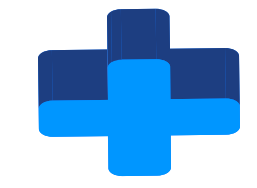


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x^n + y^n = z^n$$

LES ÉQUATIONS



$$a = 10^{-n}$$

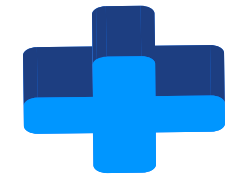
$$x^2 = -1$$

guillaume.didier@inspe-paris.fr

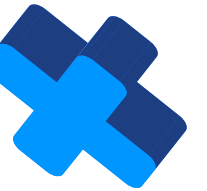
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

PLAN DE LA SÉANCE

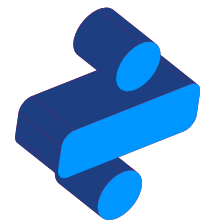
$$x^n + y^n = z^n$$



Les erreurs classiques des élèves



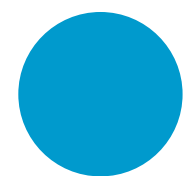
Le programme de l'enseignement des équations au cycle 4



Les obstacles dans l'enseignement des équations

Quels critères pour évaluer la difficulté d'un exercice ?

Situations d'introduction possibles pour les équations



Trace écrite de cours

Aides potentielles pour les équations

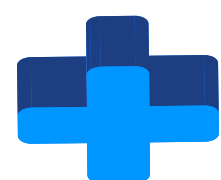
$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Liste non exhaustive de documents de référence sur les équations au cycle 4

$$x^n + y^n = z^n$$

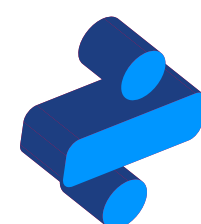


Document d'accompagnement du cycle 4 « Utiliser le calcul littéral », Éduscol (2016)



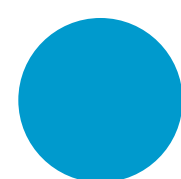
Document d'accompagnement « Du numérique au calcul littéral », Éduscol (2008).

COMBIER.G-PRESSIAT.A-GUILLAUME.J-C Les débuts de l'algèbre au collège. INRP (1996).



SIREJACOB.S Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner :
les équations au collège, petit'x n°102 (2016)

$$x^2 = -1$$



COPPÉ.S-CHALANCON.F-PASCAL.N Les vérifications dans les équations,
les inéquations et en calcul littéral, petit'x n°58 (2002)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ERREURS CLASSIQUES D'ÉLÈVES

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 1 :

Pour chaque erreur, émettre une hypothèse sur son origine.

Liée au discours pédagogique :
« on fait passer de l'autre côté »

Exercice :

Résoudre l'équation $4(2x - 3) = 5 - 7x$

Handwritten student work for the first exercise:

$$\begin{aligned} 4(2x - 3) &= 5 - 7x \\ 8x - 12 &= 5 - 7x \\ 8x - 7x &= 5 - 12 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Exercice :

Résoudre l'équation $12x^2 - 16x = 0$

Handwritten student work for the second exercise:

$$\begin{aligned} 3) \quad 12x^2 + 16x &= 0 \\ \text{alors} \\ 12x^2 &= 0 & \text{ou} & \quad 16x = 0 \\ \frac{12x^2}{-12} &= \frac{0}{-12} & \quad & \quad \frac{16x}{-16} = \frac{0}{-16} \\ x^2 &= 0 & \quad & \quad x = 0 \\ x &= \sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

Utilisation du théorème
du produit nul à une somme

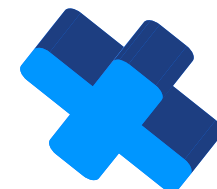
Exercice :

Résoudre l'équation $16x = 0$

Handwritten student work for the third exercise:

$$\begin{aligned} 16x &= 0 \\ -16x - x &= 0 - x \\ -16 &= -x \\ x &= -16 \end{aligned}$$

Mauvaise compréhension
du symbolisme algébrique

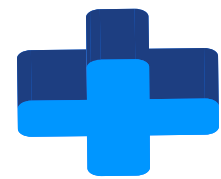


$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ERREURS CLASSIQUES D'ÉLÈVES $x^n + y^n = z^n$



Exercice :

Résoudre l'équation $36x^2 - 63x = 0$

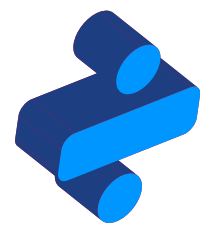
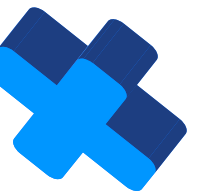
Handwritten student solution for the equation $36x^2 - 63x = 0$. The student shows the following steps:

$$36x^2 - 63x = 0$$
$$36x^2 - 63x \boxed{-36x^2} = 0 - 36x^2$$
$$-63x = -36x^2$$
$$x = \frac{7}{4} = 1,75$$

Verification:

$$36 \times \frac{7}{4}^2 - 63 \times \frac{7}{4} = 0$$

Extension de la méthode de résolution des équations de degré 1 pour les équations de degré 2



Exercice :

Résoudre l'équation $4(2x - 3) = 5 - 7x$

Handwritten student solution for the equation $4(2x - 3) = 5 - 7x$. The student shows the following steps:

$$4(2x - 3) = 5 - 7x$$
$$4(2x - 2x - 3) = 5 - 7x + 2x$$
$$4 - 3 = 5 - 5x$$
$$1 = 5x$$

Utilisation de la propriété de conservation de l'égalité à un membre non réduit

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ERREURS CLASSIQUES D'ÉLÈVES

$$x^n + y^n = z^n$$



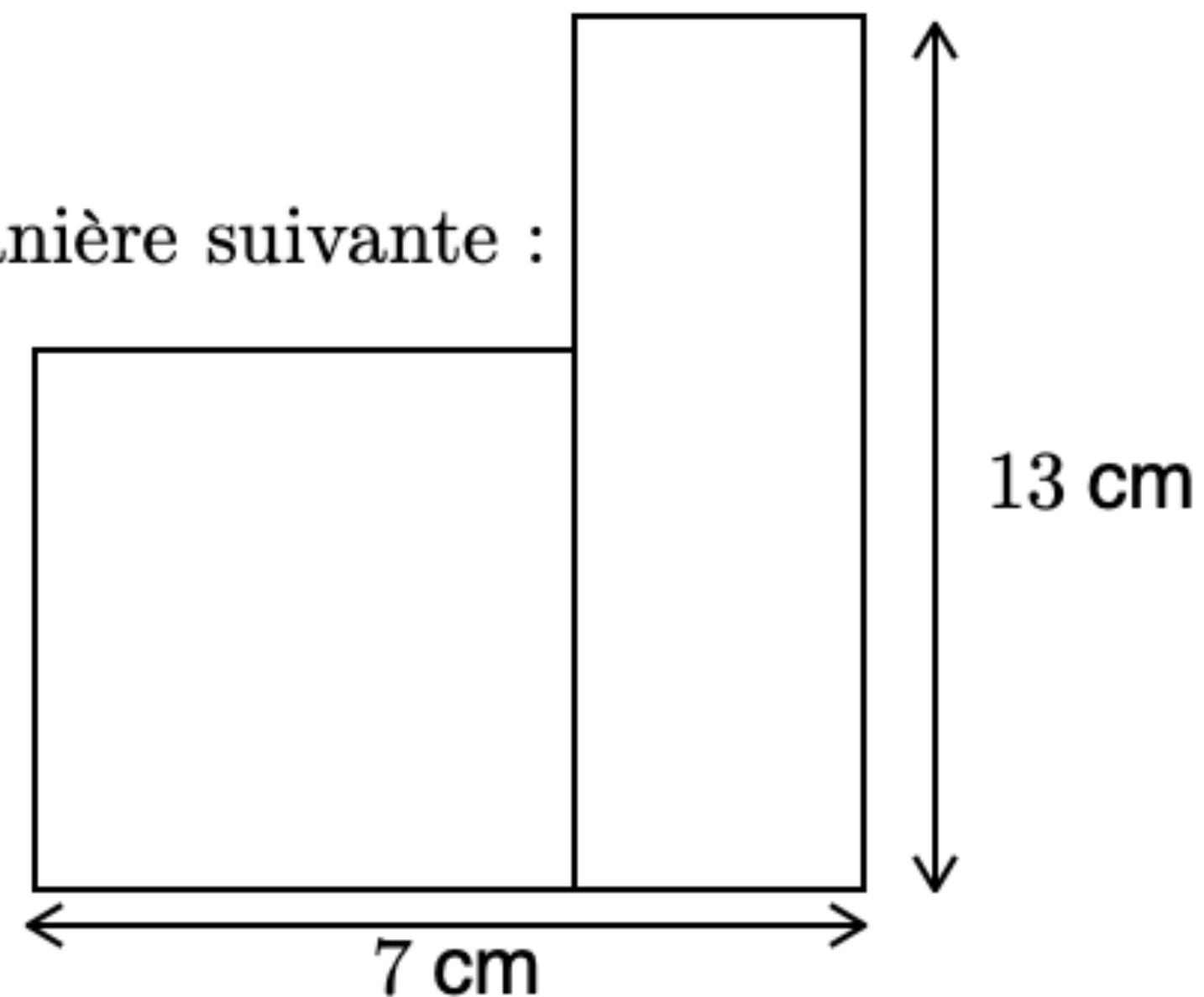
$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

Exercice :

On considère un carré et un rectangle juxtaposés de la manière suivante :

Existe-t-il une longueur du côté du carré pour laquelle le périmètre du carré est égal à celui du rectangle ? Si oui, laquelle ?



2) périmètre du carré = périmètre du rectangle

Confusion aire/périmètre

On note x la longueur d'un côté du carré

$$x = 91 : 17$$

$$x = \frac{91}{17}$$

$$\text{périmètre du carré} = x \times 4$$

$$= 4x$$

Verification

$$\text{périmètre du rectangle} = 13 \times (7 - x)$$

$$4 \times \frac{91}{17} = \frac{364}{17}$$

Vérification à partir de l'équation écrite et non à partir du problème

$$4x = 13(7 - x)$$

$$13(7 - \frac{91}{17}) = \frac{364}{17}$$

$$4x = 13 \times 7 + 13x(-x)$$

145

Pour que le périmètre du carré soit égal à celui du rectangle, la longueur d'un côté du carré doit être égale à $\frac{91}{17}$

$$4x = 91 - 13x$$

$$4x + 13x = 91 - 13x + 13x$$

$$17x = 91$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

LE PROGRAMME DU CYCLE 4

$$x^n + y^n = z^n$$

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité ;
- propriétés de distributivité (simple et double) ;
- annulation d'un produit (démonstration possible par disjonction de cas) ;
- factorisation de $a^2 - b^2$.

Compétences associées

- développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples ;
- utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation ;
- mettre un problème en équation en vue de sa résolution ;
- résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant (équations produits), en particulier des équations du type $x^2 = a$.

Les autres identités ne sont plus au programme

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, d'abord dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- les règles de calcul sur les nombres relatifs et les fractions, notamment la condition d'égalité de deux fractions (si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et réciproquement) ;
- les conventions d'écritures du calcul littéral ;
- les formules de distributivité simple et double ;
- l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- les procédures de résolution d'équations du type $ax = b$ et $a + x = b$.

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ATTENDUS DE FIN DE 5^e

$$x^n + y^n = z^n$$

NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève

Équations

Les élèves sont amenés à tester si une égalité où figure une lettre est vraie lorsqu'on lui attribue une valeur numérique.

Les élèves testent des égalités par essais erreurs, à la main ou à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, des valeurs numériques dans des expressions littérales, ce qui constitue une première approche de la notion de solution d'une équation, sans formalisation à ce stade.

◆ Type d'exercice

Utiliser le calcul littéral

Ce que sait faire l'élève

- Il utilise les notations $2a$ pour $a \times 2$ ou $2 \times a$ et ab pour $a \times b$, a^2 pour $a \times a$ et a^3 pour $a \times a \times a$.
- Il utilise la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme $ax + bx$ où a et b sont des nombres décimaux.
- Il produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul.
- Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales.
- Il utilise une lettre pour démontrer une propriété générale.
- Il substitue une valeur numérique à une lettre pour :
 - calculer la valeur d'une expression littérale ;
 - tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques ;
 - contrôler son résultat.

■ Exemple d'énoncé

Indication générale

Travail préparatoire aux notions d'inconnue et d'équations

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ATTENDUS DE FIN DE 4^e

$$x^n + y^n = z^n$$

NOMBRES ET CALCULS

• Ce que sait faire l'élève

Les notions d'inconnue et de solution d'une équation sont abordées. Elles permettent d'aborder la mise en équation d'un problème et la résolution algébrique d'une équation du premier degré.

Les équations sont travaillées tout au long de l'année par un choix progressif des coefficients de l'équation.

Définir la notion d'inconnue et « résoudre une équation »

◆ Type d'exercice

▪ Exemple d'énoncé

Indication générale

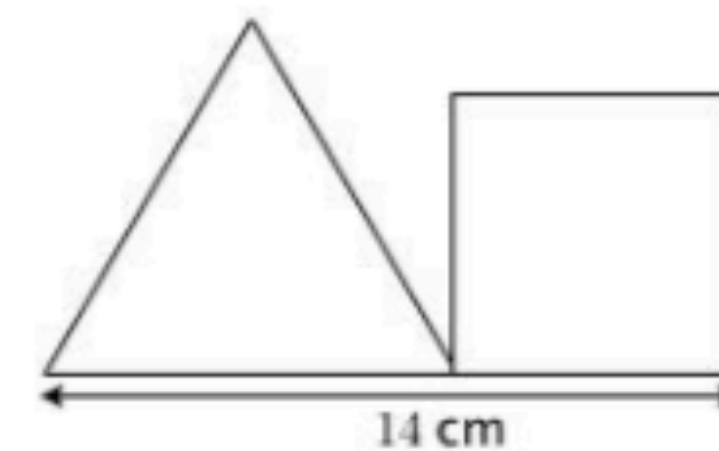
Utiliser le calcul littéral

Ce que sait faire l'élève

- Il introduit une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation.
- Il teste si un nombre est solution d'une équation.
- Il résout algébriquement une équation du premier degré.

Exemples de réussite

- ◆ Il met en équation le problème suivant :
On juxtapose un triangle équilatéral et un carré comme schématisé ci-contre.
Est-il possible que le triangle et le carré aient le même périmètre ?
- 4 est-il solution des équations suivantes ?
 $3x + 2 = 8$; $5x - 6 = 3x + 2$; $x^2 - 9 = 3x - 5$; $\frac{x-1}{12} = \frac{1}{4}$.
- ◆ Il résout les équations du type :
 $4x + 2 = 0$; $5x - 7 = 3$; $2x + 5 = -x - 4$.



Difficulté importante mais tâche essentielle à travailler

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ATTENDUS DE FIN DE 3^e

$$x^n + y^n = z^n$$

NOMBRES ET CALCULS

- Ce que sait faire l'élève
- ◆ Type d'exercice
- Exemple d'énoncé
- Indication générale

Équations

La factorisation d'une expression du type $a^2 - b^2$ permet de résoudre des équations produits se ramenant au premier degré (notamment des équations du type $x^2 = a$ en lien avec la racine carrée).

Aucune virtuosité calculatoire n'est attendue dans les développements et les factorisations.



Définir la notion d'inconnue et « résoudre une équation »

Utiliser le calcul littéral

Ce que sait faire l'élève

- Il résout algébriquement différents types d'équations :
 - équation du premier degré ;
 - équation s'y ramenant (équations produits) ;
 - équations de la forme $x^2 = a$ sur des exemples simples.
- Il résout des problèmes s'y ramenant, qui peuvent être internes aux mathématiques ou en lien avec d'autres disciplines.

Exemples de réussite

- ◆ Il sait que $-(3x - 7) = -3x + 7$
- ◆ Il développe et réduit les expressions suivantes (notamment lors d'activités rituelles) : $(2x - 3)(5x + 7)$; $-4x(6 - 3x)$; $3(2x + 1) - (6 - x)$.
- ◆ Il factorise $x^2 - 64$; $4x^2 - 49$ et développe $(x + 6)(x - 6)$; $(2x - 5)(2x + 5)$ en question flash.
- ◆ Il factorise : $5a + 15b$; $12x^2 - 15x$; $16x^2 - 144$; $x^2 - 13$.
- ◆ Il résout rapidement : $-3x = 12$; $x + 9 = 5$; $7x = 5$.
- ◆ Il résout les équations suivantes : $4x - 8 = 7x + 4$; $5(7 - 2,2x) = 9 - 6x$; $(2,5x - 7)(8x - 9,6) = 0$; $x^2 = 20$.
- La facture d'eau d'un jardinier s'élève à 545 € par an. Il prévoit d'économiser 55 € par an en installant un récupérateur d'eau de pluie. Le récupérateur a coûté 199 € à l'achat et va nécessiter chaque année 13 € pour l'entretien (nettoyage, tuyau...). Au bout de combien d'années l'installation sera-t-elle rentable ?

