Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Définitions : nature, fonction

Situations de constructions de définitions en classe

Notions utiles, et quelques illustrations issues de la recherche

- *Definiendum* (ce qu'on définit, ce qui est à définir) *vs definiens* (ce qui définit, ce avec quoi on définit) *vs*, autrement dit : le *definiens* sert à définir le *definiendum*. D'où la dépendance envers une théorie de référence et des outils langagiers (plus généralement sémiotiques) de formulation. Impossibilité de définir les premiers objets ou premières propriétés : différence entre théorie axiomatique et démarche de mathématisation (y compris de mathématisation des mathématiques ; démarche comprenant l'ambition de construction d'ilôts déductifs et – dans l'idéal – de construction de théorie).
- Distinction entre définition, portrait et point de vocabulaire (côté texte du savoir), entre *concept definition* et *concept image* (côté cognitif). La connaissance des objets et la compréhension des concepts ne se limite pas à la « connaissance » (au sens de capacité de restitution d'une définition) : connaissances d'exemples, connaissance des liens avec d'autres notions, connaissance du rôle et du domaine d'usage … possibilité de construire et d'enrichir des cartes mentales[1]. Le problème est que parfois les définitions ne sont pas intégrées du tout (pas de restitution correcte), ou pas intégrée de manière fonctionnelle aux connaissances ; et que le *concept image* peut contenir des éléments erronés.
- En didactique des maths, les définitions ne sont pas un objet central ni classique d'étude. Il existe cependant des travaux mettant en avant l'activité de définition comme l'une des facettes de l'activité mathématique (en particulier des mathématiciens !), sur les différents usages des définitions, sur la possibilité de concevoir des classes de situations d'enseignement permettant la construction de définition (paradigme socio-constructif) ou d'amener les élèves mieux comprendre le rôle des définitions en mathématiques (le modèle étant celui du rôle des définitions pour les mathématiciens : ce ne sont ni des portraits, ni des descriptions ou des explications comme celles du dictionnaire).
- Deux dialectiques : définitions-démonstrations, définitions-exemples
  - Liens entre définition et preuve (*proof*) :
    - Pour faire des preuves on a besoin de définitions, et on produit les définitions pour produire les preuves, dans le cadre de théories. Identification de certains *requisits* généraux relatifs aux définitions : minimalité (facultatif), pas de cercle vicieux (obligatoire), etc.
    - Les définitions reposent souvent sur des propriétés, soit admises (éventuellement comme axiomes) soit démontrées : définition de la fraction comme quotient, définition de la racine carrée d'un nombre réel positif (les deux reposent sur des preuves d'existence et d'unicité). On

[1] A côté de pratiques pédagogiques (portrait, fiche d'identité, carte mentale) du côté texte-du-savoir, on pourrait mentionner des concepts issus de la didactique : champ conceptuel, conception (du côté des élèves, pouvant comprendre des éléments erronés) …

