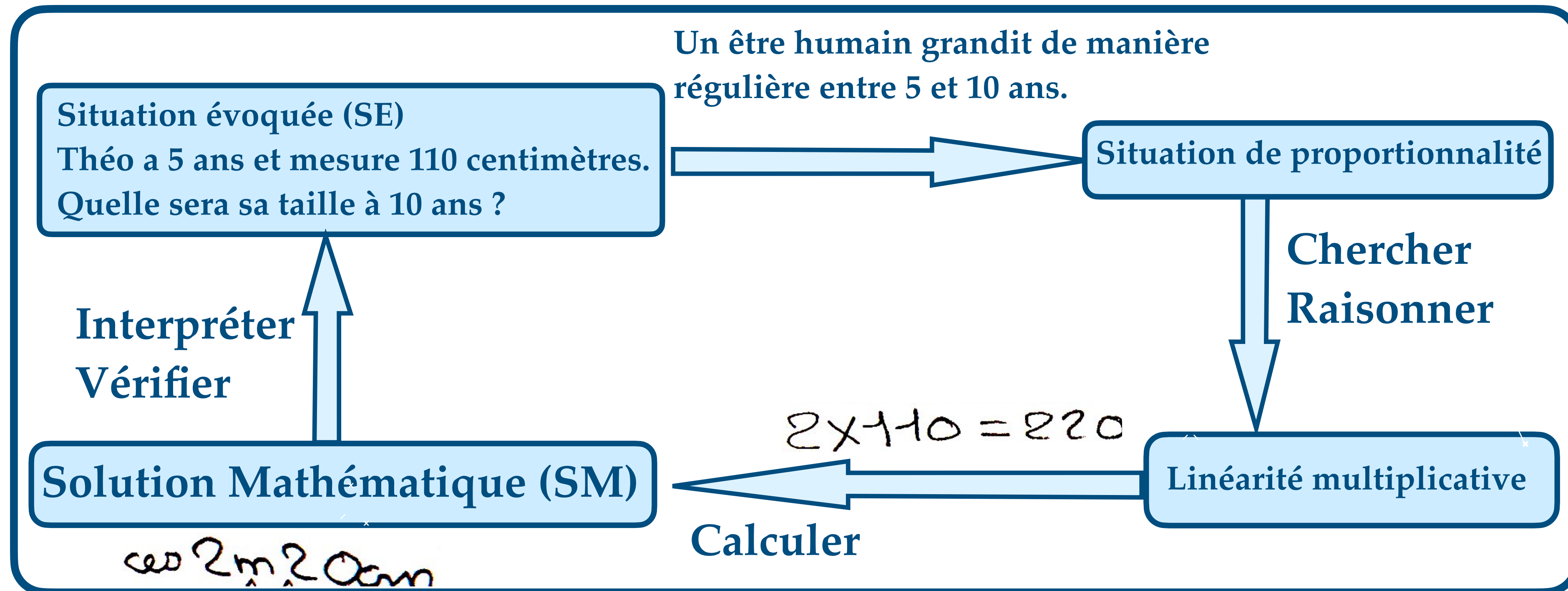
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce 2m20cm
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