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

$$x^n + y^n = z^n$$



éduscol Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Objectifs

Important pour construire la notion d'équation

Permet de motiver la technique



Au cycle 3, l'élève a fait fonctionner de manière implicite les propriétés des opérations dans le champ des nombres, mais sans les avoir formalisées en tant que propriétés générales. Il a rencontré des formules littérales dans le cadre des apprentissages liés aux mesures de grandeurs ; la lettre y avait essentiellement valeur d'abréviation ; ainsi, la formule $A = L \times l$, est une abréviation de l'expression « aire du rectangle = longueur fois largeur » utilisée par l'élève pour effectuer directement le produit des nombres donnés pour la longueur et la largeur, sans identification explicite du processus de substitution des lettres par des valeurs numériques. L'élève a aussi appris à compléter des égalités à trou, notamment à l'occasion du travail sur les notions de différence et de quotient. Il a résolu des problèmes du premier degré sans avoir recours à la résolution d'équations, mais en agissant par tâtonnements, en ayant recours à des étapes intermédiaires avec ou sans l'aide d'outils numériques (tableur, calculatrice).

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants:

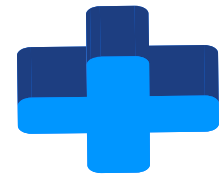
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

$$x^n + y^n = z^n$$

LES DIFFÉRENTES SIGNIFICATIONS D'UN SIGNE D'ÉGALITÉ



À travers la pratique du calcul littéral, le signe « = » acquiert trois autres significations :

- il est utilisé pour rendre compte de l'universalité d'une égalité, traduisant que, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs retournées par les expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales. On parle alors d'identité ;
- il est utilisé comme symbole d'affectation, comme en informatique, lorsqu'on se propose de calculer l'expression $(a + 2b)^2$ pour $a = 1$ et $b = -0,5$;
- en rupture avec chacune de ces significations qui sous-entendent qu'une certaine propriété est vraie (même si c'est dans des conditions différentes), le signe « = » acquiert un statut tout autre dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, le signe « = » apparaît alors dans des énoncés dans lesquels, en remplaçant la lettre par un nombre, on obtient une égalité qui, selon la valeur de ce nombre, est soit vraie, soit fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs (et rien qu'elles) qui, substituées à l'inconnue, rendent l'égalité vraie.

Sens du signe =
Égalité conditionnelle :
à quelle(s) condition(s)
l'égalité est vérifiée ?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

$$x^n + y^n = z^n$$

LE STATUT DE LA LETTRE

Au cycle 4, la lettre acquiert de nouveaux statuts qu'il convient de bien différencier :

- Résoudre l'équation $3(x+2) = 2x$
la lettre x a le statut d'inconnue
mais aussi celui d'indéterminée

$$3x + 6 = 2x$$

$$3x + 6 - 3x = 2x - 3x$$

$$6 = -x$$

$$x = -6$$

- le statut de variable, qui apparaît à la fois dans les formules (ainsi, dans l'égalité $P = 2\pi R$, la valeur du périmètre P dépend des valeurs attribuées à la variable R) et dans l'expression symbolique $x \rightarrow f(x)$ d'une fonction. L'utilisation du tableur peut faciliter la compréhension de la notion de variable dans la mesure où, dans l'édition d'une formule, ce sont les adresses des cellules (et non leur contenu) qui sont prises en compte. La modification du contenu d'une cellule désignée dans une formule modifie le contenu de la cellule où est implantée la formule, ce qui permet d'appréhender les notions de variable et de fonction ;
- le statut d'indéterminée, qui apparaît dans des identités où la lettre représente des nombres quelconques. Il importe que la valeur d'universalité de ces identités apparaisse dans l'environnement de l'égalité, sous une forme accessible aux élèves, par exemple, en écrivant : « Pour toutes valeurs des nombres k, a, b l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ est vraie » ;

le statut d'inconnue, qui heurte l'habitude de penser qu'une égalité est « toujours » vraie. La compréhension de ce qu'est une solution d'une équation nécessite de recourir à des tests de la valeur de vérité de l'égalité en affectant à l'inconnue différentes valeurs numériques. Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques de résolution des équations du premier degré ;

Excellent moyen pour
introduire les équations

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT

$$x^n + y^n = z^n$$

MÉTHODE DE RÉOLUTION DES PROBLÈMES

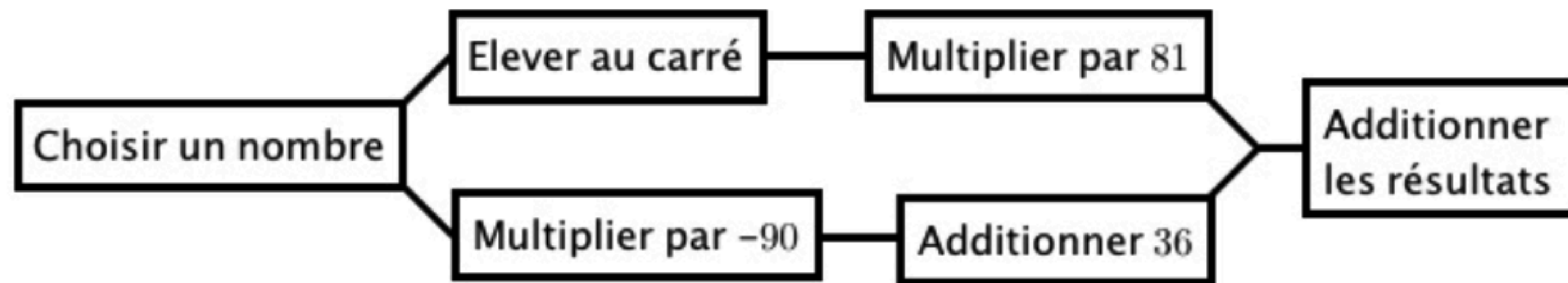
Dans le cadre numérique, les calculs sont construits et effectués en faisant référence à un sens qui est externe aux calculs (le problème à résoudre).

Au contraire, dans le cadre algébrique, les calculs ne font plus référence à un sens externe, le pilotage des calculs fait référence au sens interne des équations pour faire apparaître l'information monstrative contenue dans l'écriture de l'équation.

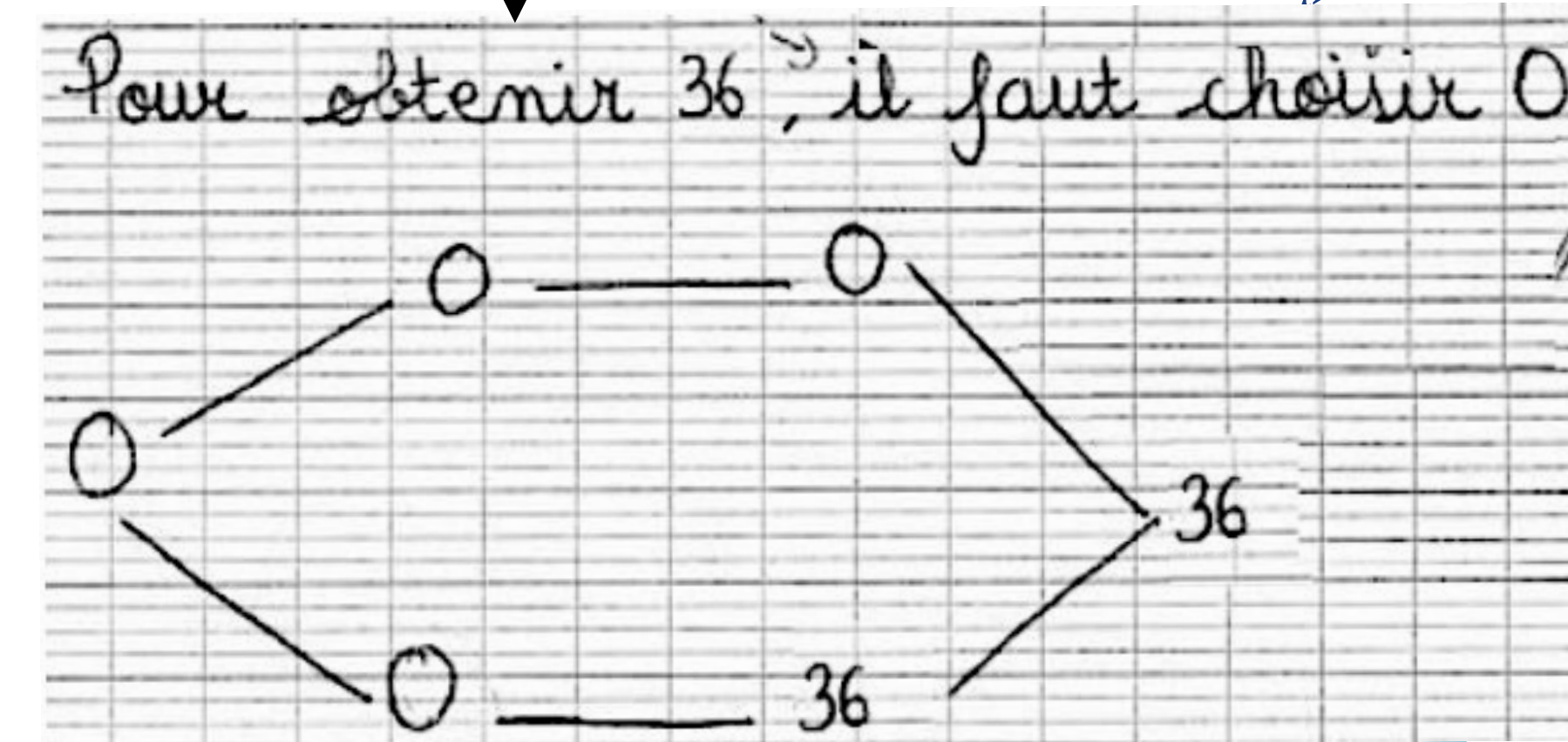
À ne pas sous-estimer

-Refus du cadre algébrique

Voici un programme de calcul:

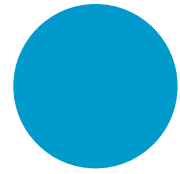


- 1) On choisit 5. Quel nombre obtient-on?
- 2) Quel(s) nombre(s) faut-il choisir pour obtenir 36 ?



$$x^2 = -1$$

$$a = 10^{-n}$$



VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

Critères classés par ordre d'importance pour évaluer

la difficulté d'une résolution d'équation :

- Nature de l'équation
(1er ou 2nd degré)
- Structures des membres l'équation
(expressions réduites ou non réduites ; produit nul)
- Pour les équations du 2nd degré, méthode de factorisation
(facteur commun ou identité remarquable)
- Nature de la solution
(nombre décimal, négatif, rationnel ou irrationnel)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x^n + y^n = z^n$$



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 2 :

Voici une liste de huit exercices.

Analyser ces exercices, identifier les variables didactiques afin d'établir des critères permettant de classer par ordre croissant de difficulté la résolution d'une équation.

Exercice 1 8 est-il solution de l'équation $6x^2 - 5x + 1 = -7(3x - 1)$?

Exercice 2 Résoudre l'équation $3x + 5 = 8 - 7x$

Exercice 3 Résoudre l'équation $8x + 8 = -2 - 3x$

Exercice 4 Résoudre l'équation $5(3x - 7) = 7x - (5 - 11x)$

Exercice 5 Résoudre l'équation $18x^2 - 12x = 0$

Exercice 6 Résoudre l'équation $36x^2 - 17 = 0$

Exercice 7 Résoudre l'équation $11x(x + 3) = 7(x + 3)$

Exercice 8 Résoudre l'équation $(7x - 1)^2 = 36$



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

Exercice	Équation du 1er degré	Équation du 2ème degré
1		Vérifier si un nombre est solution
2	Membres réduits ; solution décimale	
3	Membres réduits ; solution rationnelle	
4	Membres non réduits ; solution entière	
5		Membre réduit et membre nul ; plusieurs facteurs communs possibles ; solution rationnelle
6		Membre réduit et membre nul ; identité remarquable ; solution irrationnelle
7		Membre non nul ; facteurs commun complexe ; solution rationnelle
8		Membre non nul ; identité remarquable ; solution rationnelle

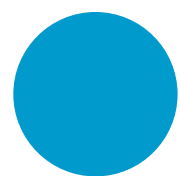
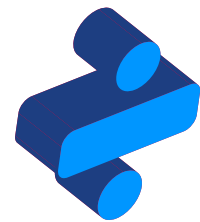
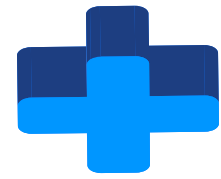
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Critères classés par ordre d'importance pour évaluer la difficulté d'une mise en équation :

- Identification de l'égalité (explicite : deux quantités différentes égales ou implicite : la même quantité selon deux points de vues)
- Relations entre les quantités (congruentes : pas besoin de reformuler l'énoncé ou non congruentes : besoin de reformuler l'énoncé ; utilisation de théorèmes)
- Choix de l'inconnue (imposé ou à la charge de l'élève ; multiple ou unique)
- Nature de l'égalité (conditionnelle -on ne sait pas s'il y a une solution- ou non conditionnelle -on sait qu'il y a une solution)
- Le contexte (support géométrique ; interne au maths ou issu du monde réel ancré dans le quotidien des élèves)



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

Consigne 3 :

Voici une liste de quatre exercices.

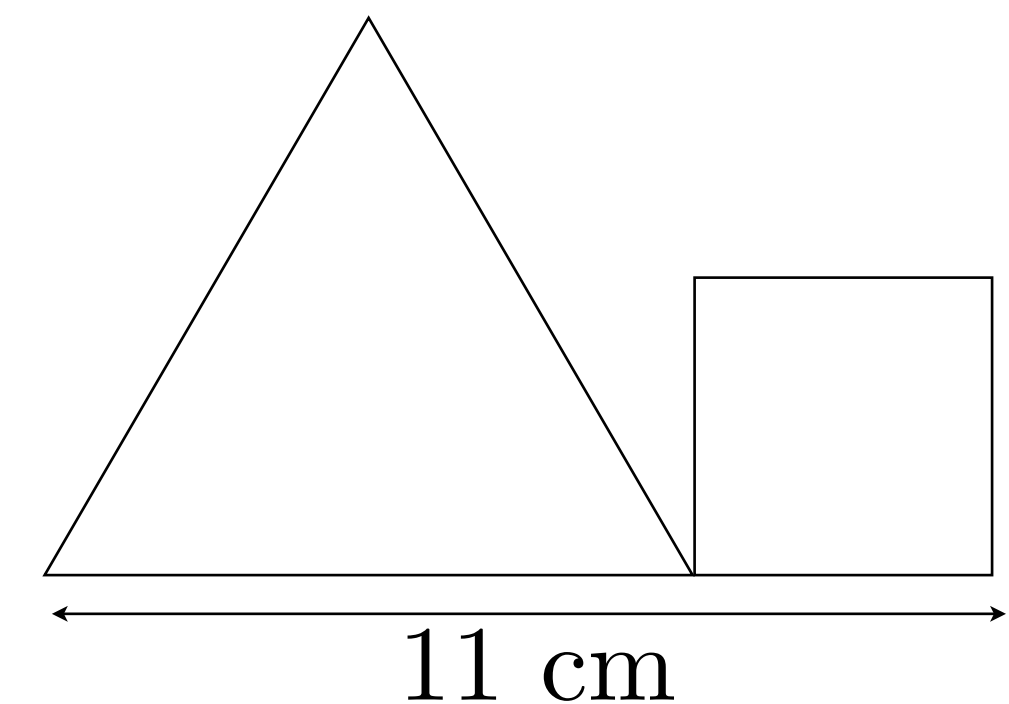
Analyser ces exercices, identifier les variables didactique afin d'établir des critères permettant de classer par ordre croissant de difficulté la mise en équation d'un problème.

Exercice 1 Antigone souhaite acheter des fruits exotiques. Son choix se porte sur des mangues à 14,6 €/le kilo ou des fruits de la passion à 11,2 €/le kilo.

Elle remarque qu'il lui manque 1,28 € pour acheter des mangues mais qu'elle peut acheter la même masse de fruits de la passion. On lui rendrait alors 4,84 €.

Quelle masse de fruits de la passion, Antigone a-elle achetée ?

Exercice 2 On juxtapose sur un segment de longueur 11 cm, un carré et d'un triangle équilatéral. Est-il possible que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre ?



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Exercice 3 Voici deux programmes de calculs :

Programme A :

Programme B :

Choisir un nombre.

Lui ajouter 4

Multiplier le résultat par -3

Choisir un nombre.

Multiplier par 4

Au résultat ajouter -3

Est-il possible de choisir un nombre permettant d'obtenir le même résultat ?

Exercice 4

Delphine et Louisa exercent le métier d'enseignants. Delphine est payée 50 € de l'heure

et Louisa est payée 30 € de l'heure. Travaillant 16 heures de moins par mois que

Delphine, Louisa a perçoit la moitié du salaire de Delphine.

Combien d'heures Delphine a-t-elle travaillé dans un mois ?