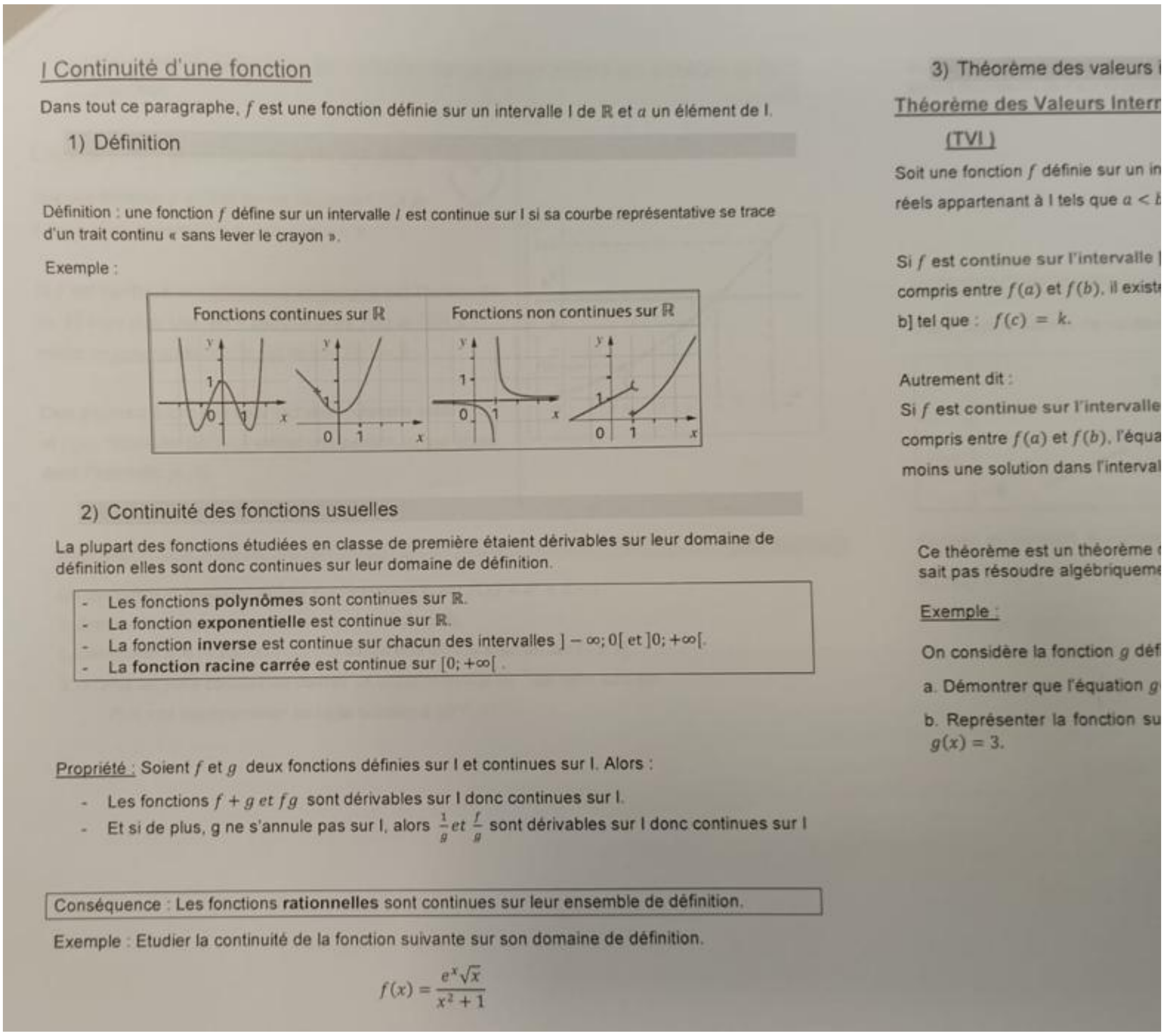
peut distinguer les définitions d'objets (l'existence et l'unicité posent problème) et les définitions de propriétés.

    - Un même objet admet souvent plusieurs propriétés caractéristiques, le choix de l'une comme définition est conventionnel. Conventionnel ne signifie pas arbitraire, immotivé : on peut préférer une définition à une autre en fonction du contexte mathématique, de niveau de classe, de critères épistémologiques ou esthétiques, d'anticipation de phénomènes didactiques (mémorisation, mauvaise compréhension ou mauvais usage). Mais on ne « prouve » pas une définition comme on prouve un théorème : on doit la rejeter si elle s'avère contradictoire ou reposant sur des termes non définis (évidemment) ; on peut la rejeter si elle ne satisfait pas à un certain cahier des charges. Une définition se « met à l'épreuve », sur le plan mathématique et épistémologique (sans préjuger de plans didactiques et cognitifs).
- Dialectique entre définitions et exemples :
    - Définitions obtenues à partir de collections d'exemples, soit par *abstraction* (isolement des traits communs caractéristiques) soit par différenciation conceptuelle (recherche de différence spécifique). Remarques : (1) les deux sont plus complémentaires qu'opposés, (2) du point de vue cognitif, il semble qu'on repère et verbalise plus facilement les différences que les points communs.
    - Pour donner du sens aux définitions, différents types d'exemples jouent différents rôles : exemples paradigmatiques/prototypique (et/ou visés), exemples frontières (y compris parce que trop simples : le carré est un rectangle ; fonctions constantes et fonction identité ; nombres 0 et 1), exemples pathologiques et exemples non-visées[2], non-exemples.
    - Le rôle des exemples ne se limite pas à donner du sens aux définitions ; pensez en particulier à leur rôle dans la formulation et la mise à l'épreuve de conjectures, ainsi qu'aux tâches de productions d'objets sous contraintes (dans des cadres divers : modélisation, vrai/faux)

[2] Les mathématiciens de la fin du 19ème siècle ont cherché à mieux définir ce qu'on nomme « courbe plane ». Si on se limite aux images d'une application continue d'un intervalle vers le plan, alors le carré unité (qui est une surface) est une courbe : https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_remplissante
Article original de Hilbert: https://www.digizeitschriften.de/id/235181684_0038%7Clog40?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B1%5D%7D
Autre exemple « non visé » et rarement intégré au *concept* image : périodicité de la fonction de Dirichlet (indicatrice de Q dans R).

Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Intermède : extrait d'un poly de Terminale (Spé Maths)



I Continuité d'une fonction

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.

1) Définition

Définition : une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative se trace d'un trait continu « sans lever le crayon ».

Exemple :

2) Continuité des fonctions usuelles

La plupart des fonctions étudiées en classe de première étaient dérivables sur leur domaine de définition elles sont donc continues sur leur domaine de définition.

- Les fonctions **polynômes** sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction **exponentielle** est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction **inverse** est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
- La **fonction racine carrée** est continue sur $[0;+\infty[$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur I et continues sur I. Alors :

- Les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables sur I donc continues sur I.
- Et si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I donc continues sur I

Conséquence : Les fonctions **rationnelles** sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple : Etudier la continuité de la fonction suivante sur son domaine de définition.

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x}}{x^2+1}$$

3) Théorème des valeurs i

Théorème des Valeurs Interr

(TVI)

Soit une fonction f définie sur un in

réels appartenant à I tels que $a < b$

Si f est continue sur l'intervalle [

compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il exist

b] tel que : $f(c) = k$.

Autrement dit :

Si f est continue sur l'intervalle

compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équa

moins une solution dans l'interval

Ce théorème est un théorème

sait pas résoudre algébriqueme

Exemple :

On considère la fonction g déf

a. Démontrer que l'équation g

b. Représenter la fonction su

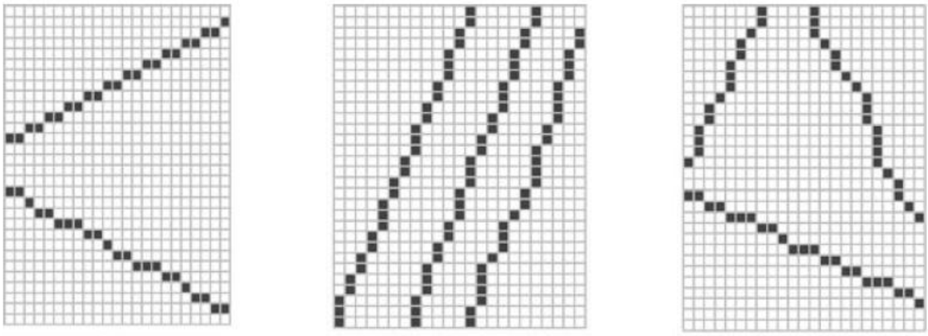
$g(x) = 3$.

Quelques travaux de recherche en didactique des maths :

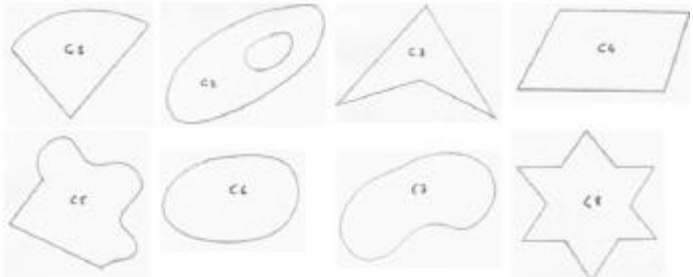
- Mariotti & Fischbein (*Educational Studies in Mathematics*, 1997) : souligner (1) l'importance de trouver des contextes dans lesquels la recherche de définition a une fonction, un enjeu (« *Although difficult, it seems useful to find a problematic context within which the significance of a definition arises.* », (2) accepter la médiation du professeur (garant d'un rapport correct aux mathématiques, rapport qui ne peut venir des élèves) et aller vers des définitions « négociées », (3) expliciter les attentes et encourager l' « élève théoricien » (*The teacher promotes a specific attitude of the pupils towards the solution of a problem, so that the 'theoretical' aspect may be explicitly introduced and pupils progressively achieve a geometrical point of view*)
- Ouvrier-Buffet (*ESM* 2006, *RDM* 2015, Actes CORFEM 2021) :
  - Recherches de classes de *situations* (de « problèmes ») faisant jouer un rôle fonctionnel à la construction de définition :
    - Situations de classification ou de tri (caractérisation d'une classe d'objets)

Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

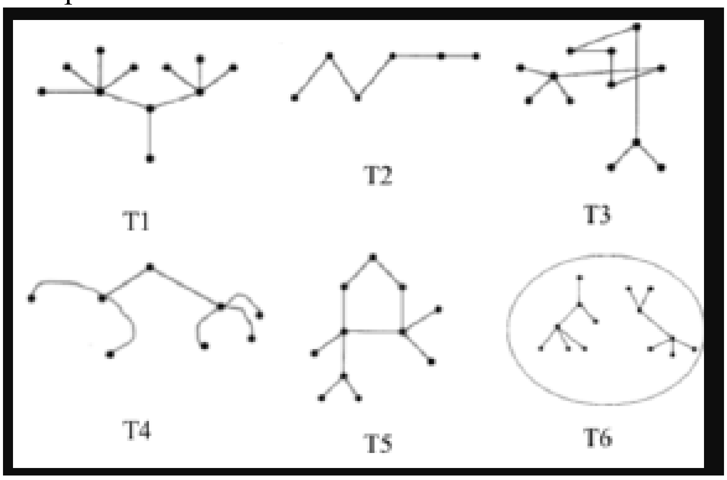
Exemples :
en géométrie discrète, lesquelles des figures ci-dessous sont des « lignes droites »



Lesquelles de ces figures sont « convexes » :



Ci-dessous, les objets T1, T2, T3, T4 sont des « trucs », T5 et T6 n'en sont pas :



Définitions
Def1 (structurelle) - G est connexe sans cycle.
Def2 (cheminement) - Entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin[7].
Def3 (combinatoire) - G (à n sommets) est sans cycle avec (n-1) arêtes.
Def4 (combinatoire) - G (à n sommets) est connexe avec (n-1) arêtes.
Def5 (aspect optimal) - G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal[8]).
Def6 (dynamique) - G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal[9]).
Def7 (inductive (ascendante) et constructive) - Un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant[10].
Def8 (inductive (descendante) et constructive) - G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.
Def9 (inductive) - Un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.
Def10 (inductive) - Un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt[11] en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.

Tableau 3 – Définitions de l'arbre

- Situations de théorisation, de construction d'une théorie. Hypothèse : pas envisageable au niveau scolaire
- Situation de recherche de preuve d'une conjecture ; plus précisément, du domaine de validité d'un énoncé : comment caractériser les objets dont vérifiant ceci ou cela.
- Situation de modélisation / de mathématisation

▪ Décrire les processus de construction de définition :

- opérateurs aristotéliciens (aspects logiques et linguistiques : rejet des métaphores, des homonymies, des cercles vicieux, des redondances). Aspect classification : au sein d'un genre, recherche de différences spécifiques.
- opérateurs poppériens (contexte de justification ; construction d'une théorie, acceptation d'une théorie, choix entre théories concurrentes) : recherche de contre-exemples visant à mettre à l'épreuve une théorie, dont les définitions ne sont qu'une petite partie
- Opérateurs lakatosiens (aspects heuristiques / contexte de découverte) : on part d'une définition naïve (un mot, qui remplit une fonction de dénotation, permettant de commencer le travail : on nomme pour communiquer, pour dire un problème) puis succession de définitions-de-travail (ou « zéro-définitions ») dans le cadre d'une dialectique définition-preuve. « *The guiding Lakatosian principle is as follows: during a scientific research process, there is a progression from* zero-definitions *to* proof-generated definitions *(which originate in the search for a proof)*."

Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

(266). Cette analyse de la démarche scientifique semble cependant difficile à transposer dans un contexte d'enseignement. Chez Lakatos, le principal opérateur pour faire évoluer une 0-déf est la génération de contre-exemples (variété : *monster-barring defitinions, exception-barring definitions, monster-including*). Dialectique entre production de définition et production de preuve (cycles) chez Lakatos : *proof-idea, proof-analysis*, *local / global counter-examples, guilty lemma / hidden lemma, proof-generated concept / proof-generated definition*.

