QUELQUES MOMENTS DANS L'HISTOIRE DE LA NOTION DE FONCTION : LECTURES ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE

Renaud CHORLAY[1]

INSPÉ de Paris (Sorbonne Université) & LDAR[2]

Résumé. Nous proposons un dossier documentaire permettant d'éclairer l'évolution de la notion de fonction dans les mathématiques savantes, du XVIII^{e} siècle au XX^{e} siècle. Construit à partir de deux textes principaux, l'un de L. Euler (1748a) et l'autre de W. F. Osgood (1912), le parcours du dossier permet de problématiser certains aspects de la notion de fonction : le lien entre fonction et formule, le rôle du domaine de définition, et l'unicité de l'image. Au-delà de la notion spécifique en jeu, ce parcours prolonge des réflexions méthodologiques (Chorlay & de Hosson, 2016) visant à identifier des points de contact fructueux entre deux disciplines — la didactique des mathématiques et l'histoire des mathématiques — dans le respect de leurs épistémologies propres. Trois points de contact sont discutés : la notion de concept Formalisateur-Unificateur-Généralisateur (FUG), la notion d'image d'une discipline et, enfin, le thème des connaissances sur la « nature de la science » (*Nature of Science, NoS*), issu de la didactique des sciences de la nature.

Mots-clés. Fonction, Euler, définition, exemples, FUG, NoS.

Abstract. We are proposing a selection of documents that sheds light on the evolution of the notion of function in scholarly mathematics, from the 18th century to the 20th century. Based on two main texts, one by L. Euler (1748a) and the other by W. F. Osgood (1912), the selection explores certain aspects of the notion of function: the link between function and formula, the role of the domain of definition, and the uniqueness of the image. Beyond the specific notion at stake, this paper extends methodological reflections (Chorlay & de Hosson, 2016) aimed at identifying fruitful points of contact between two disciplines — the didactics of mathematics and the history of mathematics — while respecting their different epistemologies. Three points of contact are discussed: the notion of the Formalizing-Unifying-Generalizing (FUG) concept, the notion of the image of a discipline and, finally, the topic of knowledge about the "nature of science" (NoS), in connection with the didactics of the natural sciences.

Keywords. Function, Euler, definition, examples, FUG, NoS.

> *Cauchy n'a jamais, à ma connaissance, exposé explicitement ce qu'il entendait par une fonction ; la lecture de son œuvre me paraît montrer avec évidence que, pour lui, cette question ne se posait pas ; « fonction » était simplement le terme général qu'il employait pour désigner l'une quelconque des fonctions particulières considérées par les analystes* […]. *C'est ainsi qu'un biologiste peut parler d'« être vivant », ou un chimiste d'un « corps simple » sans avoir été obligé de créer une conception* a priori *de l'être vivant en soi ou du corps simple en soi ; ils pensent simplement aux êtres vivants qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître* (Borel 1972[3], p. 120).
>
> *Niemand kann erklären, was eine Funktion ist* (Weyl, 1927, p. 8).

[1] renaud.chorlay@inspe-paris.fr

[2] Université Paris Cité, Univ. Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France.

[3] Texte de 1912.

Introduction

En 1992, Michèle Artigue et André Deledicq rédigent une brochure IREM sur les nombres complexes (Artigue & Deledicq, 1992) dans laquelle ils sélectionnent quatre épisodes du passé qui leur semblent pouvoir intéresser et éclairer quiconque est curieux de mathématiques. La démarche témoigne de scrupules méthodologiques : il s'agit d'une sélection d'épisodes ou « moments »[4], et non d'une tentative pour raconter une hypothétique « histoire » des nombres complexes, assumant une sélection pour sa valeur heuristique ; d'une heuristique orientée par les intérêts spécifiques des auteurs pour les questions d'enseignement. Le travail articule trois lectures : une lecture historienne, attentive aux textes et aux contextes, aux ressources et intentions des auteurs ; une lecture épistémologique visant à caractériser les enjeux et démarches de construction de savoir illustrées par ces épisodes ; une esquisse de lecture didactique qui, sans aller jusqu'à faire de liens directs avec l'enseignement (du niveau de l'apprenant jusqu'au niveau curriculaire), vise à montrer comment les deux premières lectures entrent en résonnance avec des questions et concepts ancrés dans la didactique.

Nous nous inspirons ici de cette démarche pour proposer un dossier historique sur la notion de fonction. Pour permettre les comparaisons, nous prendrons comme point de référence la caractérisation[5] suivante : une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F associe à chaque élément de E un et un seul élément de F. Cette caractérisation ne préjuge ni de la manière de se donner cette association ni d'éventuelles propriétés ; on voit de nombreux auteurs mettre l'accent sur cet aspect en parlant d'association « quelconque » ou « arbitraire », ou en soulignant des caractérisations négatives : l'association n'a pas à être donnée par une formule (Chorlay, 2016). Cette absence de contraintes n'est cependant que relative puisqu'elle est contrebalancée par une série d'obligations : stipulation explicite de deux ensembles ; existence et unicité de l'« image » de chaque élément de l'ensemble source. Cette deuxième obligation crée une dissymétrie entre les ensembles source E et but F : à un élément de F n'est pas nécessairement associé d'élément de E ; à un élément de F peuvent correspondre plusieurs éléments de E. C'est seulement lorsque la fonction est surjective et injective que les rôles de E et F deviennent symétriques, donnant lieu à deux fonctions réciproques.

Plusieurs aspects de cette caractérisation ont déjà fait l'objets de travaux d'histoire. Dans les deux premières parties, nous nous appuierons sur un travail classique sur *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle* (Youschkevitch, 1981). Après avoir précisé son objet, à savoir l'apparition du terme « fonction » dans les mathématiques savantes au début du XVIII^e siècle et l'évolution de son sens jusqu'au début du XIX^e siècle, cet auteur entreprend d'y corriger une idée fausse répétée depuis la fin du XIX^e siècle : le XVIII^e siècle aurait été dominé par une première notion de « fonction-formule » jusqu'à ce que la notion de « fonction-correspondance » lui soit préférée au début du XIX^e siècle, en particulier dans les travaux de Dirichlet sur les séries de Fourier (Lejeune-Dirichlet, 1829, 1837).

---

4 Nous évitons de reprendre le terme *« étape »* utilisé par les auteurs dans leur titre et retenons celui de « moment » utilisé dans leur introduction. Ce choix est explicité dans Chorlay et de Hosson (2016).

5 Nous restreignons l'usage du mot « définition » au cas où le *definiens* (ce qui sert à définir un nouveau terme, lui-même appelé *definiendum*) ne contient que des termes préalablement définis dans le cadre d'une théorie. Faute — ici — d'une définition du mot « associer », nous ne parlons que de « caractérisation ». Par ailleurs, la mise en avant de cette caractérisation en début d'article ne vise pas à lui accorder de qualité particulière (par exemple : la meilleure scientifiquement ; ou : la plus courante dans un échantillon représentatif de manuels de lycée).