On notera x le nombre d'heures par Delphine dans un mois



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

VARIABLES DIDACTIQUES POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

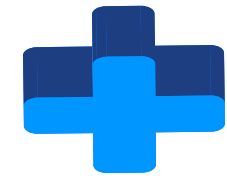
$$x^n + y^n = z^n$$

Exercice	Analyse mathématique
1	Égalité implicite (somme d'argent); Choix unique de l'inconnue (masse de fruits de la passion) équation du 1er degré avec l'inconnue dans les deux membres ; Membres réduits ; cadre numérique/cadre algébrique ; inconnue à la charge de l'élève (présente dans la question)
2	Égalité explicite (même périmètre) et conditionnelle (est-il possible); Choix multiple de l'inconnue (côté du triangle ou du carré) équation du 1er degré avec l'inconnue dans les deux membres ; Membre non réduit ; cadre géométrique/cadre algébrique ; inconnue à la charge de l'élève (absente dans la question)
3	Égalité explicite (même résultat) et conditionnelle (est-il possible); Choix unique de l'inconnue équation du 1er degré avec l'inconnue dans les deux membres ; Membre non réduit ; cadre numérique/cadre algébrique ; inconnue à la charge de l'élève (présente dans la question)
4	Égalité explicite (moitié du salaire) mais avec reformulation (le double); équation du 1er degré avec l'inconnue dans les deux membres ; Membre non réduit ; cadre numérique/cadre algébrique ; choix de l'inconnue imposé ;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

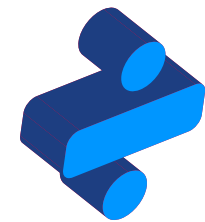
$$x^n + y^n = z^n$$



Consigne 4 :

Voici trois situations d'introduction aux équations issues de manuels.
Les analyser et les comparer avec les trois critères suivants :

- la motivation du recours aux équations
- la nature des équations introduites et de leur solution
- l'introduction de la lettre pour désigner l'inconnue



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.

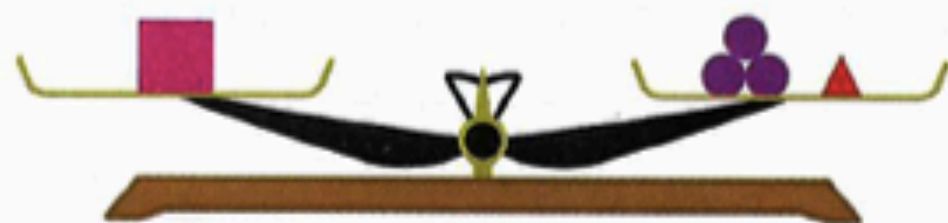


Balance 2



Balance 3

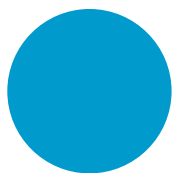
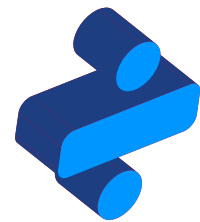
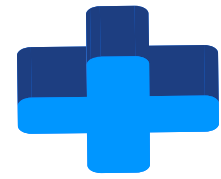
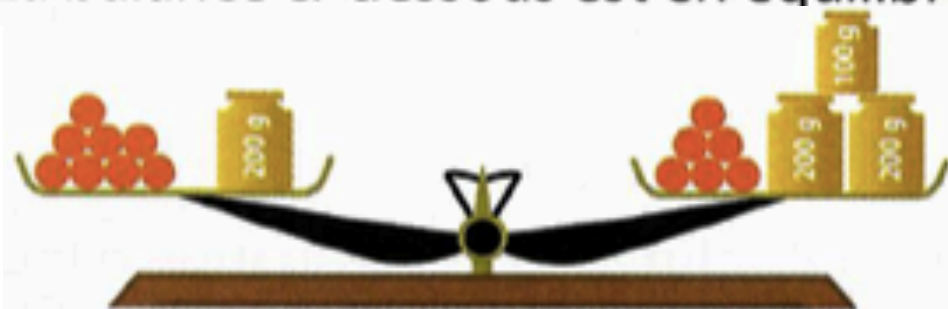
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

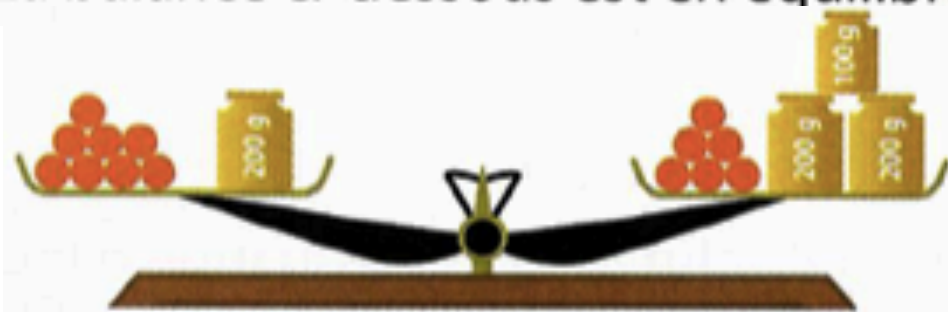
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

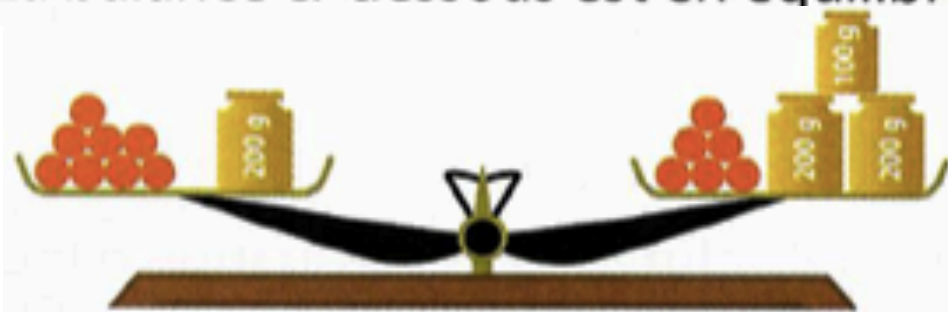
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

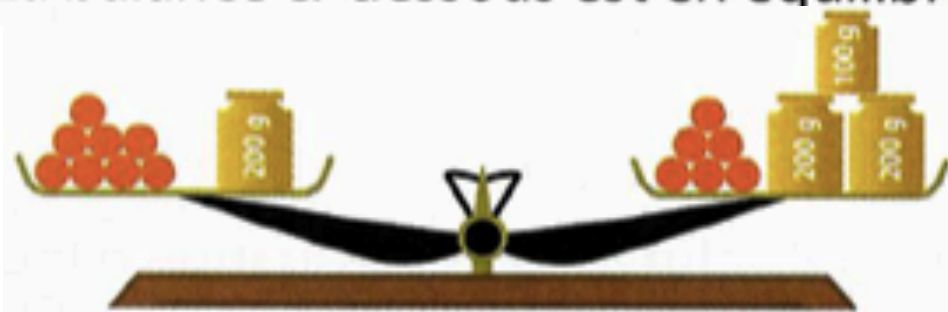
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

Par différence des deux balances

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

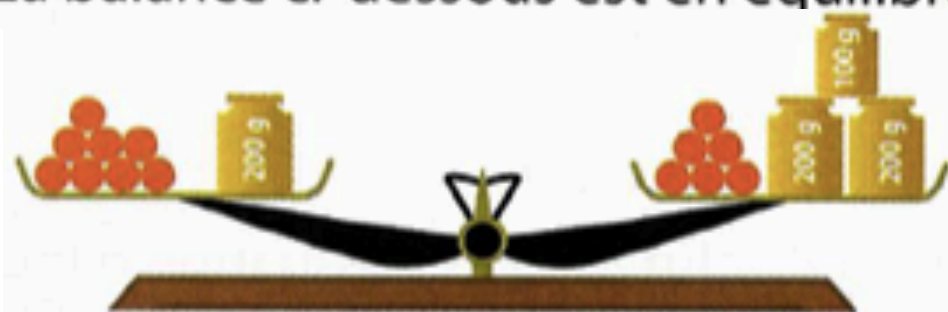
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



1ere balance

Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

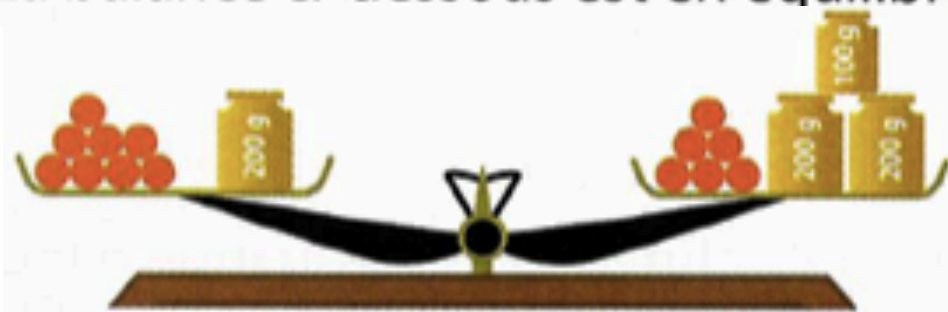
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

$$x^2 = -1$$

Par différence des deux plateaux

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

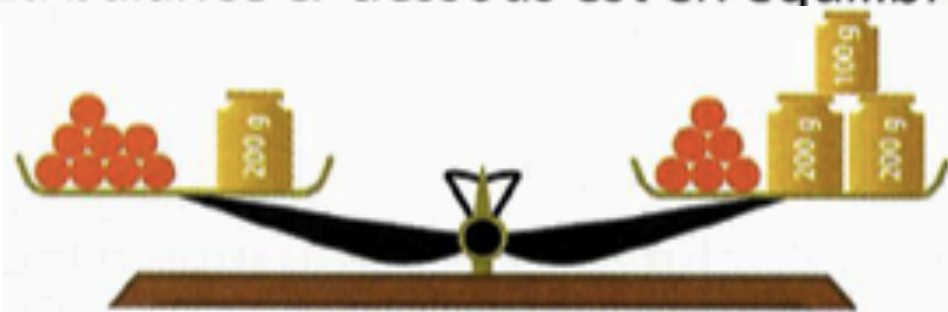
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?

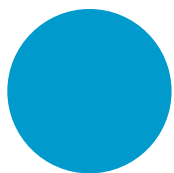
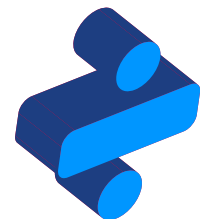
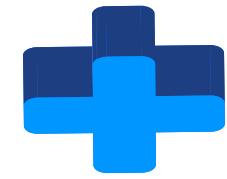


Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

On ne voit pas le lien avec la méthode visée

$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



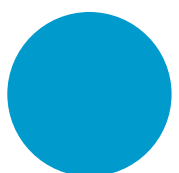
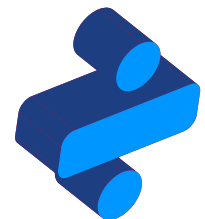
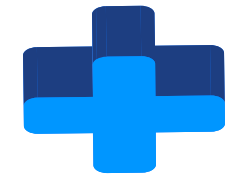
Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

On ne voit pas le lien avec la méthode visée

$$x^2 = -1$$

Par différence des deux plateaux



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

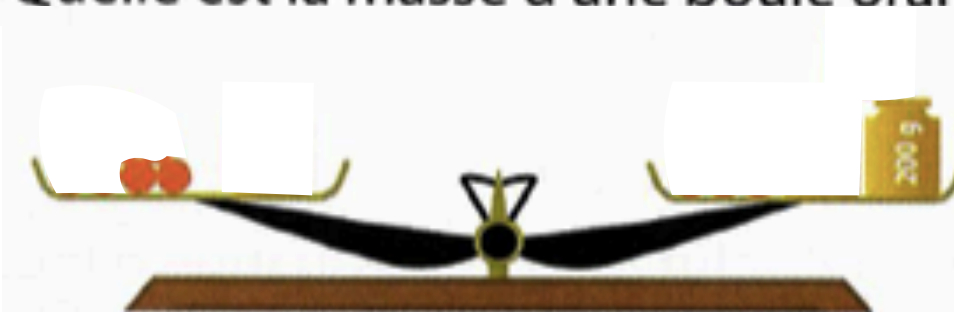
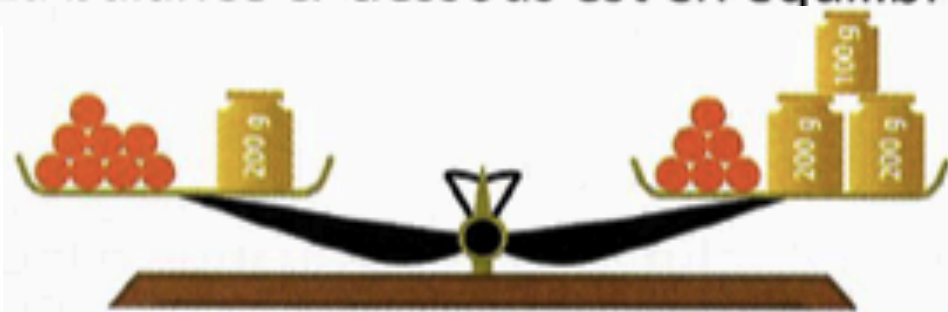
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?

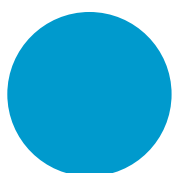
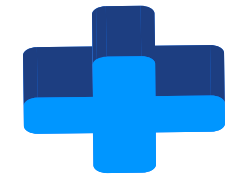


Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

On ne voit pas le lien avec la méthode visée

$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

1. La balance 1 est en équilibre.

Balance 1



Est-ce le cas pour les balances 2 et 3 ? Expliquer pourquoi.



Balance 2



Balance 3

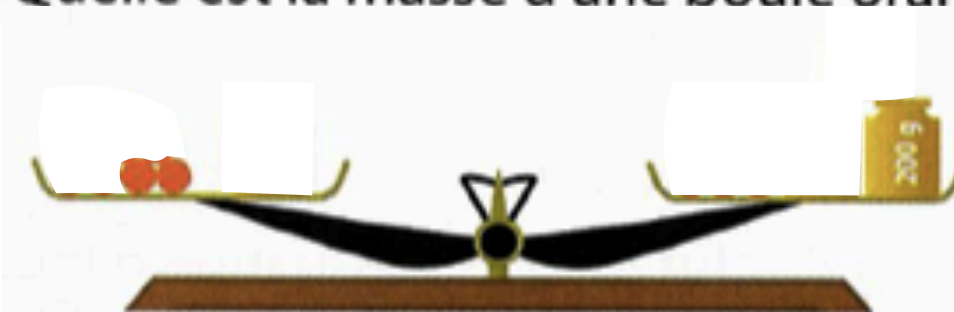
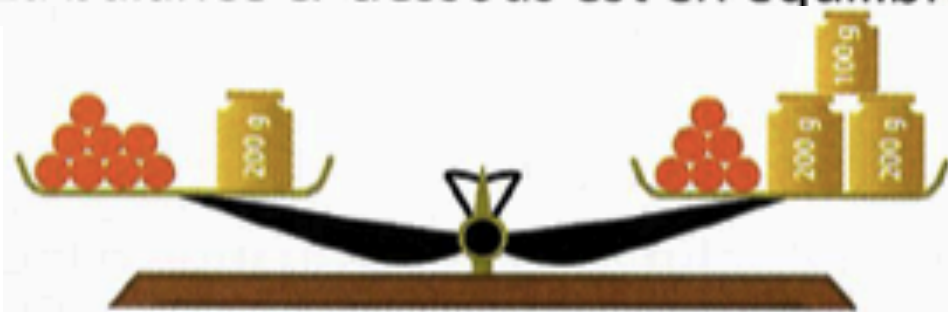
2. Les deux balances ci-dessous sont en équilibre.



Combien faut-il poser de triangles sur le plateau de droite pour que la balance ci-dessous soit en équilibre ?



