INSPÉ — Institut national supérieur du professorat et de l'éducation — Académie de Paris

Sorbonne Université

DU Maths 2nd degré

TD 1 SUR LES ÉQUATIONS

Consigne 1 :

Pour chaque erreur, émettre une hypothèse sur son origine.

Exercice 1 :

Résoudre l'équation $4(2x-3) = 5 - 7x$

$4(2x-3) = 5-7x$
$8x-12 = 5-7x$
$8x-7x = 5-12$
$x = -7$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation $12x^2 - 16x = 0$

3) $12x^2 + 16x = 0$
alors
$12x^2 = 0$ ou $16x = 0$
$\frac{12x^2}{12} = \frac{0}{12}$ | $\frac{16x}{16} = \frac{0}{16}$
$x^2 = 0$ | $x = 0$
$x = \sqrt{0} = 0$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation $16x = 0$

$16x = 0$
$16x - x = 0 - x$
$16 = -x$
$x = -16$

Exercice 4 :

Résoudre l'équation $36x^2 - 63x = 0$

$36x^2 - 63x = 0$
$36x^2 - 63x \boxed{-36x^2} = 0 - 36x^2$
$-63x = -36x^2$
$x = \frac{7}{4} = 1{,}75$

Vérification :

$36 \times \frac{7}{4}^2 - 63 \times \frac{7}{4} = 0$

Exercice 5 :

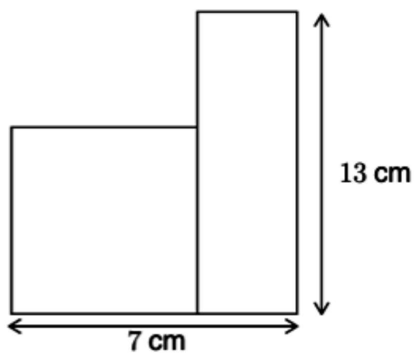
Résoudre l'équation $4(2x-3) = 5 - 7x$

$4(2x-3) = 5-7x$
$4(2x-2x-3) = 5-7x+2x$
$4-3 = 5-5x$
$1 = x$

Exercice 6 :

On considère un carré et un rectangle juxtaposés de la manière suivante :

Existe-t-il une longueur du côté du carré pour laquelle le périmètre du carré est égal à celui du rectangle ? Si oui, laquelle ?



Critères classés par ordre d'importance pour évaluer la difficulté d'une résolution d'équation

1) Nature de l'équation (1er ou 2nd degré)

2) Structures des membres l'équation (expressions réduites, non réduites, factorisés, nulle)

3) Pour les équations du 2nd degré, identification de la méthode de factorisation (facteur commun ou identité remarquable ; facile ou difficile à identifier)

4) Nature de la solution (nombre décimal, négatif, rationnel ou irrationnel)

Consigne 2

Analyser ces huit exercices en utilisant les critères ci-dessus.

Exercice 1 8 est-il solution de l'équation $6x^2 - 5x + 1 = -7(3x - 1)$?

Exercice 2 Résoudre l'équation $3x + 5 = 8 - 7x$

Exercice 3 Résoudre l'équation $8x + 8 = -2 - 3x$

Exercice 4 Résoudre l'équation $5(3x - 7) = 7x - (5 - 11x)$

Exercice 5 Résoudre l'équation $18x^2 - 12x = 0$

Exercice 6 Résoudre l'équation $36x^2 - 17 = 0$

Exercice 7 Résoudre l'équation $11x(x + 3) = 7(x + 3)$

Exercice 8 Résoudre l'équation $(7x - 1)^2 = 36$

Critères classés par ordre d'importance pour évaluer
la difficulté d'une mise en équation d'un problème sans sa résolution

1) Identification de l'égalité (implicite ou explicite)

2) Relations entre les quantités
(congruentes ou non congruentes avec l'énoncé ; utilisation de propriétés)

3) Choix de l'inconnue
(imposé ou à la charge de l'élève ; multiple ou unique)

4) Nature de l'égalité (conditionnelle ou non conditionnelle : sait-on s'il y a une solution?)