La troisième partie de l'article vise à apporter des éclairages historiques sur la période suivante (XIXe - XXe siècles) et sur des aspects moins étudiés : condition d'existence et d'unicité de l'image, obligation de déclaration des ensembles (Chorlay, 2007, 2016).

Ces trois parties présentent donc une sélection d'épisodes témoignant de la variabilité des contours du concept de fonction et des tensions entre des points vue concurrents, dont on verra que, loin de se remplacer dans un mouvement unidirectionnel de rectification, ils conservent souvent pertinence et légitimité. La quatrième partie est d'une nature différente et vise à contribuer à répondre à la question naïve mais bien naturelle : qu'est-ce que tout cela nous apprend ? « Nous » désignant ici le lectorat d'intention de *Petit x* : enseignants, formateurs d'enseignants, chercheurs en didactique. Ce travail d'explicitation nous conduira à discuter trois concepts fournissant des points de contacts entre recherche historique et recherche didactique ; concepts dont la pertinence aura émergé au cours de l'étude du dossier documentaire : la notion de concept Formalisateur-Unificateur-Généralisateur (Robert, 1998 ; Dorier, 2000) ; les éléments susceptibles de caractériser l'*image* qu'une catégorie d'acteurs se fait d'un contenu mathématique (Corry, 1996 ; Dahan & Bottazzini, 2001) ; la notion de connaissance relative à la *nature de la science*, en lien avec les réflexions issues de la didactique des sciences de la nature (*Nature of Science, NoS*) (Abd-El-Khalick & Lederman, 2000a, 2000b ; Abd-El-Khalick, 2013 ; Kjeldsen & Lützen, 2015).

1. Euler 1748 : Une invitation à unifier l'analyse en adoptant un point de vue fonctionnel sur les formules

En 1748, Leonhard Euler (1707-1783) fait paraître le premier des deux volumes de son *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1748a), traduit en français sous le titre *Introduction à l'analyse infinitésimale* (Euler, 1796a). Comme l'indique le titre, l'ouvrage entreprend d'exposer le calcul infinitésimal depuis ses premières notions et vise la diffusion des connaissances, sans cependant s'inscrire dans un cadre d'enseignement précis. Le premier chapitre porte sur *« La fonction en général »*, promouvant ainsi la notion fonction comme point de départ de l'exposition de l'analyse infinitésimale. Des extraits des premières pages permettent d'apercevoir une organisation conceptuelle et des modes d'exposition dont nous soulignerons ensuite ce qui les distingue de ceux d'un ouvrage d'enseignement supérieur du XXIe siècle. Dans ces premières pages, chaque paragraphe s'ouvre sur une affirmation principale, en italique, suivie d'une explication. Dans l'extrait ci-dessous, nous coupons une grande partie de ces explications[6] et précisons le terme latin original lorsqu'il éclaire le sens.

> 1. Une quantité constante est une quantité déterminée qui conserve toujours la même valeur.
>
> *Tels sont les nombres de toute espèce, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue.* […] *À la vérité, dans l'Analyse ordinaire* [in Analysi communi] *qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'Alphabet, et celles qui ne le sont pas, par les dernières ; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie* [in Analysi sublimiori] *; on y envisage* [spectare]*, les quantités sous un autre aspect particulier, les unes étant considérées* [respicere] *comme constantes, & les autres comme variables.*
>
> 2. Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées. […].
>
> 3. Une quantité variable devient déterminée lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque. […].

[6] Le texte intégral est disponible en ligne, par exemple sur https://gallica.bnf.fr/

4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple $a+3z$ *;* $az-4zz$ *;* $az+b\sqrt{aa-zz}$ *;* c^2 *; &c sont des fonctions de z.*

5. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{9-zz}$ *ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z ; cependant, en introduisant pour z des nombres imaginaires, tels que* $5\sqrt{-1}$*, il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule* $\sqrt{9-zz}$*. Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes* [functiones apparentes] *; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme* z^0 *;* 1^z *;* $\frac{aa-zz}{a-z}$*. Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.*

6. La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées et combinées entre elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction ; la Multiplication & la Division ; l'Elévation aux Puissances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître. […].

7. Les fonctions se divisent en algébriques et en transcendantes ; les premières sont formées par des opérations algébriques seulement, & les dernières supposent pour leur formation des opérations transcendantes.

[…] *Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement ; telle seroit la fonction Z de z, si elle étoit exprimée par l'équation* $Z^5=azz\,Z^3-b\,z^4\,Z^2+cz^3\,Z-1$*. Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, et que par conséquent Z est une fonction quelconque*[7] *de z.* […].

10. Il faut enfin remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles, soit entières [polynômiales], *soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes, parce que ces sortes d'expressions, quel que soit le nombre qu'on substitue à la variable, n'obtiennent qu'une seule valeur ; mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguïté des signes radicaux, & de la double*[8] *valeur qu'ils indiquent* [quod signa radicalia sunt ambigua, & geminum valorem involvunt]. *Il y a aussi parmi les fonctions transcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes ; tel seroit l'arc de cercle qui répondroit au sinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus.*

Document 1 *: Premières pages de (Euler, 1796a, pp. 1-6) (extraits).*

[7] Labey traduit *quamdam* par « quelconque ». Il semble préférable de traduire par « une certaine fonction de Z ».

[8] La traduction de Labey est ici aussi discutable, puisque les valeurs « jumelles » peuvent être plus de deux (voire une infinité).

Euler commence par introduire les notions de quantités constantes et variables, puis de fonction d'une (plus loin : de plusieurs) quantité(s) variable(s). Dans un second temps (paragraphes 6 et suivants), il classifie différentes « espèces » de fonctions, selon trois critères : fonctions algébriques (i.e. liées à la variable par une relation polynomiale) ou transcendantes (*i.e.* non algébriques) ; fonctions explicites ou fonctions implicites ; fonctions uniformes ou multiformes. Plus loin, il introduit pair/impair.