3. La balance ci-dessous est en équilibre. Quelle est la masse d'une boule orange ?



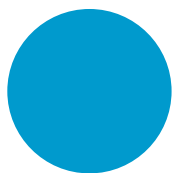
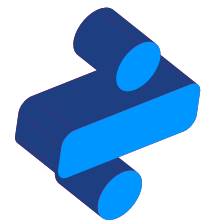
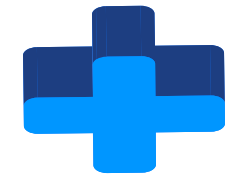
Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

On ne voit pas le lien avec la méthode visée

$$x^2 = -1$$

Division par 2 des deux plateaux



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Activité 3 Les balances

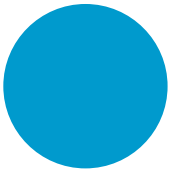
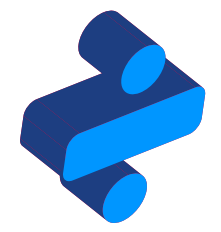
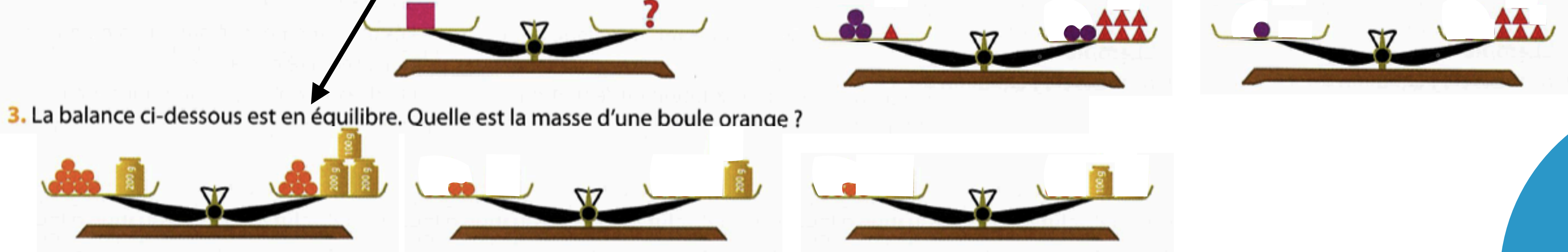
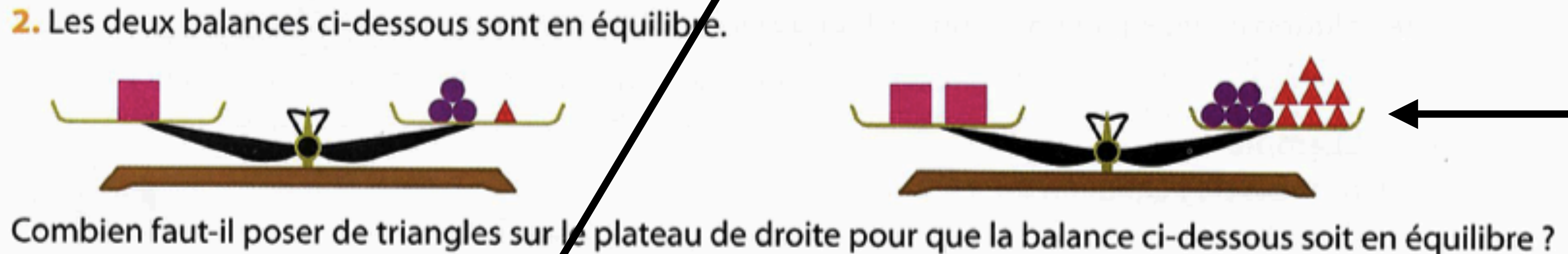
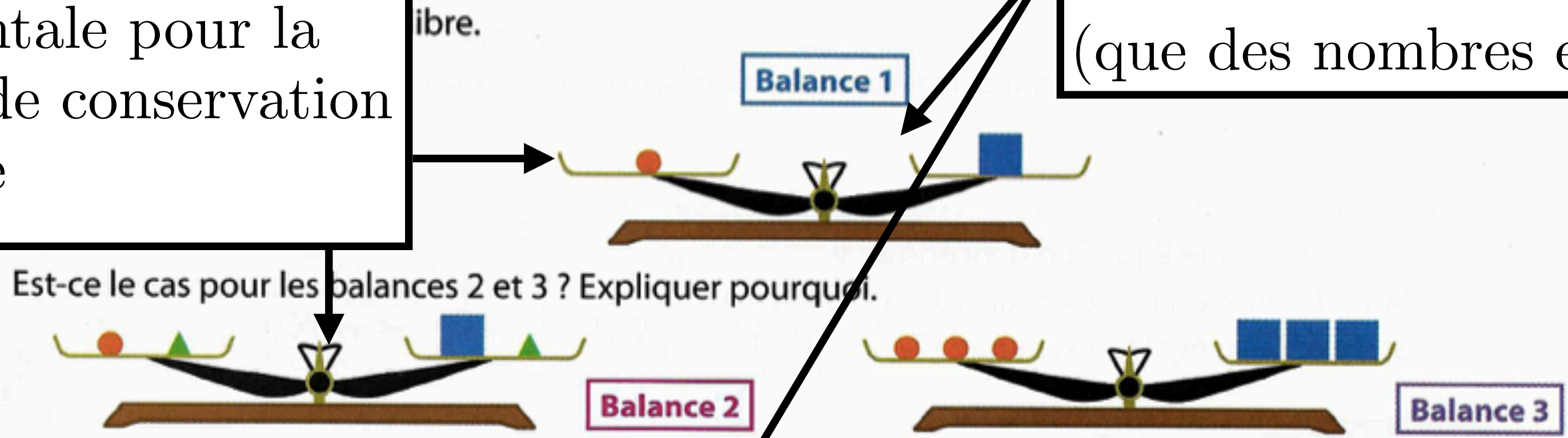
Image mentale pour la propriété de conservation de l'égalité

Un membre comportant un nombre négatif ne peut pas être traduit par ce type de représentation. Les limites du numérique ne sont pas mises en évidence (que des nombres entiers).

Faire attention : les élèves peuvent avoir du mal à se détacher du mode de représentation

On ne voit pas le lien avec la méthode visée

$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$



$$a = 10^{-n}$$

Rechercher avec le tableur TICE

Manon et Tom constatent qu'ils ont choisi le même nombre entier et qu'avec leurs programmes de calcul ils obtiennent le même résultat.



Manon

Je multiplie mon nombre par 9 puis je soustrais 20.

Moi, je multiplie mon nombre par 4 puis j'ajoute 15.



Tom

solution facile à trouver : 7

Ils demandent à leur amie Fatou de trouver ce nombre à l'aide du tableur.

- a. On note n le nombre choisi par Manon et Tom, inconnu de Fatou. Traduire par une égalité le fait que Manon et Tom trouvent le même résultat. Une telle égalité, où figure un nombre inconnu, est appelée **une équation**.

Méthode de résolution imposée
Le tableur donne la réponse

- b. Réaliser la feuille de calcul ci-contre. Saisir les formules qui conviennent dans les cellules B2 et C2, puis les recopier vers le bas.

	A	B	C
1	n	$9n - 20$	$4n + 15$
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		

Le tableur peut être une source de difficulté supplémentaire pour construire la notion d'inconnue.

- c. Comment Fatou fait-elle pour trouver le nombre choisi en commun par Manon et Tom ?

Cette valeur de n est appelée **solution** de l'équation.

La méthode de résolution par équation est remise à plus tard

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

A. Résoudre, l'un après l'autre, les problèmes suivants

PROBLÈME n° 1

Arthur a une calculatrice sur laquelle il affiche un nombre. Il multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7. La calculatrice affiche alors 10,9. Quel nombre a-t-il affiché au départ ?

On peut remonter le programme solution facile à trouver : 1,3

PROBLÈME n° 2

Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le même nombre. Arthur multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7. Béatrice multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 1. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

solution facile à trouver : 3

PROBLÈME n° 3

Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le même nombre. Arthur multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 9. Béatrice multiplie le nombre affiché par 2, puis retranche 3. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

solution facile à trouver : -4

Hamid, un élève de quatrième, a écrit ceci pour le problème n° 3.

J'appelle n le nombre affiché au départ. Arthur a calculé $n \times 5 + 9$ et Béatrice a calculé $n \times 2 - 3$. On cherche un nombre n pour lequel l'égalité $n \times 5 + 9 = n \times 2 - 3$ est vraie.

*On dit qu'Hamid a **mis le problème en équation**. Reste encore à trouver les nombres pour lesquels l'égalité est vraie. Ces nombres sont les **solutions de l'équation**. On peut utiliser des logiciels pour trouver ces solutions.*

Introduction brutale de l'équation ;
Insuffisance du numérique non mise en évidence ;
Méthode de résolution par équation remise à plus tard

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Différenciation

Permettre à tous les élèves d'accéder à la fin du cycle 4 aux connaissances et aux compétences fixées par le programme est une exigence du socle commun. Les apprentissages liés au calcul littéral requièrent de ce point de vue une attention particulière. En effet, l'accès au formalisme et à l'abstraction constitue une marche particulièrement élevée pour les élèves fragiles. Cependant, leur activité algébrique ne saurait se résumer à l'acquisition de techniques calculatoires. Il importe qu'ils soient confrontés à la résolution de problèmes, même s'ils ne maîtrisent pas toutes les techniques intervenant dans leur résolution. La différenciation pourra alors reposer sur des choix particuliers de variables didactiques (solutions entières, décimales ou fractionnaires, programmes de calcul réversibles ou pas, attribution de valeurs numériques à certains paramètres, etc.). L'acquisition des techniques calculatoires et leur automatisation seront d'autant plus efficaces qu'elles seront adossées à des représentations porteuses de sens, souvent issues de la résolution de problèmes.

Il convient aussi de laisser vivre, de façon différenciée et aussi longtemps que nécessaire pour certains élèves, des procédures de tâtonnement ou faisant appel à la manipulation, l'expérimentation, la schématisation ainsi que les formulations intermédiaires, même maladroitement ou peu rigoureuses, tout en indiquant les limites de ces formulations.

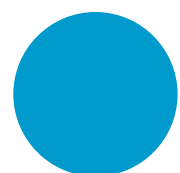
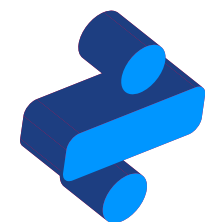
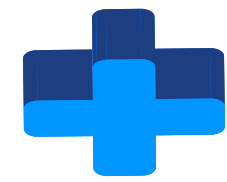
Pour permettre l'accès de tous les élèves à l'abstraction de la démarche algébrique, il est essentiel de les amener à exprimer ce qu'ils ont compris et de repérer ce qui les met en difficulté. La déstabilisation des conceptions erronées se fait en cherchant des contre-exemples. La reconstruction des connaissances visées passe ensuite par l'explicitation orale des procédures mises en œuvre, leur comparaison, l'analyse des erreurs, etc.).

Symétriquement, et toujours dans le cadre d'une différenciation pédagogique, les élèves les plus habiles peuvent être confrontés à des problèmes qui ne sont pas du premier degré, mais qui s'y ramènent, par exemple en factorisant des équations produits à l'aide d'identités remarquables.

Piste pour structurer sa séquence

Ne pas imposer de méthode « experte » ; s'appuyer sur les productions des élèves

Valable pour toutes les séquences



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

SITUATIONS D'INTRODUCTION

$$x^n + y^n = z^n$$

Résolution d'un problème du premier degré

Pour anticiper la notion d'équation, l'élève apprend, dès le début du cycle 4, à tester une égalité à la main ou à l'aide d'un outil numérique (tableur, calculatrice), en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui figure dans l'égalité. Il apprend à compléter des opérations à trou. Il est initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de « remonter » le programme en commençant par la dernière opération. C'est le cas dans l'exemple suivant, extrait du document [Du numérique au littéral](#) publié sur Éduscol :

A mettre en place le plus tôt possible

Je pense à un nombre, je le multiplie par 3. Si je retranche 12 au résultat obtenu, j'obtiens 7,5.
A quel nombre ai-je pensé ?

Progressivement, la recherche d'efficacité face à des problèmes plus résistants (correspondant par exemple à des programmes de calcul non réversibles), l'insuffisance de la démarche numérique face à des problèmes du type $ax + b = cx + d$, avec $a - c$ non nul et des valeurs des paramètres a, b, c, d conduisant à des solutions non entières, ou encore la nécessité d'obtenir les valeurs exactes des solutions de certaines équations motivent l'introduction de la lettre et la modélisation d'une situation par une équation ou une inéquation.

Pour identifier de bons problèmes

On pourra se référer à la situation « *Alice et Bertrand* » empruntée à Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, (« Les débuts de l'algèbre au collège » publication de l'INRP) proposée comme tâche intermédiaire.

À lire absolument !

La méthode algébrique de résolution des équations et inéquations du premier degré est explicitée en classe de 3^e, en s'appuyant sur les propriétés de l'égalité ou de l'inégalité, par exemple l'invariance des solutions d'une équation par l'ajout d'une même expression à chacun de ses membres.

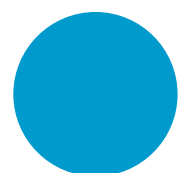
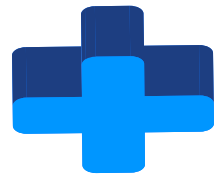
Permet de donner du sens aux transformations

L'utilisation du tableur et la programmation d'algorithmes permettent la résolution, au moins approchée, d'équations d'autres types.



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$



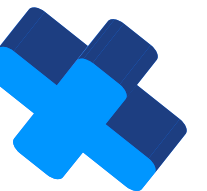
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Situations d'introduction

$$x^n + y^n = z^n$$

Rôle des logiciels

L'utilisation de logiciels, dans le cadre de la résolution de problèmes, favorise la construction progressive des notions de variable et de paramètre. Ainsi, la référence absolue ou non à une cellule dans l'écriture d'une formule sur le tableur permet de distinguer ce qui varie de ce qui est fixé ; les variables utilisées dans les algorithmes, en particulier dans les boucles, participent du même objectif, de même que l'utilisation d'un curseur en géométrie dynamique.



L'utilisation raisonnée d'un logiciel de calcul formel peut aider à mettre en évidence le rôle des parenthèses dans l'expression d'une fonction.

$$a = 10^{-n}$$

La phase de modélisation est la plus difficile

Enfin, l'utilisation de logiciels, en classe ou en dehors de la classe, est un levier majeur pour la recherche et l'émission de conjectures que le calcul littéral permettra ensuite de démontrer.

$$x^2 = -1$$

La résolution algébrique d'un problème est souvent articulée selon trois phases : une phase de recherche et de modélisation de la situation, une phase de traitement formel (transformation, résolution) sans lien avec le contexte initial, une phase de communication pour restituer la solution et la vérifier. Assumer successivement les deux premières phases constitue une charge de travail importante pour un débutant. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel par les élèves n'ayant pas une habileté technique suffisante, peut leur permettre de différer le travail technique, si l'objectif est de mettre l'accent sur l'usage de l'algèbre comme outil de mathématisation de l'énoncé.

Logiciel THOT

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 5 :

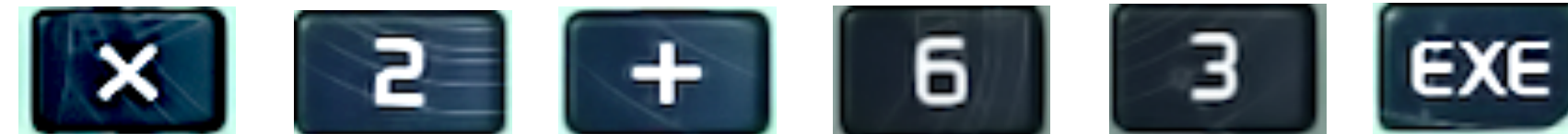
Cette situation d'introduction respecte-t-elle les préconisations contenues dans les documents Eduscol pour introduire la notion d'équation ?

Problème n°1 :

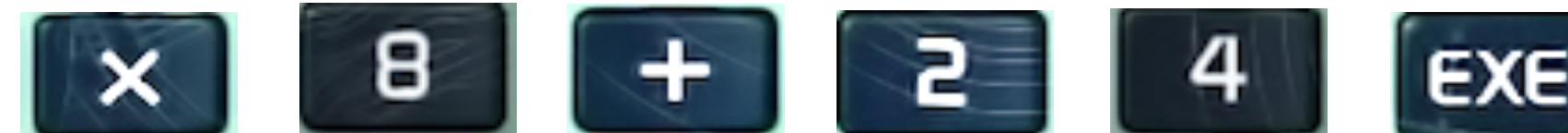
Juliette et Manu ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Manu tape sur les touches :



Et, Juliette tape sur les touches :



Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

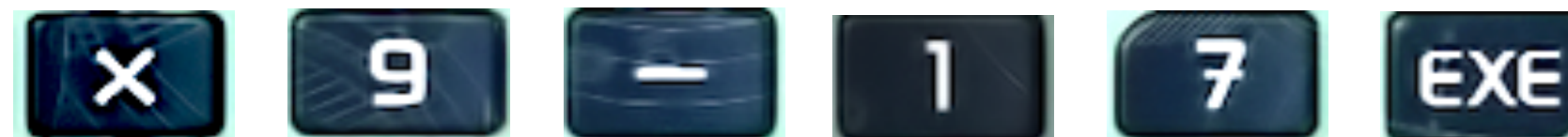
Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Problème n°2 :

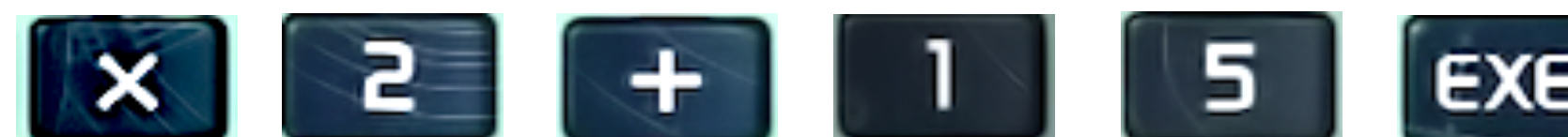
Delphine et Samuel ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Samuel tape sur les touches :



Et, Delphine tape sur les touches :



Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

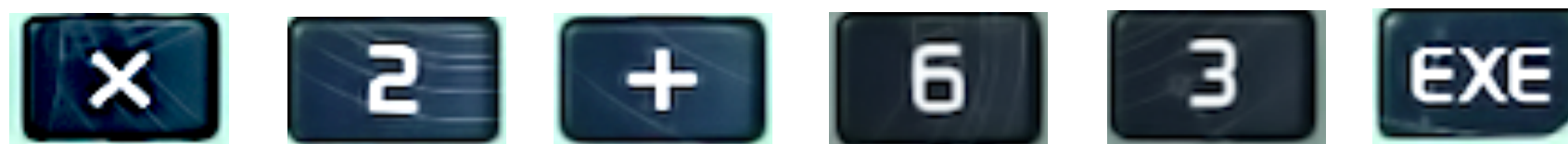
$$x^n + y^n = z^n$$

Problème n°1 :

Juliette et Manu ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Manu tape sur les touches :



Et, Juliette tape sur les touches :



Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

Problème n°2 :

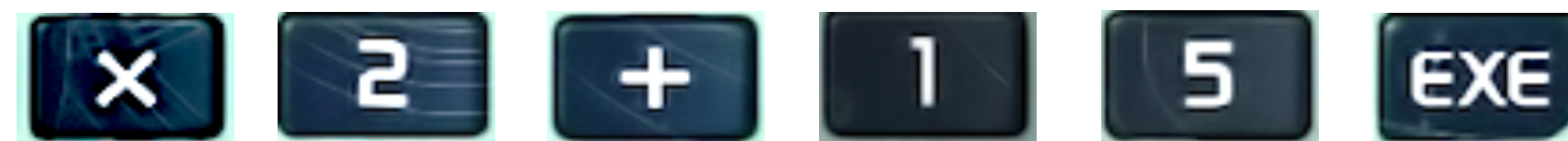
Delphine et Samuel ont chacun une calculatrice.