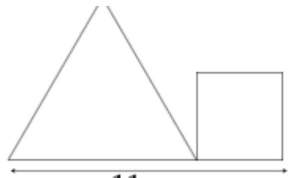
5) Le contexte
(familier pour les élèves ; vie réelle ou interne aux maths ; support géométrique)

Consigne 3

Voici une liste de quatre exercices.
Analyser ces exercices, identifier les variables didactiques afin d'établi des critères permettant de classer par ordre croissant de difficulté la mise en équation d'un problème.

Exercice 1 Antigone souhaite acheter des fruits exotiques. Son choix se porte sur des mangues à 14,6 €/le kilo ou des fruits de la passion à 11,2 €/le kilo.
Elle remarque qu'il lui manque 1,28 € pour acheter des mangues mais qu'en achetant la même masse des fruits de la passion on lui rendrait 4,84 €.
Quelle masse de fruits de la passion, Antigone a-elle achetée ?

Exercice 2 On juxtapose sur un segment de longueur 11 cm, un carré et d'un triangle équilatéral. Est-il possible que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre ?



Exercice 3 Voici deux programmes de calculs :

Programme A :	Programme B :
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Lui ajouter 4	Multiplier par 4
Multiplier le résultat par -3	Au résultat ajouter -3

Est-il possible de choisir un nombre permettant d'obtenir le même résultat ?

Exercice 4

Delphine et Louisa exercent le métier d'enseignants. Delphine est payée 50 € de l'heure et Louisa est payée 30 € de l'heure. Travaillant 16 heures de moins par mois que Delphine, Louisa a perçoit la moitié du salaire de Delphine.
Combien d'heures Delphine a-t-elle travaillé dans un mois ?
On notera x le nombre d'heures par Delphine dans un mois

Consigne 4 :

Voici trois situations d'introduction aux équations issues de manuels.
Les analyser et les comparer selon les trois critères suivants :

- la nature des équations introduites et de leur solution
- l'introduction de la lettre pour désigner l'inconnue
- la motivation du recours aux équations

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1

Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.

Balance 2

Balance 3

2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.

Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?

3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?

Rechercher avec le tableur TICE

Manon et Tom constatent qu'ils ont choisi le même nombre entier et qu'avec leurs programmes de calcul ils obtiennent le même résultat.

Ils demandent à leur amie Fatou de trouver ce nombre à l'aide du tableur.

a. On note n le nombre choisi par Manon et Tom, inconnu de Fatou.
Traduire par une égalité le fait que Manon et Tom trouvent le même résultat.
Une telle égalité, où figure un nombre inconnu, est appelée **une équation**.

b. Réaliser la feuille de calcul ci-contre. Saisir les formules qui conviennent dans les cellules B2 et C2, puis les recopier vers le bas.

c. Comment Fatou fait-elle pour trouver le nombre choisi en commun par Manon et Tom ?
Cette valeur de n est appelée **solution** de l'équation.

	A	B	C
1	n	$9\,n - 20$	$4\,n + 15$
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		

PROBLÈME n° 1
Arthur a une calculatrice sur laquelle il affiche un nombre.
Il multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7. La calculatrice affiche alors 10,9.
Quel nombre a-t-il affiché au départ ?

PROBLÈME n° 2
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même** nombre.
Arthur multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7.
Béatrice multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 1.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

PROBLÈME n° 3
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même** nombre.
Arthur multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 9.
Béatrice multiplie le nombre affiché par 2, puis retranche 3.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Hamid, un élève de quatrième, a écrit ceci pour le problème n° 3.

J'appelle n le nombre affiché au départ. Arthur a calculé $n \times 5 + 9$ et Béatrice a calculé $n \times 2 - 3$.
On cherche un nombre n pour lequel l'égalité $n \times 5 + 9 = n \times 2 - 3$ est vraie.

On dit qu'Hamid a mis le problème en équation. Reste encore à trouver les nombres pour lesquels l'égalité est vraie. Ces nombres sont les solutions de l'équation. On peut utiliser des logiciels pour trouver ces solutions.