Avant d'approfondir quelques points, un premier repérage de différences avec la notion de fonction rappelée en introduction montre une distance qui ne se limite pas à l'opposition « fonction-formule » (nous désignerons ainsi l'approche décrite par Euler au paragraphe 4) *vs* « fonction-correspondance » :

- Les termes nouveaux sont introduits à partir de deux termes non définis : celui de *« quantité »*, et celui d'*« expression analytique »*. Ce dernier est cependant exemplifié, et l'on voit qu'Euler s'autorise à faire appel à des notions d'algèbre (équations polynômiales, racines *n*-ièmes) et au-delà (sinus, logarithme). Les ingrédients de départ ne sont donc pas ensemblistes, et une bonne connaissance des mathématiques est supposée.
- La notion de *« fonction »* n'est pas première, elle est subordonnée à celle de *« quantité variable »*. La notion de variabilité fait l'objet d'un commentaire fondamental. Euler n'introduit pas de nouveaux *objets* mais distingue différents *points de vue* sur des objets que sont les *« quantités »* (paragraphes 1 et 2) puis les *« expressions analytiques »* (paragraphe 4) : en algèbre (qu'Euler appelle ici l'*« analyse ordinaire »*) les lettres désignent soit des données soit des inconnues et l'*« analyse »* — par opposition à la synthèse — consiste à isoler les inconnues en partant de leurs relations avec les données, ce qu'on appelle « résoudre l'équation ». Dans l'« *analyse sublime* » (au sens étymologique : « supérieure »), c'est la distinction entre constantes et variables qui prime. Euler propose au lecteur qu'il initie à l'analyse infinitésimale un changement de point de vue sur des objets syntaxiques communs, changement de point de vue qui permet d'articuler deux branches des mathématiques.
- Ainsi, les fonctions ne sont pas des objets nouveaux, mais un point de vue, une manière de regarder (*spectare*, *respicere*) des relations de dépendance exprimées par des expressions analytiques et des égalités. Lorsque deux quantités sont ainsi liées, on les regarde comme fonctions l'une de l'autre lorsqu'on étudie les liens entre leurs variabilités, voire leurs variations. Par exemple, la relation $Z=z^2$ contraint totalement la variabilité de Z lorsque z est donné ; elle contraint la variabilité de z lorsque Z est donné, mais pas totalement : pour chaque Z (sauf 0), z peut prendre deux valeurs (ainsi, si $Z=4$, alors $z=2$ ou -2). Ce petit exemple permet aussi d'illustrer les remarques d'Euler sur le caractère « ambigu » des racines (un nombre a en général deux racines carrées, trois racines cubiques, etc.), et le caractère multiforme des fonctions implicites. Dans notre exemple, Z est fonction explicite et uniforme de z, alors que z est fonction implicite de Z (*i.e.* non exprimée par une *« expression analytique »* en Z), qui plus est multiforme (ici : *« bi-forme »* (Euler, 1796a, p. 6)). La différence entre variables et constante est elle aussi question de point de vue.
- Aucune notion de domaine de définition n'est mentionnée, Euler allant jusqu'à écrire qu'aucune valeur n'est interdite (l'horizon étant celui de nos « nombres complexes »). On verra plus loin que les questions de domaines n'ont pas été étrangères aux mathématiciens du XVIII[e] siècle (extension du logarithme au-delà de $\mathbb{R}^{+*}$, prolongements par parité et périodicité de fonctions définies sur un intervalle). Mais

l'on ne s'interdit rien *a priori*. L'idée que l'expression (disons z^2) puisse définir deux objets fonctionnels différents selon qu'on l'étudie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^+$ est étrangère à ce cadre.

- Même pour les fonctions introduites par des formules, même en les associant au domaine d'existence maximal dans $\mathbb{C}$, la présence de paramètres distingue la notion d'Euler de la nôtre. Pour nous, sur $\mathbb{C}$, l'expression $az+b$ dans laquelle z est la variable et a et b des constantes ne définit par une fonction mais une famille (doublement) infinie de fonctions.
- L'absence de stipulation d'un domaine de définition et la prise en compte des fonctions multiformes crée une totale symétrie entre les points de départ et d'arrivée, bien différente de la dissymétrie notée plus haut dans la notion de référence. En particulier, toute fonction est inversible, puisqu'il s'agit de changer de point de vue sur les quantités regardées comme variables et liées par une formule. Euler l'écrit très explicitement : *« Si y est une fonction quelconque de z, réciproquement z sera une fonction de y »* (Euler, 1976a, p. 8). Dans une relation entre deux variables, si l'une est variable libre, l'autre est variable liée ; ce n'est pas une différence de nature, mais une différence de points de vue : on regarde une variable comme libre. C'est l'exemple d'Euler : le sinus associe à tous les nombres[9] de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ (où k est un entier relatif) l'unique nombre $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la fonction arcsinus associe donc à l'unique valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de la variable une infinité de valeurs de la fonction ; l'arcsinus est une fonction infiniment multiforme (*« infinitiforme »*).

La prise en compte d'autres parties du même traité, ou d'autres textes, éclaire les choix d'exposition d'Euler ainsi que certaines limites et tensions inhérentes à ces choix.

Euler est élève de Johann Bernoulli (1667-1748), lui-même disciple de Leibniz (1646-1716), et le paragraphe 4 s'inscrit dans le cadre de l'introduction par Bernoulli du mot « fonction ». Ainsi, pour énoncer des résultats généraux — par exemple un développement de type Taylor — Bernoulli écrit en 1694 qu'il s'applique à *« une quantité formée de quelque manière que ce soit d'indéterminées et de constantes »*[10] (cité dans Youschkevitch (1981, p. 31)). En 1718, un mot vient désigner ce genre d'objets, à l'occasion d'un texte sur les problèmes isopérimétriques : *« Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes »* (cité dans Youschkevitch (1981, p. 35)). L'usage de ce mot répond ici à un besoin rencontré au sein de la pratique mathématique, pour exprimer la généralité d'une propriété ou d'une formule. Euler monte d'un cran en généralité, doublement, en proposant un exposé introductif à l'ensemble de l'analyse infinitésimale — par opposition à une publication de recherche sur un point particulier comme chez Bernoulli en 1718 — et en caractérisant cette branche des mathématiques comme l'étude des relations de dépendance données par des formules liant des quantités regardées comme variables.

Un regard didactique invite à interroger cette montée en généralité en mobilisant la notion de concept FUG (Robert, 1998 ; Dorier, 2000). Dans les années 1990, une analyse croisée du travail

---

[9] Euler les nomme les *« arcs de cercle »*, puisqu'ils mesurent les angles en radians.

[10] La formule portant sur une quantité notée *n*, Bernoulli écrit : *« per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus »*.

des mathématiciens et des enjeux d'introduction de connaissances nouvelles pour les élèves conduit à caractériser certaines notions par leur triple caractère Formalisateur-Unificateur-Généralisateur (FUG). Cette identification permet d'alerter sur les difficultés spécifiques d'introduction aux élèves de notions que les mathématiciens ont introduites non pas pour étendre des notions déjà connues, ni pour attaquer avec succès un problème *particulier* résistant aux outils déjà connus, mais, par un retour réflexif sur de larges portions des mathématiques savantes, pour réorganiser leur mode d'exposition et réaliser des économies de pensée en établissant des résultats décontextualisés utilisables ensuite dans de multiples contextes. Dans ces pages d'Euler, par son rôle comme point de départ de toute une branche des mathématiques, et sa capacité à englober des cas nombreux et divers (de polynômes aux logarithmes), le rôle unificateur et le caractère général de la notion de fonction ne font pas de doute. Deux aspects demeurent plus problématiques.