Ils choisissent un même nombre et le tapent sur leur calculatrice.

Ensuite, Samuel tape sur les touches :



Et, Delphine tape sur les touches :

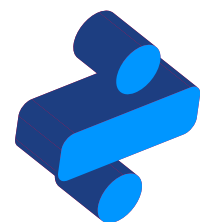
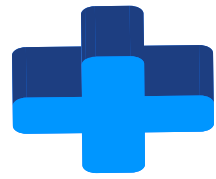


Quand ils ont fini, ils regardent les deux calculatrices et s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.

Quel nombre ont-ils bien pu choisir ?

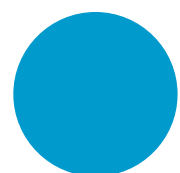
TRAVAIL EN BINÔME

UNE TRACE ÉCRITE DE VOTRE RECHERCHE EST EXIGÉE.



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$



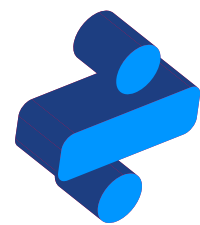
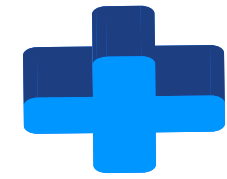
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

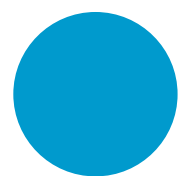
$$x^n + y^n = z^n$$

Scénario possible pour une activité mathématique des élèves maximale

- Laisser environ 6 minutes pour la phase de recherche du problème 1 (travail en binôme)
- Solliciter les élèves pour faire émerger des critères pour chercher par essais-ajustements (Comparer les démarches de deux binômes ; poser des questions à la classe); trace écrite
- Laisser plus de temps de recherche pour le problème 2 (Ne pas hésiter à relancer les binômes ; persévérance scolaire...)
- Montrer une recherche poussée (souvent obtenue à l'aide de la touche CALC)
- Lors de la mise en commun, faire émerger le besoin de changer de méthode
- Solliciter les élèves pour le recours à l'algèbre, l'écriture des programmes et l'écriture de l'égalité (pas évident pour les élèves)
- Insister (oralement) qu'ici le signe = n'est pas le même que celui du calcul littéral
- Écrire la propriété mathématique de conservation de l'égalité
- Solliciter les élèves pour les choix des transformations (explicitement ce qui conduit à les faire)
- Écrire la vérification
- Demander aux élèves de résoudre le problème 1 par la méthode algébrique



$$a = 10^{-n}$$



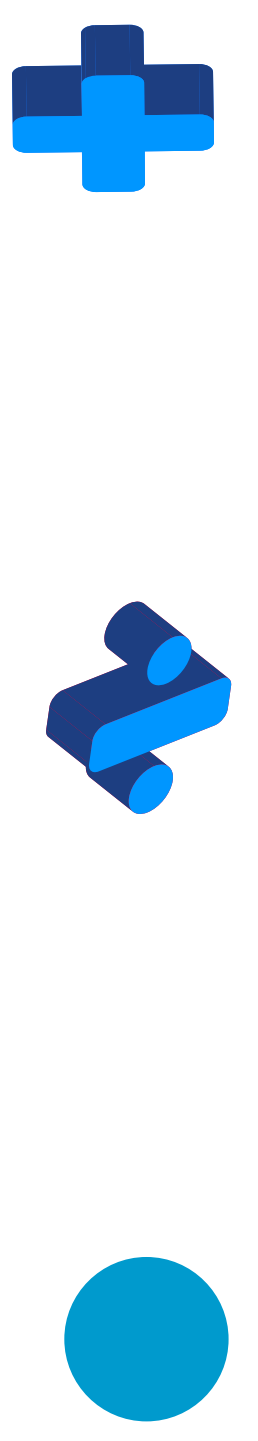
$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Scénario possible pour une activité mathématique des élèves maximale

Phase/ Objectif	Durée estimée	Modalités employées	Déroulé <i>a priori</i>	Aides envisagées
 <p><u>Phase 1</u> Construction des notions d'équation et de solution d'une équation</p>	3 min	Dévolution	- Présenter les modalités de travail	
	5 min	Recherche en binôme	<u>Problème 1 :</u> - les élèves cherchent ; - le professeur circule afin de prendre des informations pour la mise en commun - Le professeur se tient en retrait et sur demande des élèves, il apporte et différencie son aide.	<u>Difficultés à utiliser la méthode par essais-ajustements :</u> - chacun de vous fait les tests pour une personne - Avez-vous analysé les résultats obtenus à chaque fois avant de faire ? - Qu'avez-vous remarqué sur les résultats de ces deux tests ? - Pouvez-vous me donner un encadrement du nombre que l'on cherche ?
	5 min	Mise en commun	- Débat pour mener à bien une recherche par essais-ajustements	Ne rien dire sur l'utilisation de la touche CALC par certains binômes.
	2 min	Dialogue avec la classe	- Le professeur écrit une trace écrite du type : - Regarder si l'écart entre les résultats a diminué Regarder si l'ordre des résultats a été inversé	

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Scénario possible pour une activité mathématique des élèves maximale

Phase/ Objectif	Durée estimée	Modalités employées	Déroulé <i>a priori</i>	Aides envisagées
	3 min	Dévolution	- Présenter les modalités de travail	
Phase 1 Construction des notions d'équation et de solution d'une équation	5 min	Recherche en binôme	<p><u>Problème 1 :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - les élèves cherchent ; - le professeur circule afin de prendre des informations pour la mise en commun - Le professeur se tient en retrait et sur demande des élèves, il apporte et différencie son aide. 	<p><u>Difficultés à utiliser la méthode par essais-ajustements :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - chacun de vous fait les tests pour une personne - Avez-vous analysé les résultats obtenus à chaque fois avant de faire ? - Qu'avez-vous remarqué sur les résultats de ces deux tests ? - Pouvez-vous me donner un encadrement du nombre que l'on cherche ?
			une recherche par	Ne rien dire sur l'utilisation de la touche CALC par certains binômes.
	2 min	Dialogue avec la classe	<ul style="list-style-type: none"> - Le professeur écrit une trace écrite du type : - Regarder si l'écart entre les résultats a diminué Regarder si l'ordre des résultats a été inversé 	

Travailler en binôme :
- accélère la recherche
- favorise les échanges

Exiger une trace écrite des recherches pour préparer la mise commun

Maximise l'activité des élèves

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Phase/ Objectif	Durée estimée	Modalité	Déroulé <i>a priori</i>	Aides envisagées
Phase 2 Mise en évidence des limites du cadre numérique	10 min	Recherche en binôme	<p><u>Problème 2 :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - les élèves cherchent ; - le professeur circule afin de prendre des informations pour la mise en commun - Le professeur se tient en retrait et sur demande des élèves, il apporte et différencie son aide. 	<p>Les mêmes qu'à la phase 1.</p> <p>Relancer les binômes non persévérants en leur disant qu'un binôme dans la classe est allé plus loin qu'eux mais qu'ils peuvent les rattraper s'ils continuent leur recherche.</p>
	5 min	Mise en commun	Débat pour montrer que la méthode par essais-ajustements n'est pas adaptée et qu'il faut l'abandonner	
	15 min	Dialogue avec la classe	<ul style="list-style-type: none"> - Le professeur sollicite les élèves pour l'écriture du nombre obtenu par Delphine - l'écriture du nombre obtenu par Manu - l'écriture de l'égalité traduisant le problème à résoudre - les transformations à effectuer - La trace écrite comporte les significations de « résoudre une équation », « solution d'une équation » et de la propriété permettant de transformer les équations. - Annoncer que la vérification et la phrase-réponse sont indispensables. 	<ul style="list-style-type: none"> - Comment traduire le problème à l'aide d'une égalité ? - On veut obtenir une égalité du type monôme de degré 1 = monôme de degré 0 - Comment éliminer ce monôme de degré 1 en utilisant la propriété ? - Comment isoler ce monôme de degré 1 en utilisant la propriété ? - Comment être sûr que ce nombre est la solution du problème ?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Recherche par essais-ajustements à l'aide de la calculatrice du problème 1

$x \times 2 + 63$ n choisi	$x \times 8 + 24$ n choisi	A obtenue
1 = 65	1	32
2 = 67	2	40
3 = 69	3	48
4 = 71	4	56
5 = 73	5	64
6 = 75	6	72
7 = 77	7	80
6,5 = 76	6,5 = 76	

Nombre choisi	Nombre obtenu	Nombre choisi	Nombre obtenu
1	65	1	32
3	69	3	48
5	73	5	64
5,5	74	5,5	68
6	75	6	72
6,5	76	6,5	76

1	65	32
4	71	56
8	79	88
12	87	120
16	95	152
20	103	184
10	83	104
9	81	96
5	73	64
6	75	72
7	77	80
6,5	76	76

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Recherche par essais-ajustements à l'aide de la calculatrice du problème 1

$x \times 2 + 63$	$x \times 8 + 24$
n choisi	n choisi A obtenue
$x=1 = 65$	1 = 32
2 = 67	2 = 40
3 = 69	3 = 48
4 = 71	4 = 56
5 = 73	5 = 64
6 = 75	6 = 72
7 = 77	7 = 80
6,5 = 76	6,5 = 76

Nombre choisi	Nombre obtenu	Nombre choisi	Nombre obtenu
1	65	1	32
3	69	3	48
5	73	5	64
5,5	74	5,5	68
6	75	6	72
6,5	76	6,5	76

1	65	32
4	71	56
8	79	88
12	87	120
16	95	152
20	103	184
10	83	104
9	81	96
5	73	64
6	75	72
7	77	80
6,5	76	76

Les élèves peuvent avoir l'idée d'utiliser la touche CALC

Bonne analyse des essais

Se mettre en retrait pour ne pas influencer les recherches

Essais désordonnés au début puis bonne analyse des essais

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Trace écrite après la phase de recherche du problème 1

OMBRE CHOISI	JULIETTE	MANU	ECART
2	67	40	17
3	69	48	21
4	71	56	15
5	73	64	9
6	75	72	3
6,5	76	76	0

Manu et Juliette ont tapé 6,5

METHODE PAR ESSAIS- AJUSTEMENTS :

- o Analyser les écarts
- o L'ordre des résultats a été inversé ou pas



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

Solliciter les élèves

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Recherche par essais-ajustements à l'aide de la calculatrice du problème 2

4,57132	24,14264	24,14188
4,57130	24,1426	24,1417
4,57128	24,14256	24,14152
4,57120	24,14258	24,14167
4,5735	24,1427	24,14215
4,57135	24,14272	24,14224
4,57137	24,14274	24,14233
4,57140	24,1428	24,1426
4,57141	24,14282	24,14269
4,57139	24,14278	24,14257
4,57142	24,14284	24,14278
4,57143	24,14286	24,14287

Arrêter la recherche lorsque plusieurs binômes manifestent le besoin de changer de méthode

Les élèves les plus experts peuvent mener une recherche par essais-ajustements très poussée

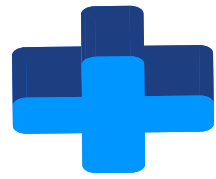
$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Trace écrite après la phase de recherche du problème 2



BILAN:

- La méthode par essais-ajustements n'est pas adaptée pour le problème 2.
- Les mathématiciens ont élaboré une méthode plus efficace.
 - On note x , le nombre choisi.
 - On traduit les deux programmes par une expression littérale.

SAMUEL: $9x - 17$

DELPHINE: $2x + 15$

- On cherche la valeur de x pour laquelle l'égalité $9x - 17 = 2x + 15$ est vérifiée.

↑ résoudre une équation de degré 1.

- Pour résoudre ce type d'équation, on utilise la propriété suivante:

Lorsqu'on additionne ou soustrait le même nombre dans les deux membres d'une égalité, l'égalité est conservée.

$$9x - 17 = 2x + 15$$

$$9x - 17 (-2x) = 2x + 15 (-2x)$$

$$7x - 17 = 15$$

$$7x - 17 (+17) = 15 (+17)$$

$$7x = 32$$

$$x = 32 \div 7 = \frac{32}{7}$$

VERIFICATION $\frac{32}{7}$

$$\text{DELPHINE} = 2 \times \frac{32}{7} + 15 = \frac{64}{7} + \frac{105}{7} = \frac{169}{7}$$

$$\text{SAMUEL} = 9 \times \frac{32}{7} - 17 = \frac{288}{7} - \frac{119}{7} = \frac{169}{7}$$

Ils ont tapé $\frac{32}{7}$ et on obtient $\frac{169}{7}$



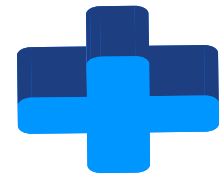
$$a = 10^{-n}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Trace écrite après la phase de recherche du problème 2



BILAN:

- La méthode par essais-ajustements n'est pas adaptée pour le problème 2.
- Les mathématiciens ont élaboré une méthode plus efficace.
 - On note x , le nombre choisi.
 - On traduit les deux programmes par une expression littérale.

SAMUEL: $9x - 17$
 DELPHINE: $2x + 15$

- On cherche la valeur de x pour laquelle l'égalité $9x - 17 = 2x + 15$ est vérifiée.
- ↑ résoudre une équation de degré 1.
- Pour résoudre ce type d'équation, on utilise la propriété suivante:
 - Lorsqu'on additionne ou soustrait le même nombre dans les deux membres d'une égalité, l'égalité est conservée.

$9x - 17 = 2x + 15$
 $9x - 17 (-2x) = 2x + 15 (-2x)$
 $7x - 17 = 15$
 $7x - 17 (+17) = 15 (+17)$
 $7x = 32$
 $x = 32 \div 7 = \frac{32}{7}$

$$a = 10^{-n}$$

Solliciter les élèves

VERIFICATION $\frac{32}{7}$
 $DELPHINE = 2 \times \frac{32}{7} + 15 = \frac{64}{7} + 15 = \frac{169}{7}$
 $SAMUEL = 9 \times \frac{32}{7} - 17 = \frac{288}{7} - 17 = \frac{169}{7}$
 Ils ont tapé $\frac{32}{7}$ et on obtenu $\frac{169}{7}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

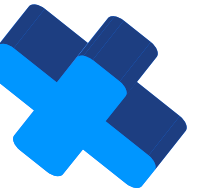
$$x^n + y^n = z^n$$

Objectifs de l'activité « Alice et Bertrand » par ses auteurs (I.N.R.P 1996) :

- Travailler le sens pour le signe = dans une équation
- Travailler le statut de la lettre (inconnue ; indéterminée)
- Motiver la mise en équation d'un problème en montrant les limites du numérique

Travail en amont sur les pré-requis :

- Réduction d'expressions littérales
- Vérification d'une égalité entre deux expressions numériques



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

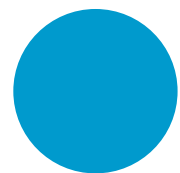
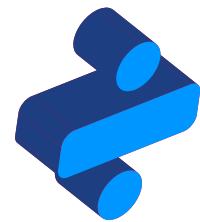
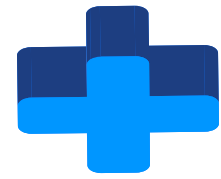
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

MISE EN ŒUVRE D'«ALICE ET BERTRAND»

$$x^n + y^n = z^n$$

Objectifs par problème :

Problème 1	Construire la notion d'équation Construire la notion de solution d'une équation
question 2	Montrer les limites de la méthode essais-ajustements pour motiver le passage à la méthode algébrique Présenter la méthode algébrique



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

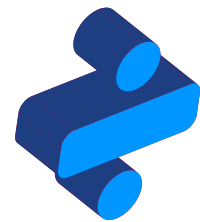
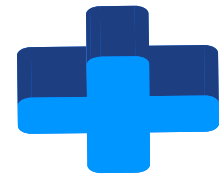
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DISCOURS DE L'ENSEIGNANT

$$x^n + y^n = z^n$$

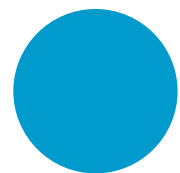
Consigne 6 :

Analyser le discours de l'enseignant dans cette vidéo.