0,999... = 1

7 x ... = 1

Cycle de modélisation

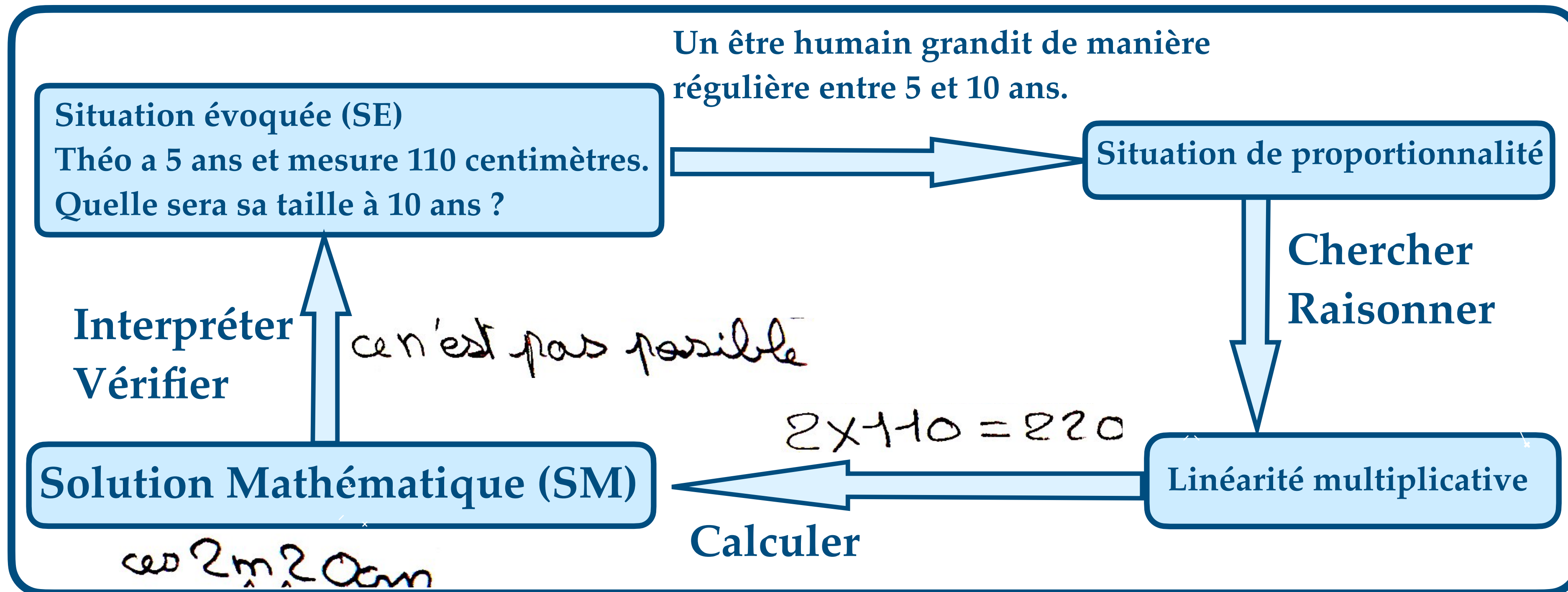
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce 2m20cm
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

0,999... = 1

7 x ... = 1

Cycle de modélisation

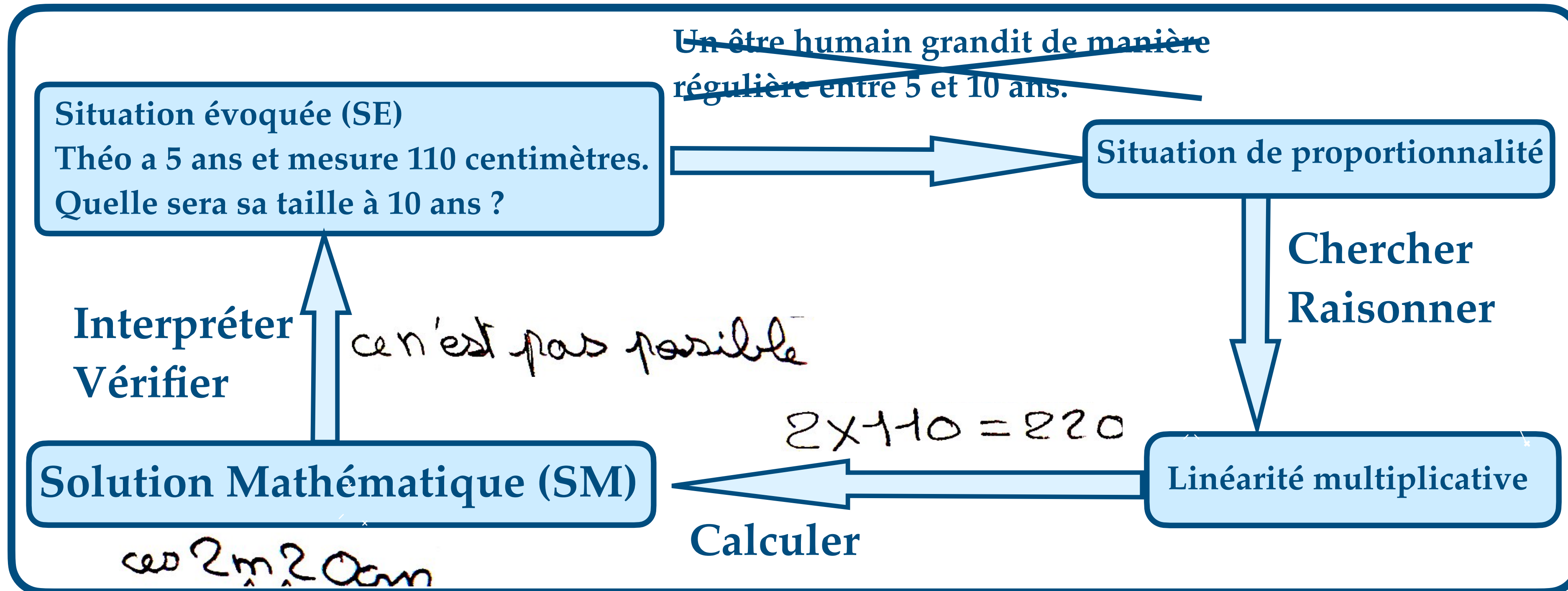
Consigne 11 :