Premièrement, le paradigme[11] de la notion FUG est la notion d'espace vectoriel (Dorier, 2000), qui fait l'objet d'une définition axiomatique énoncée dans le formalisme du calcul des prédicats. Comme nous le soulignions, les points de vocabulaire qu'expose Euler ne remplissent pas toujours les critères d'une définition, en particulier le fait que les termes du *definiens* soient eux-mêmes définis au sein d'une théorie d'appui. Certes, on peut considérer que, à partir de la notion de fonction, l'exposé d'Euler atteint un niveau définitoire pour ce qui est des notions de fonction « algébrique » ou de fonction « paire ». Ce niveau n'est cependant ni visé ni atteint pour la notion de « fonction ». Ni visé, car les fonctions ne sont pas une classe d'objets mais un point de vue : on peut chercher à expliquer un point de vue (le formuler dans plusieurs cadres, l'exemplifier, le distinguer de points de vue concurrents… toutes tactiques mises en œuvre par Euler), il échappe sans doute au domaine de la définition. Ni atteinte, la notion d'« expression analytique » n'étant elle-même pas circonscrite, ni dans l'extrait, ni dans une hypothétique théorie d'appui ; nous y reviendrons.

Deuxièmement, on peut douter que ces quelques pages d'Euler apportent des éléments « formalisateurs » ; en tout cas elles n'introduisent pas de formalisme *nouveau* pour capturer les aspects fonctionnels dans des expressions formées selon des formalismes hérités du XVII^e^ siècle : notations algébriques, différentielles et intégrales (Euler utilise le formalisme de Leibniz) ; transcendantes usuelles. On éclaire cette question en dézoomant de ces quelques pages. Il y a bien un projet formalisateur dans l'*Introductio* de 1748, mais il n'est pas présent dans les premières pages consacrées à l'explication du mot fonction. Il faut attendre le chapitre 4, intitulé *Du développement des fonctions en séries infinies* :

> *La formule* $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\&c$, *en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z ; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. D'ailleurs une semblable série, quoique infinie, paroît plus propre à faire connoître la nature des fonctions transcendantes.* […] *la même forme paraît aussi la plus propre à représenter à l'esprit le caractère de toutes les autres fonctions* […] (Euler, 1796a, p. 45).

Il s'agit plus de l'exposé d'un projet que l'assertion d'une vérité démontrée. Euler ne dispose ni ne cherche de théorème général d'existence et d'unicité des développement en séries entières. Il se contente d'affirmer la pertinence d'un mode d'étude. Il est d'ailleurs prêt à élargir encore le formalisme[12] :

[11] Rappelons le sens original du mot paradigme, en grammaire : cas exemplaire, à valeur de modèle pour une large classe de cas.

> […] *& si quelqu'un doutoit qu'elle* [une fonction non polynômiale] *pût être exprimée par une telle série d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laissera aucun doute ; mais pour plus de généralité, outre les puissances de z, qui ont des exposants positifs et entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi il ne restera aucun doute* […]. (Euler, 1748a, p. 46).

Chacun décidera pour lui si les arguments d'Euler le convainquent au-delà de tout doute ! En dézoomant un peu plus, on comprend qu'Euler puisse avancer avec assurance — quoique sans démonstration — et dire que ces recherches de développement sont « ordinaires ». La confiance en la fertilité et la faisabilité d'un tel projet est sous-jacente aux mathématiques du XVIII^e siècle. Ce projet et cette confiance étaient déjà affirmés, dans les mêmes termes, par Newton dans sa *Théorie des fluxions et des suites infinies* (Panza, 2003) ; on les retrouve plus d'un siècle plus tard comme point de départ de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, avec des éléments de justification (Lagrange, 1813). Cette unification via un formalisme unique ne repose donc sur aucun théorème fondateur dont la théorie ne ferait que dérouler les conséquences et les cas particuliers, mais sur un horizon. Cette croyance partagée relève de l'image (Corry, 1996 ; Dahan & Bottazzini, 2001) que les mathématiciens se font de l'analyse, et justifie — de manière plus ou moins implicite — les choix d'exposition.

Cette perspective d'unification par un formalisme généralisant celui des séries entières disparaît progressivement au XIX^e siècle, isolant peu à peu au sein du monde des fonctions la classe remarquable — mais particulière — des fonctions analytiques. Si cet article n'est pas le lieu d'un examen des causes de ce phénomène, signalons au passage un exemple donné en 1823 par Cauchy (17891-857) dans ses cours à l'Ecole Polytechnique : la fonction *f* définie sur les réels non nuls par $f(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}$ est prolongeable par continuité par la valeur 0 en $x=0$. Elle est indéfiniment dérivable et, en zéro, toutes les dérivées sont nulles. Son développement en série entière formelle en 0 est donc est identiquement nul, mais il ne coïncide avec la fonction sur aucun voisinage de 0 puisque f ne s'annule qu'en 0 (Youschkevitch, 1981, p. 54).

Comme le montre Youschkevitch (1981), l'importance et l'originalité de cet ouvrage d'Euler tient en particulier à ce qu'il fait d'une notion de « fonction » le point de départ et la perspective caractéristique de l'analyse infinitésimale. Soulignons qu'il s'agit moins d'une première unification que d'un changement d'unification. Au XVII^e siècle, c'est très largement l'objet « courbe » qui unifiait les recherches algébriques (par exemple chez Descartes), les premiers travaux du calcul différentiel et intégral (jusqu'aux équations différentielles ordinaires), et les modélisations fonctionnelles de phénomènes physiques (par exemple chez Galilée ou Newton) (Grattan-Guinness, 1980).

En revenant aux analyses historiques ou épistémologiques, on peut interroger la cohérence de la notion de « fonction-formule » exposée dans ces quelques pages d'Euler.

Premièrement, nous l'avons déjà souligné, la notion d'« expression analytique » n'est ni définie ni même caractérisée. Dans ces pages comme dans la suite de l'ouvrage, les exemples suggèrent même une notion sans borne, incluant progressivement des écritures infinies (ainsi des sommes de puissances, avec des exposants éventuellement non entiers) et des transcendantes usuelles ou à venir. Dès le départ, Euler fait allusion à toutes les formules susceptibles d'apparaître dans le calcul différentiel et intégral. On peut librement introduire un nouveau symbole pour désigner

[12] Soulignons au passage un élément de cohérence : l'introduction d'exposants fractionnaires, eux-mêmes « ambigus », permet d'intégrer les fonctions multiformes au cadre des développement en séries de puissances.

une fonction caractérisée implicitement (par exemple par une équation algébrique ou différentielle), et étendre ainsi à loisir l'univers des « expressions analytiques ».

Deuxièmement, Euler fait preuve de cohérence en affirmant que la notion de *fonction constante* est contradictoire, les fonctions étant une manière d'étudier les quantités variables. C'est une différence, rarement soulignée, avec notre notion de référence. Dans le cadre de cette dernière nous pouvons bien, par exemple, associer le nombre 1 à tout nombre complexe z, mais cela représente un cas limite pour l'exposé d'Euler : l'expression « 1 » est-elle une « expression analytique », elle qui ne contient aucune variable (ni z ni aucune autre) ? Que deviendrait dans ce cas la fonction réciproque ? Euler exclut les constantes du champ des fonctions, au risque de s'exposer à de futures incohérences (composées de fonctions réciproques, différences de deux primitives d'une même fonction, etc.).