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$



Résolve les équations :

a)

$$b) 3x = 5 + 2x$$

$$c) 4x - 9 = 3x + 1$$



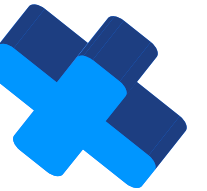
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DISCOURS DE L'ENSEIGNANT

$$x^n + y^n = z^n$$

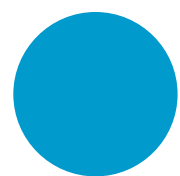
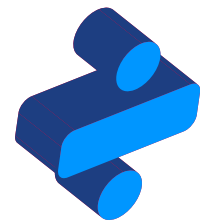
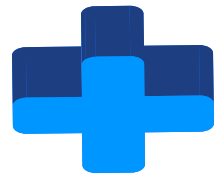
Remarque :

Si un professeur est parfois/souvent obligé de faire des adaptations par rapport aux mathématiques avec ses élèves, il doit veiller à ce que son discours s'appuie sur des propriétés mathématiques identifiables par les élèves.



$$a = 10^{-n}$$

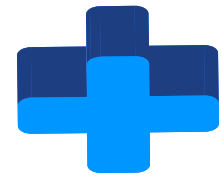
$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



Consigne 7 :

Voici deux traces écrites de cours sur les équations issues de manuels.
Les analyser et les comparer avec les trois critères suivants :

- les moyens de contrôle
- les explications données
- le statut des connaissances utilisées



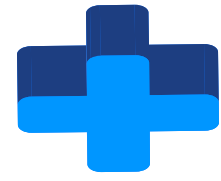
$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



RÈGLE 1 Une égalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.

RÈGLE 2 Une égalité reste vraie quand on multiplie (ou divise) les deux membres par un même nombre **non nul**.



EXEMPLE : Résoudre $8x - 57 = x + 27$.

$$8x - 57 + 57 = x + 27 + 57 \quad \leftarrow \text{règle 1}$$

$$8x = x + 84$$

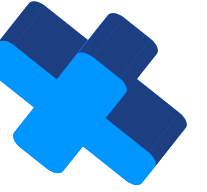
$$8x - x = x + 84 - x \quad \leftarrow \text{règle 1}$$

$$7x = 84$$

$$7x \div 7 = 84 \div 7 \quad \leftarrow \text{règle 2}$$

$$\text{donc } x = 12.$$

La solution de l'équation est 12.



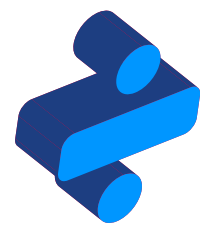
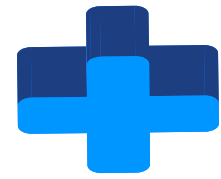
$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

RÈGLE 1 Une égalité reste vraie quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres.

RÈGLE 2 Une égalité reste vraie quand on multiplie (ou divise) les deux membres par un même nombre **non nul**.

EXEMPLE : Résoudre $8x - 57 = x + 27$.

$$8x - 57 + 57 = x + 27 + 57 \leftarrow \text{règle 1}$$

$$8x = x + 84$$

$$8x - x = x + 84 - x \leftarrow \text{règle 1}$$

$$7x = 84$$

$$7x \div 7 = 84 \div 7 \leftarrow \text{règle 2}$$

$$\text{donc } x = 12.$$

La solution de l'équation est 12.

Statut de « règle » et non de théorème

La 2nde « règle » n'est pas nécessaire : on peut utiliser la notion de quotient.

Registre uniquement discursif

Utilisation d'ostensif (couleur)

Choix des transformations non explicités

Pas de vérification de l'égalité avec le nombre obtenu

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

Méthode 1

Résoudre une équation ou une inéquation

ÉNONCÉ

Résoudre : **a. (E)** $6(x + 2) = 7x - 22 + 2x$ **b. (I)** $(-3) \times (x - 4) \leq 8$

SOLUTION

a. (E) est équivalente à : $6x + 12 = 9x - 22$ ①

$$6x + 12 - 6x = 9x - 22 - 6x \quad \text{②}$$

$$12 = 3x - 22$$

$$12 + 22 = 3x - 22 + 22 \quad \text{③}$$

$$34 = 3x$$

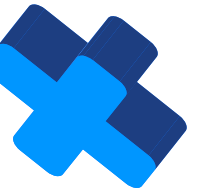
$$34 : 3 = 3 \times x : 3 \quad \text{④}$$

$$\frac{34}{3} = x$$

La solution de **(E)** est $\frac{34}{3}$.

CONSEIL

- ① On commence par développer et réduire chaque membre l'équation.
- ② On se « débarrasse » du **terme en x** dans l'un des deux membres.
- ③ On se « débarrasse » du **terme constant** dans le membre où il reste le terme en x .
- ④ On se « débarrasse » du **facteur de x** .



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

Méthode 1

Résoudre une équation ou une inéquation

ÉNONCÉ

Résoudre : **a. (E)** $6(x + 2) = 7x - 22 + 2x$ **b. (I)** $(-3) \times (x - 4) \leq 8$

SOLUTION

a. (E) est équivalente à : $6x + 12 = 9x - 22$ ①

$$6x + 12 - 6x = 9x - 22 - 6x \quad \text{②}$$

$$12 = 3x - 22$$

$$12 + 22 = 3x - 22 + 22 \quad \text{③}$$

$$34 = 3x$$

$$34 : 3 = 3 \times x : 3 \quad \text{④}$$

$$\frac{34}{3} = x$$

La solution de **(E)** est $\frac{34}{3}$.

CONSEIL

- ① On commence par développer et réduire chaque membre l'équation.
- ② On se « débarrasse » du **terme en x** dans l'un des deux membres.
- ③ On se « débarrasse » du **terme constant** dans le membre où il reste le terme en x .
- ④ On se « débarrasse » du **facteur de x** .

Hors-programme du cycle 4

Discours non mathématique

Pas de vérification de l'égalité avec le nombre obtenu

Utilisation d'ostensif (couleur)



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

Propriété (admise) :

Si l'on ajoute ou soustrait une même expression aux deux membres d'une équation alors on obtient une nouvelle équation.

Principe de résolution des équations du 1^{er} degré :

- Réduire (si cela n'est pas le cas) les expressions des deux membres de l'équation
- Obtenir un seul monôme de degré 1 (peu importe le membre où il se trouve)
- Obtenir un seul monôme de degré 0 dans l'autre membre de l'équation
- Obtenir une valeur pour l'inconnue (en utilisant la notion de quotient)
- Vérifier l'égalité avec la valeur obtenue
- Faire une phrase-réponse

Exemple 1 :

Résoudre l'équation suivante : $9x - 2 = 4x + 5$

On décide d'éliminer le monôme de degré 1 dans le membre de droite.

$$9x - 2 \boxed{-4x} = 4x + 5 \boxed{-4x}$$

$$5x - 2 = 5$$

un seul monôme
de degré 1

On élimine le monôme de degré 0 dans le membre de gauche pour isoler le monôme de degré 1.

$$5x - 2 \boxed{+2} = 5 \boxed{+2}$$

$$5x = 7$$

un monôme de degré 1
=
un monôme de degré 0

On détermine la valeur du nombre inconnu à l'aide du quotient.

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

Obtenir une valeur
pour l'inconnue

Vérification de la valeur obtenue :

$$\text{Membre de gauche} = 9 \times 1,4 - 2 = 10,6$$

$$\text{Membre de droite} = 4 \times 1,4 + 5 = 10,6$$

Ainsi, la solution de l'équation est 1,4.

Vérifier l'égalité avec
la valeur obtenue

Phrase réponse



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

Propriété (admise) :

Si l'on ajoute ou soustrait une même expression aux deux membres d'une équation alors on obtient une nouvelle équation.

Propriété mathématique

Principe de résolution des équations du 1^{er} degré :

- Réduire (si cela n'est pas le cas) les expressions des deux membres de l'équation
- Obtenir un seul monôme de degré 1 (peu importe le membre où il se trouve)
- Obtenir un seul monôme de degré 0 dans l'autre membre de l'équation
- Obtenir une valeur pour l'inconnue (en utilisant la notion de quotient)
- Vérifier l'égalité avec la valeur obtenue
- Faire une phrase-réponse

Explicitation de la méthode de résolution

Exemple 1 :

Résoudre l'équation suivante : $9x - 2 = 4x + 5$

On décide d'éliminer le monôme de degré 1 dans le membre de droite.

$$9x - 2 \boxed{-4x} = 4x + 5 \boxed{-4x}$$

$$5x - 2 = 5$$

On élimine le monôme de degré 0 dans le membre de gauche pour isoler le monôme de degré 1.

$$5x - 2 \boxed{+2} = 5 \boxed{+2}$$

$$5x = 7$$

On détermine la valeur du nombre inconnu à l'aide du quotient.

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

Vérification de la valeur obtenue :

$$\text{Membre de gauche} = 9 \times 1,4 - 2 = 10,6$$

$$\text{Membre de droite} = 4 \times 1,4 + 5 = 10,6$$

Ainsi, la solution de l'équation est 1,4.

un seul monôme de degré 1

un monôme de degré 1
=
un monôme de degré 0

Obtenir une valeur pour l'inconnue

Vérifier l'égalité avec la valeur obtenue

Phrase réponse

Ostensifs pour les transformations

Choix explicités des transformations

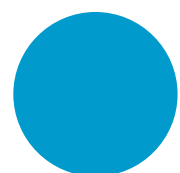
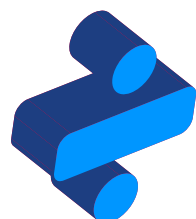
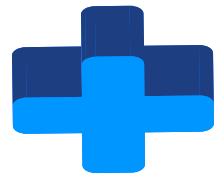
Discours mathématique
Fait le lien avec le principe de résolution

Vérification du nombre obtenu (moyen de contrôle)



$$a = 10^{-n}$$

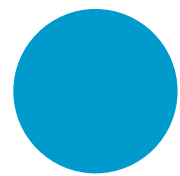
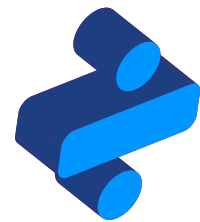
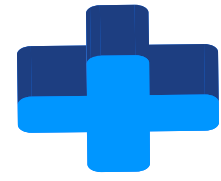
$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

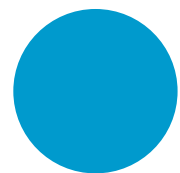
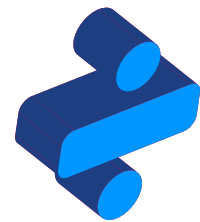
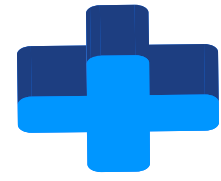


LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



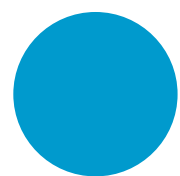
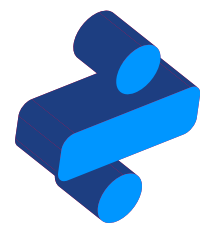
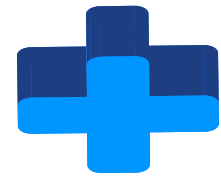
SANS PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



SANS PARENTHÈSES

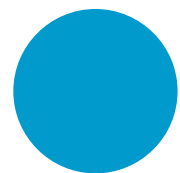
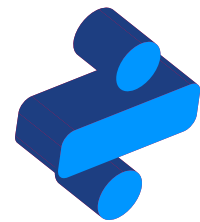
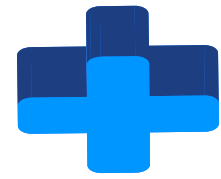
AVEC PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



SANS PARENTHÈSES

AVEC PARENTHÈSES

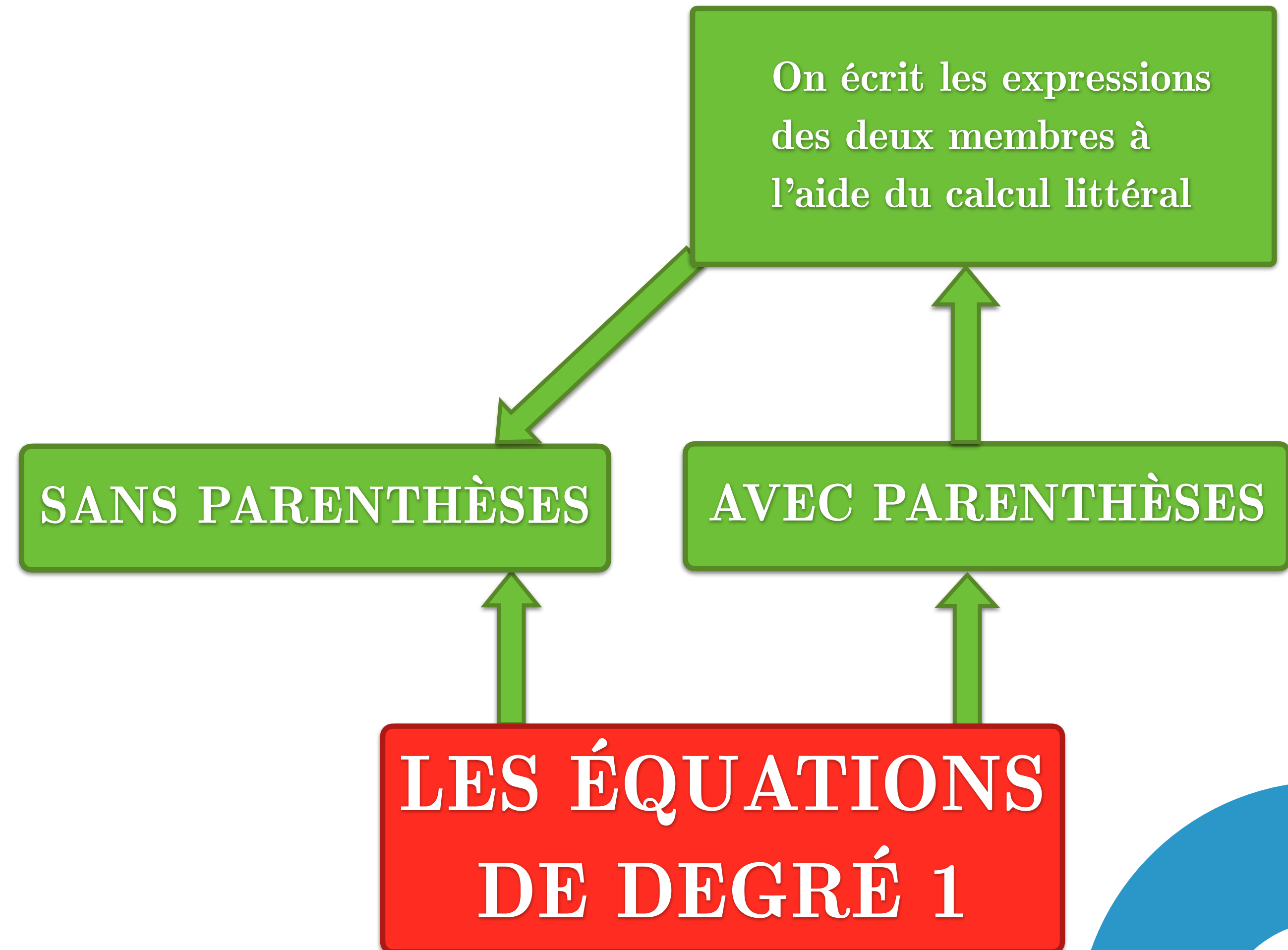
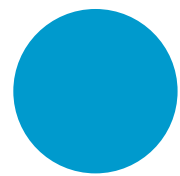
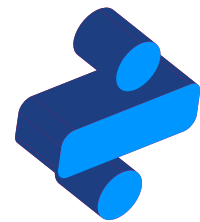
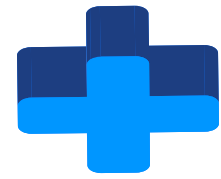
LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1