Identifier le cycle de modélisation suivi par cet élève

Problème :

Théo a 5 ans et mesure 110 centimètres.
Quelle sera sa taille à 10 ans ?
Peut-on trouver la réponse ?

~~OUI~~
NON $2 \times 110 = 220$ centimètres ce 2m20cm
ce n'est pas possible



$\frac{a}{10^n}$

$0,999\dots = 1$

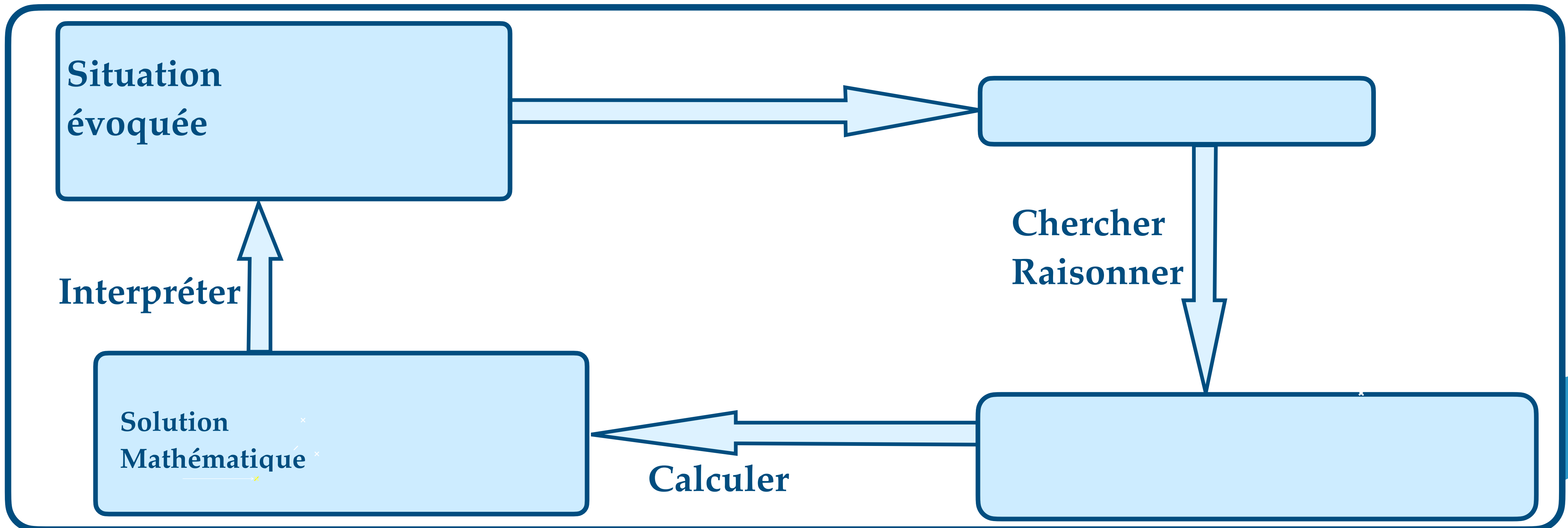
$7 \times \dots = 1$

Cycle de modélisation

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



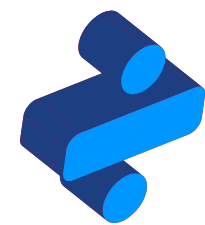
Situation
évoquée

Interpréter

Solution
Mathématique

Calculer

Chercher
Raisonner



$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



Situation évoquée
Une photo

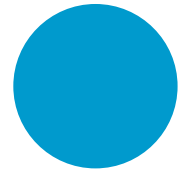
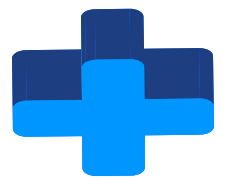
Interpréter

Solution Mathématique

Calculer

Chercher

Raisonner



$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



Situation évoquée

Une photo

Le Géant a les mêmes proportions qu'un homme.