Parmi les tensions et incohérences de l'approche « fonction-formule », certaines sont soulevées par Euler lui-même, que nous soyons convaincus ou non des réponses qu'il apporte en 1748.

Troisième tension quant à la cohérence, la notion de fonction implicite montre immédiatement une limite de la caractérisation d'une fonction par une « expression analytique ». Équation algébrique, intégrale ou équation différentielle peuvent bien être des objets syntaxiques, elles ne font que définir implicitement une ou (des) fonction(s) par une propriété caractéristique et non une formule. Euler semble s'en tirer par une pirouette, dans le cas des fonctions algébriques. Lorsqu'on décide d'étudier l'équation $Z^5 = azzZ^3 - bz^4 Z^2 + cz^3 Z - 1$ en regardant z comme la variable libre et Z comme la variable liée, Euler semble à la limite de la contradiction en écrivant : *« quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, et que par conséquent Z est une fonction* […] *de z »* (Euler, 1796a, p. 4). Il est plus prudent quelques pages plus loin. Ainsi explique-t-il au paragraphe 18 que *« Si x et y sont des fonctions de z, y sera aussi une fonction de x* […] *»*. Il doit reconnaître que *« le plus souvent, ces fonctions ne peuvent être représentées explicitement* […]*, cependant, on n'en aperçoit pas moins la réciprocité des fonctions, comme s'il était possible de résoudre algébriquement les équations de tous les degrés »* (Euler, 1796a, p. 9). On voit que le fait de présenter les fonctions comme des « expressions analytiques » au paragraphe 4 s'évapore rapidement, au point que, pour étudier une situation fonctionnelle, il suffit de faire « comme si » une expression existait.

Quatrièmement, l'approche « fonction-formule » pose des questions d'égalité entre fonctions, même dans les cas de formules explicites. On voit ce point souligné dès les premières pages, lorsqu'Euler signale que certaines expressions (par exemple 1^z) « mentent » (*mentire* en latin) : fonctions en apparence — puisque formules utilisant une variable —, elles sont en fait constantes, donc hors situations fonctionnelles. Plus généralement, l'idée selon laquelle une fonction serait identifiée à une formule est immédiatement contredite par Euler lui-même, dont le chapitre 2 de l'*Introductio* porte sur la *transformation* des fonctions. Il y souligne lui-même le fait que des formules différentes définissent la même fonction, ce qui est à la fois bien connu dès l'algèbre élémentaire, et constitue un objectif de recherche principal pour l'analyse (trouver une formule explicite à partir d'une équation algébrique ou différentielle, calculer une intégrale, développer en série entière, etc.).

> […] *toute transformation suppose une autre manière d'exprimer la même fonction ; c'est ainsi que l'Algèbre nous apprend qu'une même quantité peut prendre différentes formes* [per plures diversas formas exprimi posse]. *On aura une idée de ces sortes de transformations, si, par exemple, au lieu de la fonction* $2-3z+zz$ *on écrit* $(1-z)(2-z)$*, ou* $(a+z)^3$ *au lieu de* $a^3+3aaz+3az^2+z^3$ […]. *Ces*

expressions, quoique différentes par la forme, reviennent pourtant au même ; […] *(Euler, 1796a, pp. 14-15).*

2. Au XVIII^e siècle : Une notion de fonction aux contours variables et disputés selon les contextes

2.1. Une notion de fonction-correspondance est présente au XVIII^e siècle

Youschkevitch a bien montré que la notion de fonction-formule cohabite, dès la seconde moitié du XVIII^e siècle, avec une notion de fonction-correspondance. Ainsi, dans un traité (non publié) de Condorcet (1743-1794) rédigé vers 1780, lit-on :

> *Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x, y, z ..., et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent ; je dis que F est une fonction de x, y, z ...* […] *Enfin, si je sais que lorsque x, y, z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connoîtrois ni la manière d'exprimer F en x, y, z, ni la forme de l'équation entre F et x, y, z ; je saurai que F est fonction de x, y, z* (cité dans Youschkevitch (1981, p. 57)).

On retrouve la fonction-correspondance dans les cours d'analyse de Lacroix (1765-1843), qui rayonnent en France et bien au-delà jusqu'au milieu du XIX^e siècle. La première page du premier tome de son *Traité du calcul différentiel et intégral* (1797) explique :

> *Enfin de nouvelles idées, amenées par le progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions.* […] *Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première* (cité dans Youschkevitch (1981, p. 58)).

Quoi qu'en dise Lacroix il ne s'agit pas d'une *« nouvelle idée »*. En particulier, la fonction-correspondance se trouvait déjà sous la plume d'Euler lui-même, dès 1755, comme point de départ de son traité de calcul différentiel destiné au public savant (Euler, 1755) :

> *Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue* [latisseme patet] *et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière* [utcunque]*, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x.* (cité dans Youschkevitch (1981, p. 49)[13].

Euler ne présente pas cette nouvelle explication du mot fonction comme remplaçant celle de 1748, mais comme plus générale, voire la plus générale (*latissime*). Elle permet de faire disparaître les circonlocutions relatives aux fonctions implicites, mais, pour nous, garde des traits qui l'éloignent de la notion de référence : pas de problématisation du domaine, statut incertain de fonctions constantes, acceptation des fonctions multiformes (*« une ou plusieurs valeurs déterminées »* écrivait aussi Condorcet).

Mais ce n'est pas — ou pas seulement — le désir d'éliminer certaines incohérences d'exposition qui fait évoluer la conception des fonctions pour Euler au mitan du XVIII^e siècle. L'étude des

---

[13] *Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent ; quae denominario latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.*

liens entre fonctions et courbes, dans des contextes mathématiques et physiques contribue à une problématisation — par les acteurs — du lien entre fonction et formule.

2.2. La notion de fonction-formule pose des problèmes dans des contextes de géométrie ou de physique

L'*Introductio in analysin infinitorum* comprend en fait deux volumes, le second étant consacré aux « *lignes courbes* » (avec des aperçus sur les surfaces). Le premier chapitre du volume 2 fait le lien avec la notion de fonction qui servait à organiser l'exposé du premier volume. Euler représente une quantité variable par un point variable sur une droite (munie d'un point 0 et d'un point 1) — on notera au passage l'absence de représentation géométrique du cas complexe. Il expose ensuite *« une manière très-commode de représenter une fonction quelconque de x »* (Euler, 1796b, p. 2). L'association au point d'abscisse x d'un (ou plusieurs) segments perpendiculaire(s) de longueur(s) et de direction(s) déterminée(s) par y permet d'associer une courbe à une fonction. C'est l'association réciproque qui pose problème ; deux problèmes distincts se posent. Premièrement, toute courbe correspond-elle à une fonction ? Euler semble apporter une réponse négative :

> *Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point[14], qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble ; nous les considérons ici principalement comme le résultat de fonctions ; cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul* (Euler, 1796b, p. 4).