On écrit les expressions
des deux membres à
l'aide du calcul littéral

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

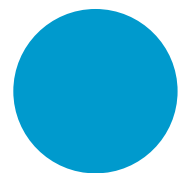
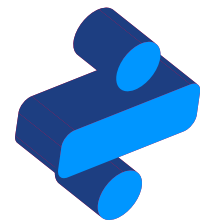
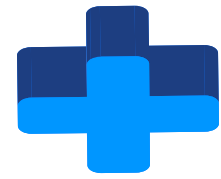
$$x^n + y^n = z^n$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



On modifie l'équation en ajoutant ou en soustrayant une même expression dans les deux membres

On écrit les expressions des deux membres à l'aide du calcul littéral

SANS PARENTHÈSES

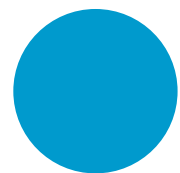
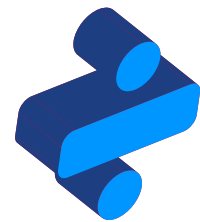
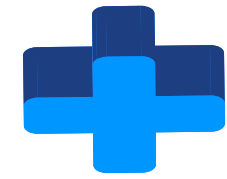
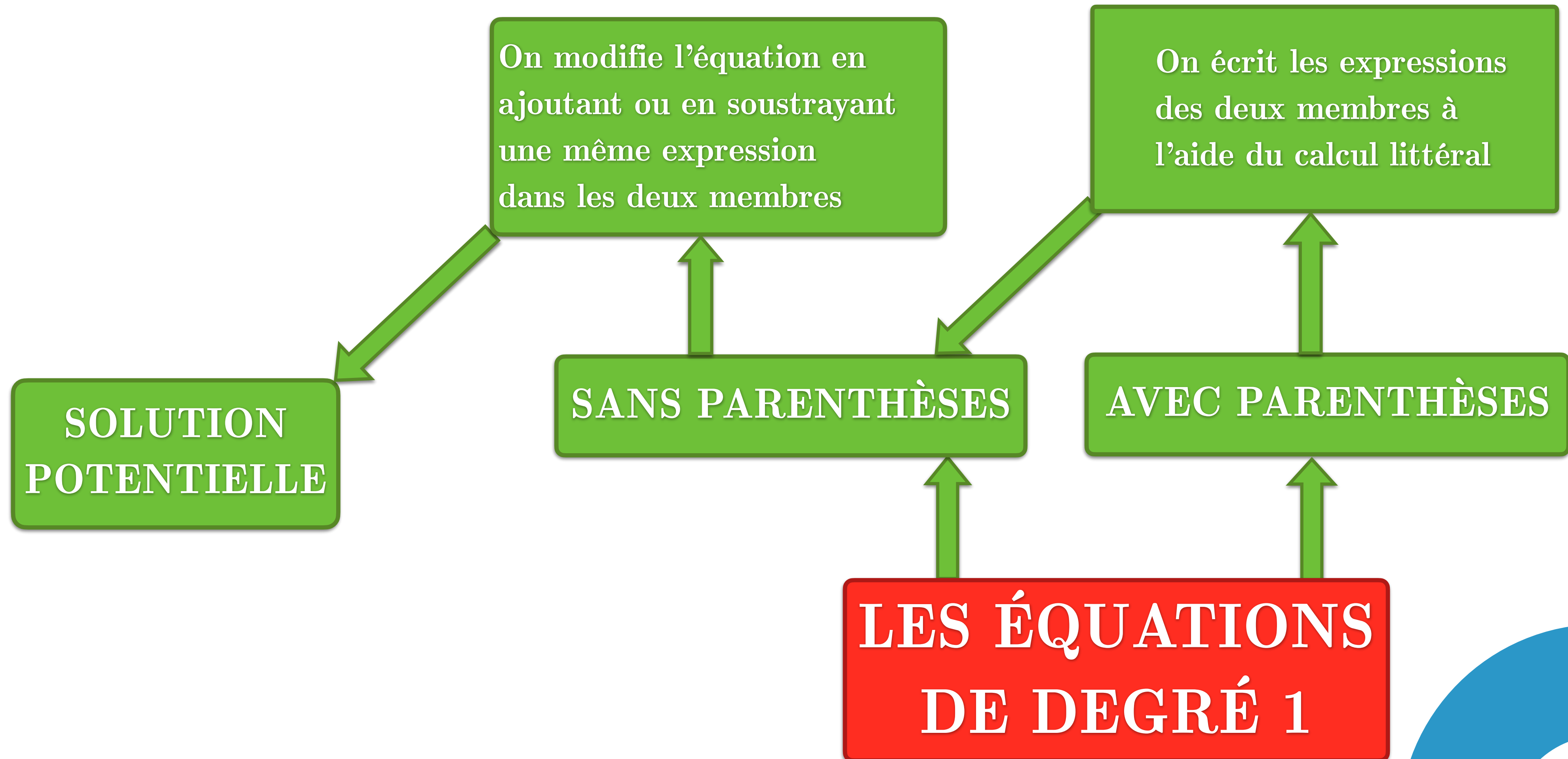
AVEC PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

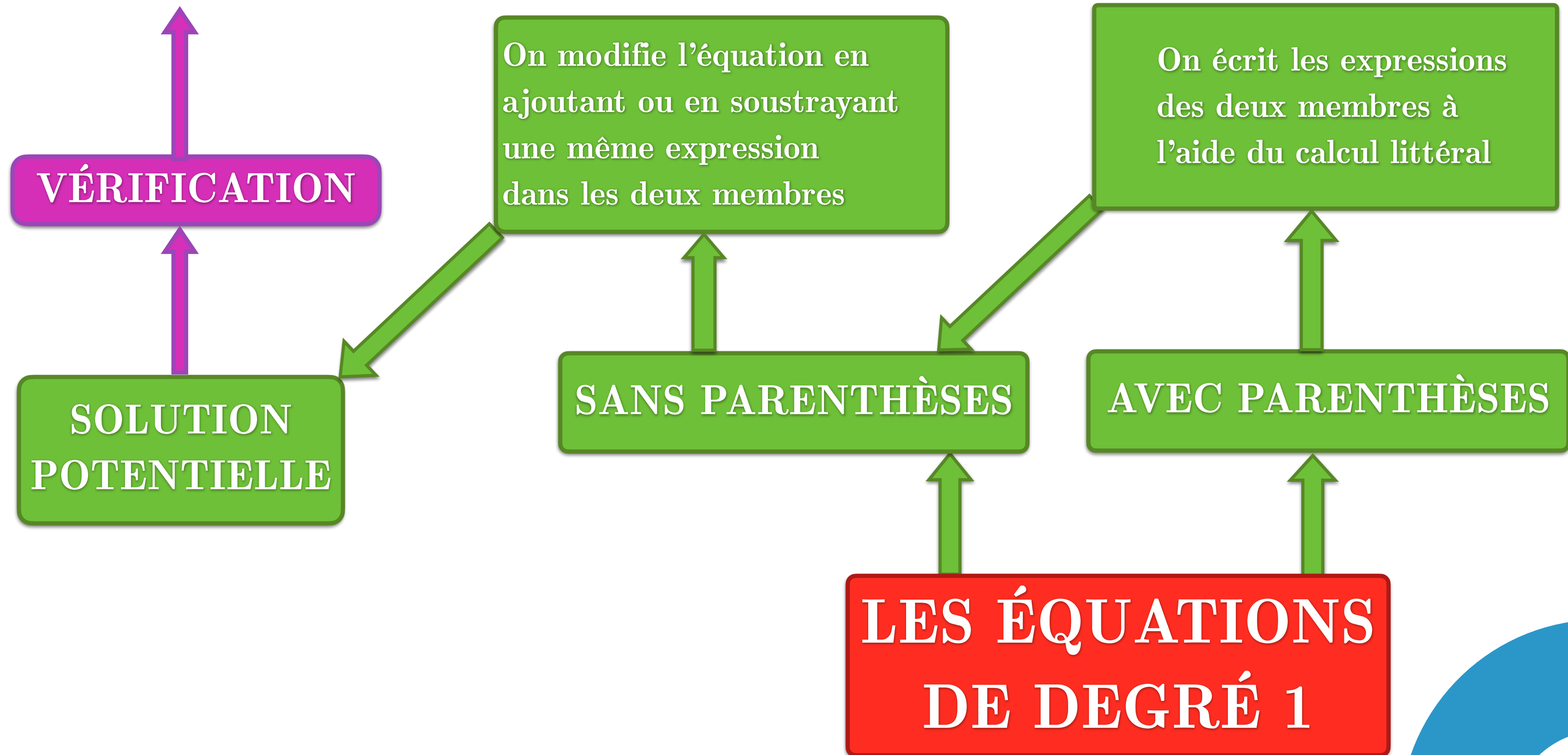
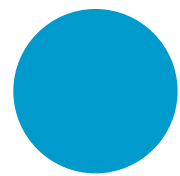
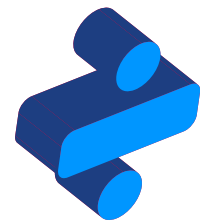
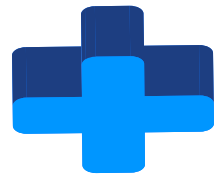
$$x^n + y^n = z^n$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

- Substituer dans le membre de gauche
- Substituer dans le membre de droite
- Comparer les résultats obtenus

VÉRIFICATION

On modifie l'équation en ajoutant ou en soustrayant une même expression dans les deux membres

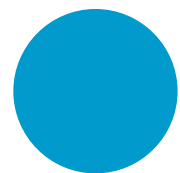
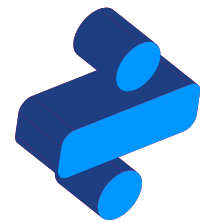
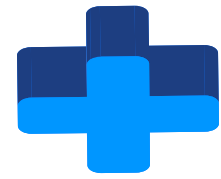
On écrit les expressions des deux membres à l'aide du calcul littéral

SOLUTION
POTENTIELLE

SANS PARENTHÈSES

AVEC PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

- Substituer dans le membre de gauche
- Substituer dans le membre de droite
- Comparer les résultats obtenus

VÉRIFICATION

On modifie l'équation en ajoutant ou en soustrayant une même expression dans les deux membres

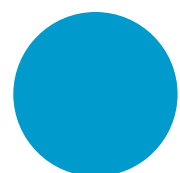
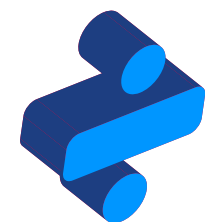
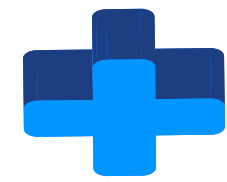
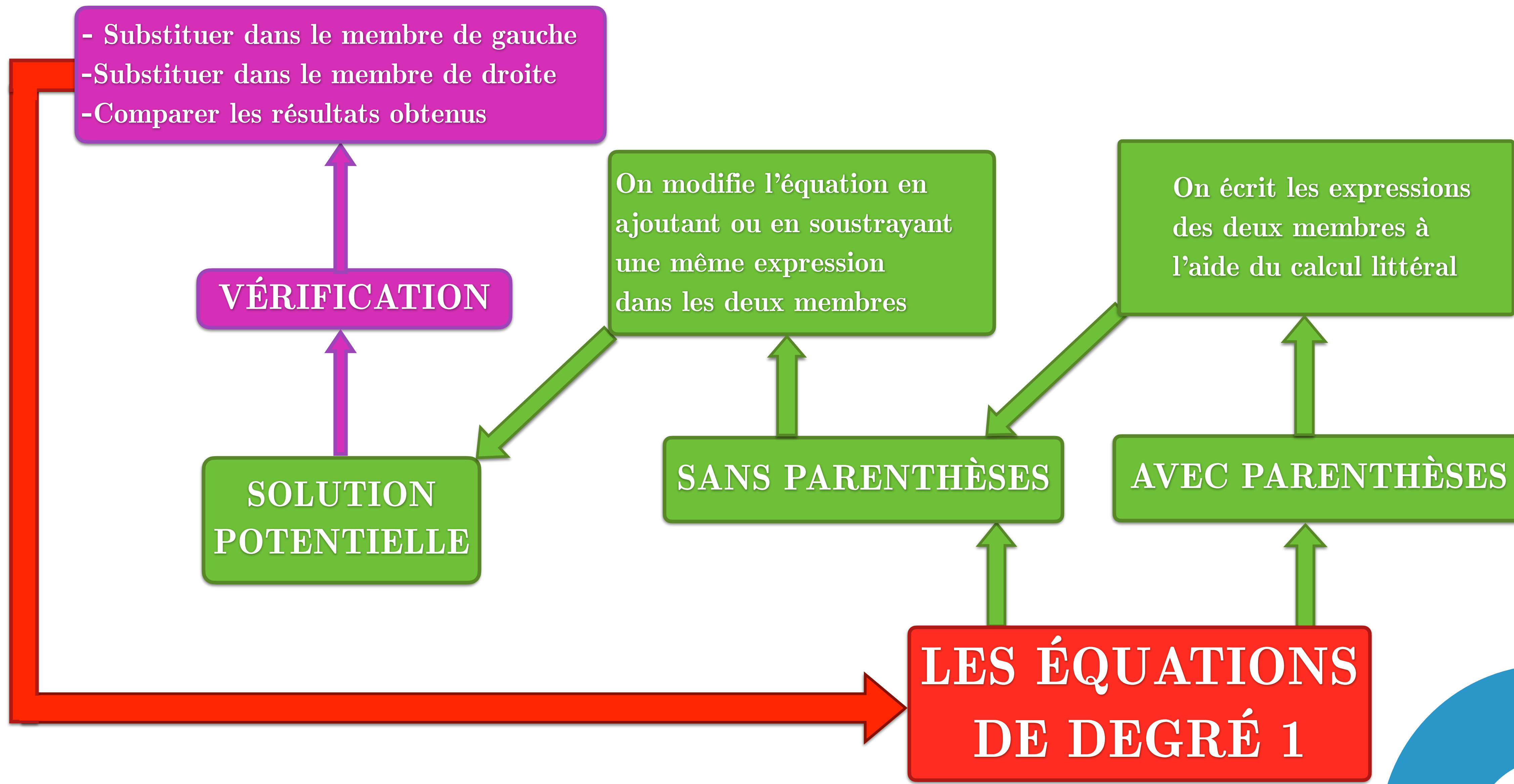
On écrit les expressions des deux membres à l'aide du calcul littéral

SOLUTION
POTENTIELLE

SANS PARENTHÈSES

AVEC PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS
DE DEGRÉ 1



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

TRACE ÉCRITE DE COURS

$$x^n + y^n = z^n$$

- Substituer dans le membre de gauche
- Substituer dans le membre de droite
- Comparer les résultats obtenus

PHRASE-RÉPONSE

On modifie l'équation en ajoutant ou en soustrayant une même expression dans les deux membres

On écrit les expressions des deux membres à l'aide du calcul littéral

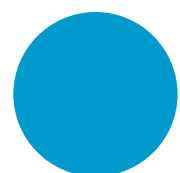
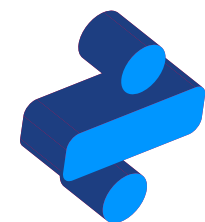
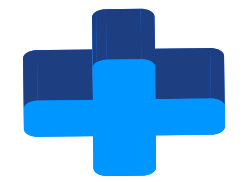
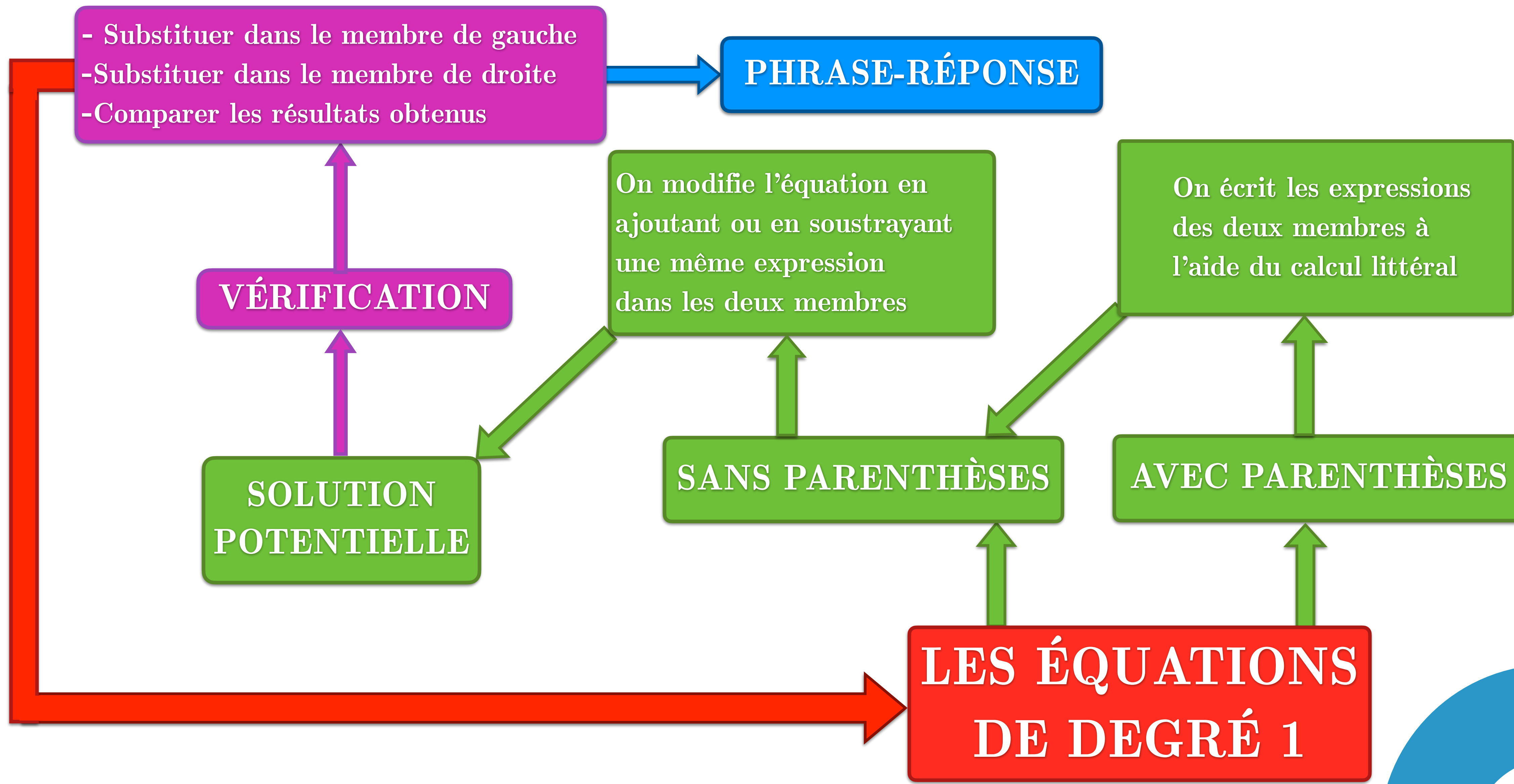
VÉRIFICATION