Interpréter

Solution Mathématique

Calculer

Chercher
Raisonner

$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



Situation évoquée
Une photo

Un homme mesure environ 180 cm.

Le Géant a les mêmes proportions qu'un homme.

Interpréter

Solution Mathématique

Calculer

Chercher
Raisonner

$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



Situation évoquée
Une photo

Un homme mesure environ 180 cm.

Le Géant a les mêmes proportions qu'un homme.

Une photo respecte en proportion les longueurs réelles.

Chercher
Raisonner

Interpréter

Solution Mathématique

Calculer

$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



Situation évoquée
Une photo

Un homme mesure environ 180 cm.
Le Géant a les mêmes proportions qu'un homme.

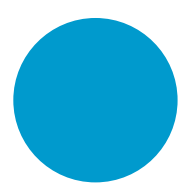
Une photo respecte en proportion les longueurs réelles.
Situation de proportionnalité

Chercher
Raisonner

Interpréter

Solution Mathématique

Calculer



$0,999... = 1$

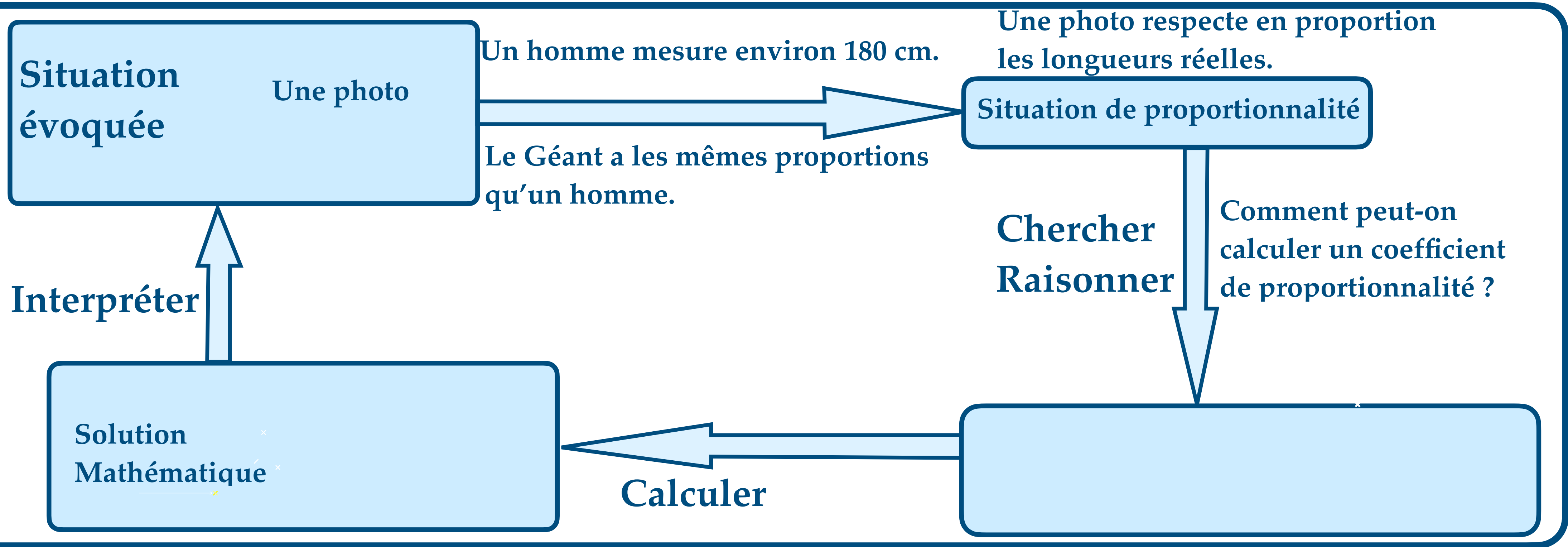
Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