- Outiller les enseignants pour comprendre et accompagner les élèves dans ces situations de constructions de définition (SDC) :

- Rasmussen & Zandieh (*Journal of mathematical behavior*, 2010): "*One strand of work that emphasizes student use of definitions can be characterized by what we call the "definition game." The definition game takes a variety of forms, including using an unfamiliar definition in a familiar mathematical setting and using a familiar definition in an unfamiliar mathematical setting." Cas d'une définition inhabituelle dans un cadre familier : les fine functions*[3] *de Dahlberg et Housman. Cas d'une définition habituelle dans un cadre inhabituel : le cercle dans la taxi-cab geometry (*Borasi) ».
  What we mean by defining: "*our review of the literature and analysis of our case study data suggests that such a straightforward characterization misses the fact that formulating a definition, negotiating what one wants a definition to be (and why), and refining or revising a definition can occur as students are proving a statement, generating conjectures, creating examples, and trying out or "proving" a definition. We therefore find it necessary to include these other types of activity as part of defining when they involve formulating, negotiating, and revising a definition. The DMA [Defining as a Mathematical Activity] framework reflects this more nuanced view of what constitutes defining*."
  L'article a l'ambition d'étudier les dynamiques croisées d'émergence des *concept image* et *concept definitions* pour obtenir non une définition mais un *conceptual understanding*. Etude de cas : définir la notion de « triangle » dans le plan puis sur une sphère.

The defining as a mathematical activity framework.

Theoretical construct	Four levels of activity			
	Situational	Referential	General	Formal
Creating a concept definition	x	–	x	–
Using a concept definition	–	x	–	x
Creating a concept image	–	x	x	–
Using a concept image	x	–	–	x
Creating a new mathematical reality	–	x	x	–

- *Exemplifying definitions: A case of a square*. R. Zazkis, R. Leikin. Educational Studies in Mathematics 69(2), 2008, 131-148. Travail intéressant (dans le cas élémentaire du carré) sur les liens entre recherche/étude de définition(s) et production d'exemples. Par exemple pour les *unintended interpretations*

[3] **Definition**. A function is called *fine* if it has a root (zero) at each integer.

Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

I-9: A figure that looks the same every time it is rotated 90°
I-10: A shape with four sides that are equal and four 90° angles
I-11: A figure consisting of four equal sides

Fig. 3 Examples of unintended interpretation of definitions

Objects defined by I-9

Objects defined by I-10

Objects defined by I-11

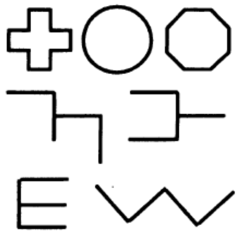
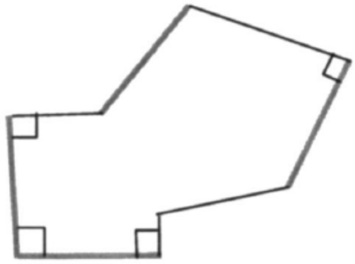


Fig. 2 Example of a polygon with four equal sides and four angles of 90°



- Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 283-299

Etude de terrain : 11 étudiants sont invités à explorer une définition formelle sur papier, en réfléchissant à haute voix (*thinking out loud*) puis en étant interviewé par les chercheurs.

Definition. A function is called *fine* if it has a root (zero) at each integer.

“After five to ten minutes the students were then presented with the *generation page*. »

Instructions. Please answer the following questions.

1. Give an example of a fine function and explain why it is a fine function.
2. Give an example of a function which is *not* fine and explain why it is not fine.
3. In your own words and/or pictures, explain what a fine function is.

“The next page was a *verification page* which provided functions for the student to determine if they satisfied the definition of fine function”

Instructions. Determine with explanation, which of the following functions are fine.

1. $f(x) = \sin(\pi x)$
2. $f(x) = x^2 - x$
3. $f(x) = 0$
4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$

“The *conjecture page* required the students to determine the validity of the following four statements about fine functions, each of which is false.”

1. No polynomial is a fine function.
2. All trigonometric functions are fine.
3. All fine functions are periodic.
4. The product of a fine function and any other function is a fine function.

Question d'ouverture: "How did this learning experience compare with your approach to learning new concepts in upper-level, undergraduate mathematics courses?"
Résultats: dans la 1ère phase (10 min. devant la définition et une feuille blanche) : quatre stratégies ont été observées, que nous présentons dans un ordre d'efficacité décroissante :

1. *Example generation*
2. *Reformulation*
3. *Decomposition and synthesis* (expliciter indépendamment le sens de chacun des mots de la définition)
4. *Memorization*

Un conseil : "Our findings suggest that it may be beneficial to introduce students to new concepts by requiring them to generate their own examples or have them verify and work with instances of a concept before providing them with examples and commentary."