SOLUTION POTENTIELLE

SANS PARENTHÈSES

AVEC PARENTHÈSES

LES ÉQUATIONS DE DEGRÉ 1



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DISCOURS ORAL ET TRACE ÉCRITE

$$x^n + y^n = z^n$$

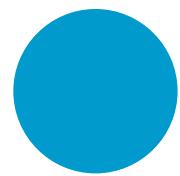
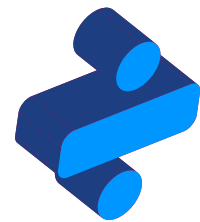
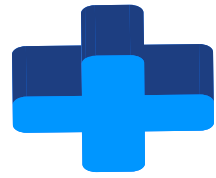
Conseils :

- Faire écrire les transformations des équations dans les deux membres
- Articuler son discours autour de la propriété de conservation d'égalité
- Expliciter à l'oral les choix des transformations des équations
- Faire écrire la vérification



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 8 :

Lors d'un exercice où il faut résoudre l'équation $7x + 5 = 4x + 17$, un élève écrit :

$$7x + 4x + 5 = + 17 \qquad 11x = 17 + 5 \qquad 11x = 22 \qquad x = 11 : 22 = 0,5$$

Parmi les aides suivantes, laquelle (lesquelles) choisiriez-vous ?

Aide 1 : Je lui demande comment on passe 5 et 4x de l'autre côté.

Aide 2 : Je lui demande quelle est l'opération entre 11 et x.

Aide 3 : Je lui demande de remplacer x par 0,5

Aide 4 : Je lui demande d'utiliser la propriété de conservation d'une égalité

Aide 5 : Cherche dans le cahier de cours ou/et le cahier d'exercice un exemple similaire.



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 8 :

Lors d'un exercice où il faut résoudre l'équation $7x + 5 = 4x + 17$, un élève écrit :

$$7x + 4x + 5 = + 17 \qquad 11x = 17 + 5 \qquad 11x = 22 \qquad x = 11 : 22 = 0,5$$

Parmi les aides suivantes, laquelle (lesquelles) choisiriez-vous ?

Aide 1 : Je lui demande comment on passe 5 et 4x de l'autre côté.

Aide 2 : Je lui demande quelle est l'opération entre 11 et x.

Aide 3 : Je lui demande de remplacer x par 0,5

Aide 4 : Je lui demande d'utiliser la propriété de conservation d'une égalité

Aide 5 : Cherche dans le cahier de cours ou/et le cahier d'exercice un exemple similaire.

Utiliser l'aide 3 permet à l'élève de comprendre qu'il y a une erreur à corriger

Utiliser les aides 4 et 5 permet de donner l'occasion à l'élève de se corriger par lui-même



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

~~c) $7x - 10 = 8 - 5x$~~

~~$7x - 10 + 10 = 8 - 5x - 10$~~

~~$7x = -2 - 5x$~~

~~$7x + 5x = -2 - 5x + 5x$~~

~~$12x = -2$~~

~~$x = \frac{-2}{12}$~~

~~$x = -\frac{1}{6}$~~

~~Vérification : membre de gauche ; $7x - 10 = -\frac{67}{6}$
membre de droite ;~~



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

~~c) $7x - 10 = 8 - 5x$
 $7x - 10 + 10 = 8 - 5x - 10$
 $7x = -2 - 5x$
 $7x + 5x = -2 - 5x + 5x$
 $12x = -2$
 $x = \frac{-2}{12}$
 $x = -\frac{1}{6}$~~

~~$7x - 10 = 8 - 5x$ Vérification : membre de gauche :
 $7x - 10 + 10 = 8 - 5x + 10$ membre de droite :
 $7x = 5x + 18$
 $7x - 5x = 5x + 18 - 5x$
 $2x = 18$
 $x = \frac{18}{2}$
 $x = 9$~~

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

~~$$\begin{aligned}
 c) \quad 7x - 10 &= 8 - 5x \\
 7x - 10 + 10 &= 8 - 5x - 10 \\
 7x &= -2 - 5x \\
 7x + 5x &= -2 - 5x + 5x \\
 12x &= -2 \\
 x &= \frac{-2}{12} \\
 x &= -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$~~

~~$$\begin{aligned}
 7x - 10 &= 8 - 5x && \text{Vérification : membre de gauche :} \\
 7x - 10 + 10 &= 8 - 5x + 10 && \text{membre de droite :} \\
 7x &= 5x + 18 \\
 7x - 5x &= 5x + 18 - 5x \\
 2x &= 18 \\
 x &= \frac{18}{2} \\
 x &= 9
 \end{aligned}$$~~

$$\begin{aligned}
 7x - 10 &= 8 - 5x && \text{Vérification : membre de gauche : } 7x - 10 = 0,5 \\
 7x - 10 + 10 &= 8 - 5x + 10 && \text{membre de droite : } 8 - 5x = 0,5 \\
 7x &= 18 - 5x \\
 7x + 5x &= 18 - 5x + 5x \\
 12x &= 18 \\
 x &= \frac{18}{12} \\
 x &= 1,5
 \end{aligned}$$

La vérification est potentiellement une aide pour les élèves. Elle doit être faite avec l'équation initiale.

1,5 est la solution de cette équation

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS

$$x^n + y^n = z^n$$

Logiciel «THOT» uniquement pour les équations du 1er degré



5 x - 2 = 3 x - 7

5 x - 2 = 3 x - 5

- 3 x = - 3 x

2 x = - 5

÷ 2

x = - 5/2

Choix d'une opération

ajouter aux deux membres de l'équation : x

Valider Annuler

7	8	9
4	5	6
1	2	3
+/-	0	,

Conservation
des transformations

choix des transformations par l'élève

Fin de la résolution

Absence de vérification



$$a = 10^{-n}$$

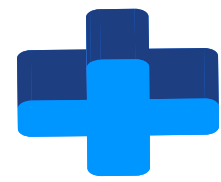
$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 9 :



Voici un extrait de manuel de 4^e.

Analyser son utilité pour les élèves.

3 Modéliser une situation

Méthode

Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes

① Choix de l'inconnue

On choisit l'inconnue, généralement notée x , qui désigne ce que l'on cherche.

② Mise en équation

On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.

③ Résolution

On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.

④ Conclusion

On interprète le résultat en rédigeant une phrase.

► Exemple

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe. Elle constate qu'elle a 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.

- Combien a-t-elle de bonbons à la fraise ?

① Choix de l'inconnue

On choisit l'inconnue : on appelle x le nombre de bonbons à la fraise.

② Mise en équation

Il y a deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise donc le nombre de bonbons à la réglisse est égal à $2x$.

Comme il y a 4 bonbons à la menthe, le nombre total de bonbons est donc égal à $x + 2x + 4$.

Le nombre total de bonbons est aussi égal à 19.

On peut donc écrire l'équation : $x + 2x + 4 = 19$.

③ Résolution

$$x + 2x + 4 = 19 \quad \leftarrow \text{Dans le membre de gauche, on simplifie l'expression } x + 2x + 4 \text{ qui devient } 3x + 4.$$

$$3x + 4 = 19$$

$$3x + 4 - 4 = 19 - 4 \quad \leftarrow \text{On soustrait 4 aux deux membres de l'égalité.}$$

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \quad \leftarrow \text{On divise les deux membres par 3.}$$

$$x = 5$$

④ Conclusion

Léa a donc acheté 5 bonbons à la fraise. \leftarrow On peut vérifier cette solution. Il y a :

- 5 bonbons à la fraise
- $2 \times 5 = 10$ bonbons à la réglisse
- 4 bonbons à la menthe

Soit un total de $5 + 10 + 4 = 19$ bonbons.



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Consigne 9 :

Problème plus facile à résoudre sans équation

Voici un extrait de manuel de 4^e.

Analyser son utilité pour les élèves.

3 Modéliser une situation

Méthode

Pour modéliser une situation à l'aide d'une équation, on suit les étapes suivantes

① Choix de l'inconnue

On choisit l'inconnue, généralement notée x , qui désigne ce que l'on cherche.

② Mise en équation

On traduit les données de l'énoncé du problème par une équation.

③ Résolution

On résout l'équation en utilisant les propriétés du cours.

④ Conclusion

On interprète le résultat en rédigeant une phrase.

► Exemple

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe. Elle constate qu'elle a 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise.

- Combien a-t-elle de bonbons à la fraise ?

① Choix de l'inconnue

On choisit l'inconnue : on appelle x le nombre de bonbons à la fraise.

② Mise en équation

Il y a deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise donc le nombre de bonbons à la réglisse est égal à $2x$.

Comme il y a 4 bonbons à la menthe, le nombre total de bonbons est donc égal à $x + 2x + 4$.

Le nombre total de bonbons est aussi égal à 19.

On peut donc écrire l'équation : $x + 2x + 4 = 19$.

③ Résolution

$$x + 2x + 4 = 19 \quad \leftarrow \text{Dans le membre de gauche, on simplifie l'expression } x + 2x + 4 \text{ qui devient } 3x + 4.$$

$$3x + 4 = 19$$

$$3x + 4 - 4 = 19 - 4 \quad \leftarrow \text{On soustrait 4 aux deux membres de l'égalité.}$$

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \quad \leftarrow \text{On divise les deux membres par 3.}$$

$$x = 5$$

④ Conclusion

Léa a donc acheté 5 bonbons à la fraise.

On peut vérifier cette solution. Il y a :

- 5 bonbons à la fraise
- $2 \times 5 = 10$ bonbons à la réglisse
- 4 bonbons à la menthe

Soit un total de $5 + 10 + 4 = 19$ bonbons.

Aucune utilité car on ne nous apprend pas à réussir l'étape 2.
De plus, commencer par le choix de l'inconnue n'est pas pertinent.
La mise en équation ne se fait pas de manière linéaire...



$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME $x^n + y^n = z^n$

Questions à se poser pour identifier une égalité

Plusieurs choix pour l'égalité sont-ils possibles ?

L'égalité est-elle suggérée par l'énoncé ?

Y a-t-il deux quantités différentes qui sont égales ?

Y a-t-il une quantité qui peut être vue selon deux visions différentes ?

Questions à se poser pour choisir une inconnue

Est-il nécessaire d'introduire une inconnue pour résoudre le problème ?

Plusieurs choix pour l'inconnue sont-ils possibles ?

L'inconnue est-elle suggérée par l'énoncé ?

L'inconnue choisie permet-elle de résoudre le problème ?

Questions à se poser pour écrire l'équation

Une lecture linéaire de l'énoncé est-elle suffisante pour écrire les relations à l'aide d'une équation ?

Faut-il reformuler certaines relations avant de les écrire à l'aide d'une expression littérale ?

Faut-il faire appel à d'autres connaissances avant d'écrire certaines relations à l'aide d'une expression littérale ? (propriétés arithmétiques, propriétés géométriques)

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME $x^n + y^n = z^n$

Questions à se poser pour identifier une égalité

Plusieurs choix pour l'égalité sont-ils possibles ?

L'égalité est-elle suggérée par l'énoncé ?

Y a-t-il deux quantités différentes qui sont égales ?

Y a-t-il une quantité qui peut être vue selon deux visions différentes ?

Ce qui constitue une aide, ce sont les questions qui permettent de réussir les étapes de la mise en équation d'un problème

Questions à se poser pour choisir une inconnue

Est-il nécessaire d'introduire une inconnue pour résoudre le problème ?

Plusieurs choix pour l'inconnue sont-ils possibles ?

L'inconnue est-elle suggérée par l'énoncé ?

L'inconnue choisie permet-elle de résoudre le problème ?

Ici, vous avez un exemple de telles questions.
A vous de trouver celles qui correspondent à votre enseignement.

Questions à se poser pour écrire l'équation

Une lecture linéaire de l'énoncé est-elle suffisante pour écrire les relations à l'aide d'une équation ?

Faut-il reformuler certaines relations avant de les écrire à l'aide d'une expression littérale ?

Faut-il faire appel à d'autres connaissances avant d'écrire certaines relations à l'aide d'une expression littérale ? (propriétés arithmétiques, propriétés géométriques)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Exercice :

Chiara souhaite acheter des pêches à 9,6 € le kilo. Le marchand lui répond : « Madame, il vous manque 2,8 euros ». Finalement, Chiara achète la même masse des abricots à 6,4 €. Le marchand lui rend 0,8 euros.

Quelle masse de d'abricots Chiara a-t-elle achetée ?

Somme d'argent (vue avec l'abricot) = Somme d'argent (vue avec la pêche)

choix de l'inconnue :

On note x la quantité d'abricot.

Écriture des 2 membres à l'aide de l'inconnu :

$$6,4 \times 9,6$$

Somme d'argent

↑ écart de 0,8

prix total des abricots : $6,4x$

Très bien

prix total des pêches : $9,6x$

↑ écart de 2,8

Somme d'argent $9,6x - 2,8$

2

$$6,4x + 0,8 = 9,6x - 2,8$$

$$6,4x + 0,8 - 6,4x = 9,6x - 2,8 - 6,4x$$

$$0,8 = 3,2x - 2,8$$

$$0,8 + 2,8 = 3,2x - 2,8 + 2,8$$

$$3,6 = 3,2x$$

$$\frac{3,6}{3,2} = x$$

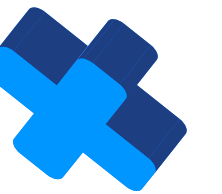
$$1,125 = x$$

Vérification :

$$6,4x + 0,8 = 6,4 \times 1,125 + 0,8$$

$$9,6x - 2,8 = 9,6 \times 1,125 - 0,8$$

$$= 10$$



$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

AIDE POUR LA MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

$$x^n + y^n = z^n$$

Exercice :

Chiara souhaite acheter des pêches à 9,6 € le kilo. Le marchand lui répond : « Madame, il vous manque 2,8 euros ». Finalement, Chiara achète la même masse des abricots à 6,4 €. Le marchand lui rend 0,8 euros.

Quelle masse de d'abricots Chiara a-t-elle achetée ?

Somme d'argent (vue avec l'abricot) = Somme d'argent (vue avec la pêche)

choix de l'inconnue:
On note x la quantité d'abricot.
Écriture des 2 membres à l'aide de l'inconnue.

6,4 x 9,6

Somme d'argent
↓ écart de 0,8
prix total des abricots: 6,4 x

Très bien

prix total des pêches: 9,6 x
↑ écart de 2,8
Somme d'argent 9,6 x - 2,8

Faire identifier l'égalité

Utilisation de schéma

$$6,4x + 0,8 = 9,6x - 2,8$$

$$6,4x + 0,8 - 6,4x = 9,6x - 2,8 - 6,4x$$

$$0,8 = 3,2x - 2,8$$

$$0,8 + 2,8 = 3,2x - 2,8 + 2,8$$

$$3,6 = 3,2x$$

$$\frac{3,6}{3,2} = x$$

$$1,125 = x$$

Vérification:

$$6,4x + 0,8 = 6,4 \times 1,125 + 0,8$$

$$9,6x - 2,8 = 9,6 \times 1,125 - 0,8$$

$$= 10$$

$$a = 10^{-n}$$

$$x^2 = -1$$