Deuxièmement, Euler souhaite que son exposé englobe les cas où une courbe est définie par plusieurs formules[15], et introduit des termes pour décrire ces cas :

> *De cette idée des lignes courbes découle naturellement leur division en* continues*, & en* discontinues *ou mixtes. La ligne courbe continue est celle dont la nature est exprimée par une seule fonction déterminée de x. Mais, si la ligne courbe est composée de différentes portions BM, MD, DM, &c. déterminées par plusieurs fonctions de x, de manière qu'une partie BM étant le résultat d'une fonction, une autre MD soit celui d'une seconde fonction ; nous appelons ces sortes de lignes courbes* discontinues*, ou* mixtes *&* irrégulières*, parce qu'elles ne sont pas formées suivant une seule loi constante, & qu'elles sont composées de portions de différentes courbes continues* (Euler, 1796b, p. 4).

Attention aux anachronismes : Euler n'est pas en train de se tromper en confondant l'unicité de la formule et la continuité au sens topologique. Le terme « continuité » est *introduit* en mathématique par Euler, il est libre de le définir comme bon lui semble ! C'est peut-être pour de bonnes raisons que les mathématiciens de générations ultérieures utiliseront le même mot pour désigner une autre propriété que celle d'Euler, mais ce changement de lexique ne vient pas corriger une erreur mathématique.

L'introduction de la classe des courbes « continues » permet cependant à Euler, quelques lignes après la prudente restriction de l'étude à celles des courbes qui correspondent à une fonction-formule, d'ajouter une pétition de principe à la liste des affirmations optimistes, peu justifiées, et aux contours peu déterminés auxquelles il nous a habitués :

[14] La définition de courbes par combinaison de mouvements s'ancre dans la tradition antique : *spirale d'Archimède*, *quadratrice d'Hippias*, etc.

[15] Qu'on pense à la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux, même si l'exemple n'est pas ici chez Euler.

Il s'agit principalement en géométrie de courbes continues, & on fera voir dans la suite que les courbes, qui sont décrites mécaniquement d'un mouvement uniforme, suivant une certaine loi constante, peuvent aussi être exprimées par une fonction unique (Euler, 1796b, p. 4).

Digression : l'image de la discipline dépend des définitions mais aussi des exemples

Autorisons-nous une digression importante. Les éléments introduits dans cette section permettent de revenir sur l'attribution courante mais erronée de la notion de fonction-correspondance à Dirichlet (1805-1859). On s'appuie parfois sur les quelques explications données en ouverture de son article de 1837 sur la convergence des séries de Fourier :

Désignons par a et b deux valeurs fixes et par x une grandeur variable, située entre a et b. Si à tout x correspond une valeur finie $y=f(x)$ qui varie de façon continue lorsque x varie lui-même de façon continue de a à b, nous dirons que y est une fonction continue pour cet intervalle. Ici, il n'est pas du tout nécessaire que y s'exprime en fonction de x selon une même loi sur tout l'intervalle ; il n'est même pas nécessaire d'envisager une expression algébrique explicite entre x et y. D'un point de vue géométrique, c'est à dire en envisageant x et y comme abscisse et ordonnée d'un point et où à chaque valeur de x de l'intervalle considéré correspond une valeur et une seule de y, la continuité d'une fonction est à mettre en parallèle avec le fait que la courbe soit d'un seul tenant. Cette définition ne prescrit en aucune façon aux différentes parties de la courbe une quelconque propriété commune et on peut se représenter les différents raccordements de manière totalement arbitraire, ou même s'imaginer une courbe simple tracée graphiquement, sans aucune contrainte préalable (cité dans Youschkevitch (1981, p. 60)).

L'objet de ces remarques introductives n'est pas de proposer aux mathématiciens une nouvelle définition générale de ce qu'il faut entendre par le mot « fonction », mais de préciser le type de fonction sur lequel va porter un exposé particulier : la démonstration de cet article ne porte que sur les fonctions uniformes (« *une* valeur finie »), « continues » (au sens topologique qu'on trouvait déjà chez Cauchy), définies sur un intervalle fermé borné (même si l'expression « situé entre *a* et *b* » est ambiguë sur les rôles des bornes). L'explication de Dirichlet porte en réalité sur le terme « continu », et vise à alerter son lecteur sur son choix de l'utiliser dans un sens différent de celui d'Euler. C'est bien l'indépendance des différentes parties de la courbe — ou la liberté de la prolonger d'une infinité de manières au-delà de *a* et *b* — que Dirichlet souligne d'abord dans un cadre fonctionnel, puis reformule dans un cadre géométrique. L'idée d'une correspondance arbitraire et ne dépendant pas d'une formule est certes présente, mais ni plus ni moins que chez Euler en 1755, puis chez Condorcet, Lacroix, Fourier, ou Lobatchevsky, etc. (cité dans Youschkevitch (1981, pp. 58-59)).

Cette remarque vise à rectifier — mais pas à minimiser — le rôle de Dirichlet dans l'évolution du concept de fonction. En particulier, son article précédent sur les séries de Fourier (Lejeune-Dirichlet, 1829) contribue de manière importante à l'histoire de la notion de fonction, d'au moins deux façons.

Premièrement, Dirichlet y réussit à démontrer la convergence (simple) de la série de Fourier vers une fonction sous les hypothèses suivantes :

[…] *toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées,* [la fonction] *ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites* $-\pi$ *et* π, *et* […] *elle n'a qu'un nombre déterminé* [*i.e.* fini] *de maxima et minima entre ces mêmes limites*

(nous dirions : une fonction bornée, continue par morceaux et monotone par morceaux sur $[-\pi,\pi]$). Le mouvement va dans le sens inverse de celui d'Euler : il ne s'agit pas de partir d'une formule pour étudier les propriétés des fonctions qu'on peut y lire, mais de partir de fonctions dont des propriétés non-syntaxiques sont connues pour aller vers une expression analytique (ici, une série trigonométrique). Attention, cependant, à ne pas surinterpréter ce « renversement ». D'une part, il n'est pas propre à Dirichlet. Dans les années 1820, Dirichlet, Abel et d'autres se reconnaissent dans cette nouvelle manière de faire de l'analyse, et désignent les travaux de Cauchy comme le paradigme (au sens de modèle) de cette modernité. D'autre part, il s'agit plus d'un enrichissement que d'un renversement. L'étude des propriétés des fonctions données par des classes de formules (qu'on pense aux fonctions analytiques ou aux solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels (Gray, 1986) demeure centrale en analyse ; le fait de pouvoir travailler dans l'autre sens n'efface pas le premier.