Cependant: écart important entre deux types d'étudiants :

- Ceux qui dès le départ sont dans les stratégies 1 ou 2 profitent bien de la succession des tâches (génération, vérification, conjecture) : beaucoup de *learning events*, un *concept image* progressivement enrichi (et corrigé s'il était erroné)
- Ceux qui partent sur 3 ou 4 restent souvent bloqués sur des idées fausses (reflétant souvent une incompréhension des termes de la définition) et tournent en rond quelles que soient les tâches.

Raffinement sur les tactiques-élèves de productions d'exemples (visant à tester une conjecture) : Samuele Antonini (2011). Generating examples: Focus on processes. *ZDM Mathematics Education* 43:205–217

1. Give an example, if possible, of a real function of a real variable, that is non-constant, periodic and that does not have a minimum period (*the periodic function*)
2. Give an example, if possible, of a function $f:[a,b] \cap Q \to Q$ $(a,b \in Q)$ that is continuous and unbounded (*the function on Q*)

Questions :

3. Give an example, if possible, of a binary operation that is commutative but not associative (*the operation*, modified from a problem discussed in Zaslavsky & Peled 1996)
4. Give an example, if possible, of an injective function $f{:}[-1,1] \to R$, such that $f(0) = -1$ and $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 2$ (*the injective function*)
5. Give an example, if possible, of a twice differentiable function $f{:}[a,b] \to R$, such that f is zero in three different points and its second derivative is positive in the domain (*the convex function*)

Trois processus de production d'exemples observés :

- Essais-erreur (*trial and error*) : "the example is sought among some recalled objects; for each example the subject only observes whether it has the requested properties or not."
- Analyse (*analysis*): "The 'analysis' is a very sophisticated process, based on the production of a sequence of inferences: assuming that the object has been constructed and possibly that it satisfies other conditions (added in order to simplify or restrict the search ground), further properties are deduced until one reaches consequences that may evoke either a known object or a procedure to construct an object." L'analyse peut conduire à des preuves d'impossibilité (par contradiction)
- Transformation: "an object that fulfils part of the requested properties is modified through one or more successive transformations, that are goal oriented and anticipatory, until it is turned into a new object with all the required characteristics."

Ouverture : le regard d'un mathématicien (Jean-Pierre Kahane)

https://www.canal-u.tv/chaines/utls/perspectives-sur-les-mathematiques-actuelles/necessite-et-pieges-des-definitions

Etudes de cas

Etudes de cas n°1 :

Une ingénierie didactique sur les définitions des limites de suites en Terminale (Spé Maths) : travail explicite sur les erreurs, variété des formulations, évaluation de candidats-définitions, tri d'objets, différenciation conceptuelle, éléments conventionnels ne pouvant pas émerger de la situation, tâche d'invalidation de candidat-définition ne satisfaisant pas au cahier des charges, tâches (non prises en charge dans l'ingénierie) de démonstration de l'équivalence entre différentes définitions (qui sont des tâches de démonstration).

Renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Références :

Alory, Chorlay, Josse : Actes CORFEM 2021.

https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2021

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. IJRUME (*International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*), *5*(3), 267–314.

Etudes de cas n°2 :

Axel Duperray, Co-construction des définitions du parallélogramme en classe de sixième. Mémoire de Master MEEF, INSPE de Paris (Sorbonne Université), 2025.

Etudes de cas n°3 :

Recherche en cours sur la définition de « suite constante » à la transition Lycée-Université.

A vous de jouer :

Quelles définitions pourraient faire l'objet d'une explicitation de certains enjeux spécifiques ou d'un travail de formulation / construction / validation / reformulation :

parallélisme de droites (dans le plan) ; carré ; cercle[4] ; médiatrice d'un segment (dans le plan)

nombre pair, nombre premier

fonction croissante, suite croissante. Maximum d'une fonction

Fonction paire / impaire / périodique (et notion de période)

Suite majorée, suite non majorée, suite croissante, suite croissante à partir d'un certain rang

[4] Définitions possibles : courbe plane maximale de courbure constante, lieu plan des points sous lesquels un segment donnée est vu sous un angle droit, solution du problème isopérimétrique dans le plan …
Référence : Artigue, M., Robinet, J.: 1982, 'Conceptions du cercle chez des enfants de l'´ecole primaire', *Recherches en Didactique des Math´ematiques* 3.1, 5–64.