<u>Consigne 5 :</u>

Cette situation d'introduction respecte-t-elle les préconisations contenues dans les documents Eduscol pour introduire la notion d'équation ?

<u>Problème n°1 :</u>

Juliette et Manu ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Manu tape sur les touches : × 2 + 6 3 EXE

Et, Juliette tape sur les touches : × 8 + 2 4 EXE

Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

<u>Problème n°2 :</u>

Delphine et Samuel ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Samuel tape sur les touches : × 9 − 1 7 EXE

Et, Delphine tape sur les touches : × 2 + 1 5 EXE

Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Consigne 6 :
Analyser le discours de l'enseignant dans cette vidéo.

Consigne 7 :
Voici deux traces écrites de cours sur les équations issues de manuels.
Les analyser et les comparer avec les trois critères suivants :
- le statut des connaissances
- les moyens de contrôle
- les explications données

RÈGLE 1 Une égalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.
RÈGLE 2 Une égalité reste vraie quand on multiplie (ou divise) les deux membres par un même nombre **non nul**.

EXEMPLE : Résoudre $8x - 57 = x + 27$.

$8x - 57 + 57 = x + 27 + 57$ ← règle **1**

$8x = x + 84$

$8x - x = x + 84 - x$ ← règle **1**

$7x = 84$

$7x \div 7 = 84 \div 7$ ← règle **2**

donc $x = 12$.

La solution de l'équation est 12.

Méthode 1

Résoudre une équation ou une inéquation

ÉNONCÉ

Résoudre : **a. (E)** $6(x + 2) = 7x - 22 + 2x$ **b. (I)** $(-3) \times (x - 4) \leqslant 8$

SOLUTION

a. (E) est équivalente à : $6x + 12 = 9x - 22$ ❶

$6x + 12 - 6x = 9x - 22 - 6x$ ❷

$12 = 3x - 22$

$12 + 22 = 3x - 22 + 22$ ❸

$34 = 3x$

$34 : 3 = 3 \times x : 3$ ❹

$\dfrac{34}{3} = x$

La solution de **(E)** est $\dfrac{34}{3}$.

CONSEIL

❶ On commence par développer et réduire chaque membre l'équation.
❷ On se « débarrasse » du **terme en x** dans l'un des deux membres.
❸ On se « débarrasse » du **terme constant** dans le membre où il reste le terme en x.
❹ On se « débarrasse » du **facteur** de x.

Consigne 9 :
Voici un extrait d'un manuel sur la mise en équation de problèmes.
Analyser son utilité pour les élèves.

3 Modéliser une situation

Méthode

Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes :

① **Choix de l'inconnue**
On choisit l'inconnue, généralement notée x, qui désigne ce que l'on cherche.

② **Mise en équation**
On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.

③ **Résolution**
On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.

④ **Conclusion**
On interprète le résultat en rédigeant une phrase.

Exemple

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe.
Elle constate qu'elle a 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.

- Combien a-t-elle de bonbons à la fraise ?

① **Choix de l'inconnue**
On choisit l'inconnue : on appelle x le nombre de bonbons à la fraise.

② **Mise en équation**
Il y a deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise donc le nombre de bonbons à la réglisse est égal à $2x$.
Comme il y a 4 bonbons à la menthe, le nombre total de bonbons est donc égal à $x + 2x + 4$.
Le nombre total de bonbons est aussi égal à 19.
On peut donc écrire l'équation : $x + 2x + 4 = 19$.

③ **Résolution**

$x + 2x + 4 = 19$ ◀ Dans le membre de gauche, on simplifie l'expression $x + 2x + 4$ qui devient $3x + 4$.

$3x + 4 = 19$

$3x + 4 - 4 = 19 - 4$ ◀ On soustrait 4 aux deux membres de l'égalité.

$3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$ ◀ On divise les deux membres par 3.

$x = 5$

④ **Conclusion**
Léa a donc acheté 5 bonbons à la fraise. ◀ On peut vérifier cette solution. Il y a :
- 5 bonbons à la fraise
- $2 \times 5 = 10$ bonbons à la réglisse
- 4 bonbons à la menthe

Soit un total de $5 + 10 + 4 = 19$ bonbons.