Deuxièmement, la fin de cet article de Dirichlet contribue de manière significative à lancer un programme de recherche qui va modifier profondément ce que les mathématiciens entendent par « fonction ». Après avoir résumé le théorème démontré, Dirichlet laisse entendre que la démonstration a peut-être eu recours à des hypothèses trop restrictives, et qu'une meilleure démonstration permettrait sans doute d'établir la même conclusion sous des hypothèses plus lâches : *« Il resterait à considérer les cas où les suppositions* [*i.e.* hypothèses] *que nous avons faites sur le nombre de solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu »* (Lejeune-Dirichlet, 1829, p. 169). Ce programme de recherche relatif aux séries de Fourier en ouvre un autre relatif à l'intégration. En effet, la conclusion du théorème dépend de la capacité à calculer des coefficients de la forme $\int \varphi(x) sin(nx) dx$. Avant de considérer les conditions minimales sous lesquelles le théorème peut être démontré, Dirichlet invite à considérer les conditions minimales sous lesquelles sa conclusion peut être énoncée. En particulier, il faut que l'intégrale de $\varphi(x) sin(nx)$ soit bien définie, ce qui impose certainement des conditions sur φ. Dirichlet ouvre ainsi un programme de recherche sur les conditions d'intégrabilité, programme qui va conduire à la fois à un approfondissement de la notion d'intégrale, et à une course aux fonctions pathologiques permettant d'explorer les limites de telle ou telle notion d'analyse (intégration, dérivation) (Grattan-Guinness, 1980 ; Volkert, 1987). Ces fonctions aux propriétés inattendues sont moins des fonctions qu'on « rencontre » que des fonctions qu'on *construit*, en cherchant une combinaison de propriétés spécifique et inhabituelle. Leur construction demande la plus grande maîtrise des mathématiques, on s'en convaincra en lisant la construction par Riemann d'une fonction intégrable quoique discontinue sur une partie dense de l'intervalle, ou celle par Weierstrass d'une fonction continue nulle part dérivable (Volkert, 1987). Dirichlet s'engage dans cette pratique dès cet article de 1829 en exhibant une fonction non-intégrable :

> *On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition* [Dirichlet vient d'énoncer une condition d'intégrabilité plus générale que : bornée et continue par morceaux]*, si l'on supposait φ(x) égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d lorsque cette variable est irrationnelle* (Dirichlet, 1829, p. 169).

On peut prolonger ces éléments d'histoire dans une direction épistémologique à portée didactique. Ce n'est pas ici un changement de « définition » qui modifie ce que le mot « fonction » recouvre pour les mathématiciens, puisque la notion de fonction-correspondance était disponible bien avant ces travaux. C'est bien la prise en compte — mieux, la recherche — d'*exemples* qui modifie l'image que les mathématiciens se font du concept. Ce qu'on appelle souvent la « fonction de Dirichlet » (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) tombe certes sous la définition de la fonction-correspondance présente dès 1755 sous la plume d'Euler, mais Euler n'a jamais considéré ce genre d'objets. L'épistémologie trouve ici des ressources dans la littérature didactique sur les espaces d'exemples (*example spaces*), issue en particulier des travaux de Mason et Watson (Goldberg & Mason, 2008 ; Mason & Watson, 2008 ; Antonini *et al.*, 2011).

On y analyse les exemples et les familles d'exemples selon plusieurs angles : celui de la fonction de l'exemple dans le contexte d'une théorie (*e.g.* exemple paradigmatique, non-exemple, exemple atypique ou frontière, etc.) ; celui de l'instance porteuse de la famille d'exemples, depuis une instance cognitive individuelle en situation (*e.g.* l'ensemble des exemples mobilisé par tel élève dans son activité sur telle tâche) jusqu'à des institutions (*e.g.* les exemples de groupes dont la connaissance est attendue par le jury de l'agrégation dans les année 1960 (Rolland & Chorlay, à paraître)) ; enfin, selon la nature des variations au sein d'une famille d'exemples : identification des caractéristiques ou paramètres susceptibles de varier (*dimensions of possible variation*) puis plage des variations possibles (*range of possible variations*) selon chacun des paramètres.

Il ne s'agit pas ici de résumer en dix lignes tout un champ de recherches, mais de montrer que ses outils s'adaptent à l'articulation de connaissances historiques et de réflexions épistémologiques ou didactiques. La fonction de Dirichlet peut illustrer la notion d'exemple atypique ou frontière (*boundary example*), par opposition aux exemples paradigmatiques (ceux que tout le monde — dans une institution donnée — a en tête, ceux visée par les premières formulations de définition). Ainsi, on peut considérer la fonction *sinus* comme exemple paradigmatique de la notion de « fonction périodique » et la fonction de Dirichlet comme exemple frontière de cette même notion (elle admet en effet tout nombre rationnel non nul comme période). Dans les mathématiques savantes européennes de la décennie 1820, la fonction de Dirichlet est un exemple frontière de fonction, qui s'intègrera progressivement à l'espace d'exemple des institutions « recherche en analyse mathématique » puis « enseignement supérieur ». Parmi les différentes dimensions de variation possibles (dont on ne dispose pas ici de liste *a priori* : un exemple atypique peut dévoiler une nouvelle dimension de variation possible), l'exhibition de cet exemple ne joue pas sur la dimension « domaine » (classiquement $\mathbb{R}$), mais sur au moins autres trois dimensions : lien avec des « formules » ou « expressions » (en prenant la valeur : non représenté/able par une « formule », dans l'extension qu'on donne à ce terme en 1829), dimension de régularité (en prenant la valeur extrême : discontinue en tout point), dimension graphique (en prenant la valeur extrême : impossible à représenter). L'étude historique et l'analyse didactique peuvent s'articuler dans l'étude des évolutions d'un espace d'exemple, selon les trois dimensions d'étude (fonction, instance, dimensions et plage) ; nous le verrons dans la suite de cet article.

2.3. La notion de fonction-formule pose des problèmes dans des contextes de géométrie ou de physique (suite et fin)

Dans la seconde moitié du XVIII^{e} siècle, un problème de physique mathématique — dit des « cordes vibrantes » — donne lieu à une controverse entre mathématiciens (Ravetz, 1961 ; Youschkevitch, 1981 ; Lützen, 1983 ; Dhombres, 1988). Nous ne pouvons donner ici qu'un aperçu d'un dossier historique touffu (nombreux auteurs, textes s'étalant plusieurs dizaines d'années) et difficile, en particulier — c'est le propre de controverses — du fait du caractère obscur ou peu convaincant d'une partie des arguments échangés[16]. L'impact exact de cette controverse sur l'évolution de la notion de fonction est aussi discuté : Youschkevitch (1981, p. 43) laisse entendre qu'il joue un rôle important pour Euler dans le passage de la fonction-formule (1748) à la fonction-correspondance (1755), mais la thèse est contestée par des historiens contemporains[17]. Le coup d'œil sur ce dossier historique permet cependant de montrer

[16] Ravetz le dit franchement : « […] *the Vibrating String controversy was a mess. But it is no less instructive for that* » (Ravetz, 1961 p. 71).