$0,999... = 1$

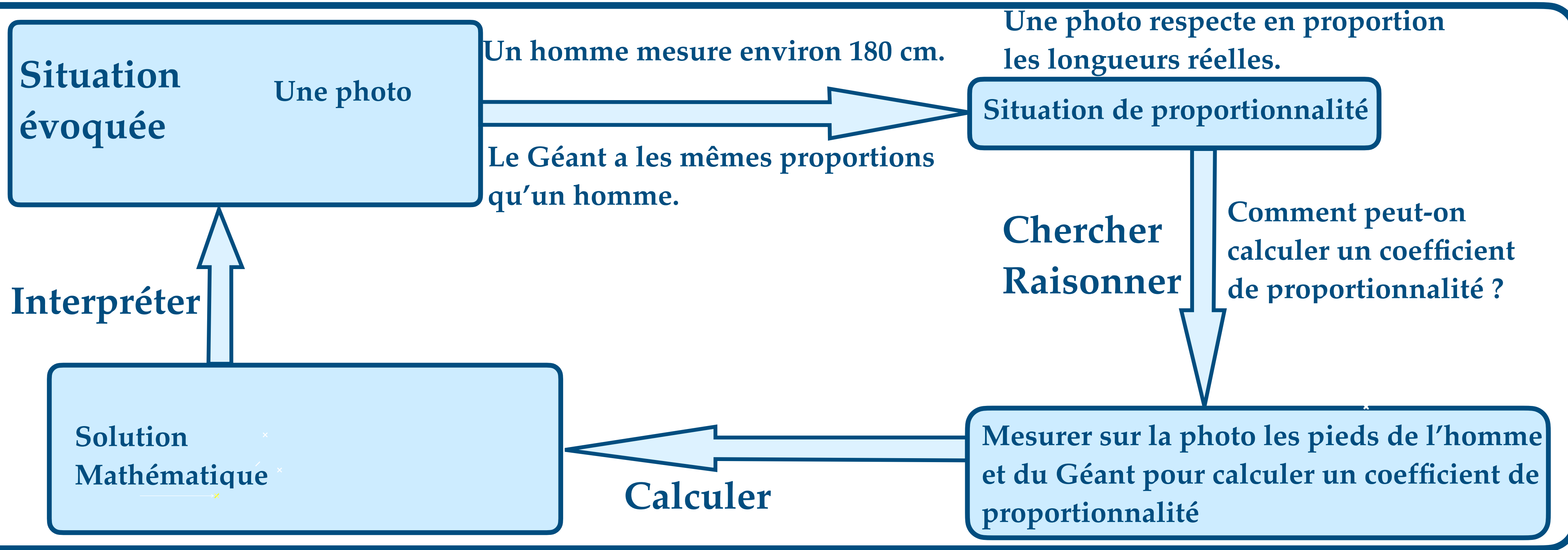
Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Consigne 12 :

Voici une photo représentant la botte du Géant :

Estimer la taille du Géant.
Identifier votre cycle de modélisation.



$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Exemple de cycle de modélisation par des élèves



On cherche le point commun entre le visiteur et le géant :
le pied. Le pied du visiteur : 1,2 km. Le pied du géant : 9,5 cm.
Combien de fois le pied du géant est plus grande que celui du
visiteur ? On fait la division : $9,5 \div 1,2 = 7,9$ on suppose que
le visiteur mesure 1,75 m.

Le géant mesure donc : $1,75 \times 7,9 = 13,8$ m.
Et on peut rajouter que le géant a les
même proportion que nous.

$0,999... = 1$

Cycle de modélisation

$7 \times ... = 1$

Hypothèse 1

On dit que le monsieur mesure 180 cm. Du talon à la moitié de la jambe : on compte 30 cm. On divise 180 cm par 30 cm et on trouve 6. Pour le géant du talon à la moitié de la jambe on mesure 180 cm (la taille de l'homme). On multiplie 180 cm par 6 pour trouver sa taille totale. On trouve 1080 cm = 10,80 m. La proportion du géant est normale.

Hypothèse 2

Le pied du bonhomme fait 1 cm et le pied du géant 10 cm alors on peut dire que le bonhomme est 10 fois plus petit et que le géant est 10 fois plus grand que le bonhomme. ($180 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 1800 \text{ cm}$)
Le géant a la même proportion que nous.
180 cm est la taille moyenne d'un homme.
Le géant mesure 18 m.



Exemple de cycle de modélisation
par des élèves