[17] Par exemple Jesper Lützen (communication orale).

que la notion a, au XVIII[e] siècle, des contours non stabilisés, et que des contextes extérieurs aux mathématiques pures peuvent jouer un rôle moteur. Nous verrons aussi que ce n'est qu'indirectement que le sens du mot « fonction » est en jeu dans cette controverse, qui porte directement sur deux questions : celle de la portée mathématique de la notion eulérienne de « courbe continue » (*i.e.* descriptible par une seule formule), et celle de la délimitation de la classe des phénomènes physiques susceptibles d'un traitement mathématique.

La controverse des cordes vibrantes porte sur le problème physique suivant : une corde élastique de longueur L étant attachée à ses deux extrémités, déterminer son mouvement après qu'à l'instant $t=0$, on lui a imprimé une déformation donnée. On pourrait parler de l'onde stationnaire propageant dans le temps d'une impulsion initiale dans un milieu élastique unidimensionnel. On peut traduire le problème en termes fonctionnels : à chaque instant *t*, la forme de la corde est décrite par une fonction y de la variable *x*, où *x* varie entre 0 et *L*. Prolongeant des travaux de Taylor (1685-1731), d'Alembert (1717-1783) établit que, sous certaines hypothèses physiques et mathématiques de régularité, la fonction $y(x,t)$ cherchée est solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire, du second ordre, à coefficient constant :

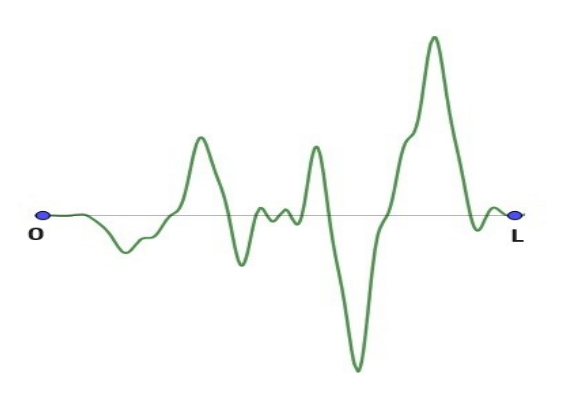
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{(Équation } E\text{)}$$

On cherche les solutions vérifiant des conditions aux limites : pour tout *t*, $y(t,0)=y(L,t)=0$ (la corde est attachée) ; à l'instant $t=0$, la position et la vitesse initiale de chaque point de la courbe est connue, c'est-à-dire les fonctions $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$.

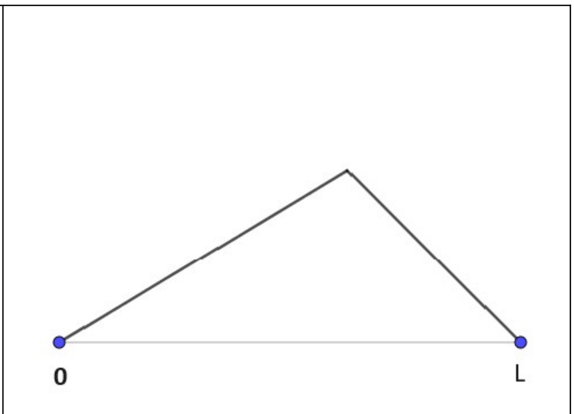
Les problèmes apparaissent lorsqu'on s'interroge sur les courbes acceptables comme conditions initiales (nous nous limiterons à la forme initiale $y(x,0)$ sans considérer les vitesses initiales), ou sur le type de fonctions qu'on accepte comme solutions de *E*, ou sur le prolongement de la fonction $y(x,0)$ à la droite réelle. En 1746, d'Alembert limite l'étude aux cas où la forme initiale est décrite par une seule formule (donc une courbe continue au sens d'Euler), ce qui lui semble entre autres garantir les conditions de régularités sous lesquelles le problème physique a été mis en équation (fonctions supposées de classe C^2). En 1748, Euler lui répond que cette limitation est excessive en ceci qu'elle ne correspond à aucune contrainte physique :

> […] *la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque ;* […] *[on pourrait considérer une] courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière ou mécanique* (cité dans Youschkevitch, (1981, p. 44)).

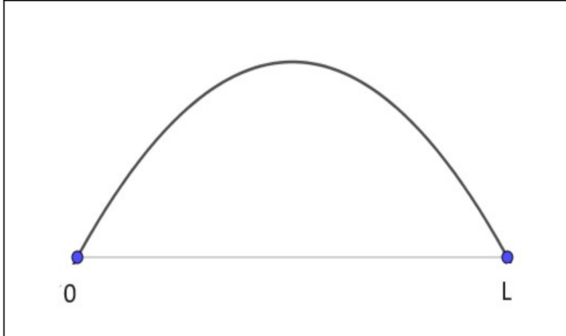
Différentes formes à $t=0$ soulèvent différentes questions. Ces cas (*cf.* figure 1) sont certes imaginables comme conditions initiales dans le monde réel (en particulier le cas bien élémentaire de la corde pincée), on comprend cependant que les mathématiciens s'interrogent sur la possibilité d'un traitement mathématique effectif dans le cadre de l'analyse, soit pour une courbe dont la loi n'est pas donnée par une formule, même implicite (*cf.* cas 1), soit pour les cas présentant des points singuliers (*cf.* cas 2).



Cas 1 : Courbe « mécanique ».



Cas 2 : Corde pincée.



Cas 3 : Courbe algébrique
(ici $y(x,0)=x(L-x)$).

Figure 1 *: Quelques possibilités de forme initiale de la corde vibrante.*

Les premiers éléments de résolution créent des interrogations supplémentaires.

Premièrement, d'Alembert établit que, dans les cas sans vitesse initiale, on peut chercher les solutions sous la forme $y=\varphi(at+x)-\varphi(at-x)$. Cette élégante réduction du problème à la recherche d'une fonction d'une seule variable nécessite cependant de considérer la fonction auxiliaire φ sur tout $\mathbb{R}$ (t pouvant parcourir $\mathbb{R}$) et pas seulement sur $[0,L]$. Ce choix n'est pas déterminé par le problème, même si certains semblent plus commodes : si l'on impose à φ d'être impaire sur $[-L,L]$ puis périodique sur $\mathbb{R}$, de période $2L$, alors elle est déterminée par le problème, puisque sur $[0,L]$, on a $\varphi(x)=\frac{1}{2}y(x,0)$.

Deuxièmement, après qu'Euler a proposé des développements trigonométriques dans quelques cas, se pose la question de la généralité de cette méthode. Peut-on représenter toute forme initiale en ajustant les coefficients a (sans qu'on connaisse encore de formule ou de méthode générale pour le faire) pour obtenir des expressions du type :

$$y(x,0)=a_1 sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+a_2 sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+a_3 sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)+\ldots \qquad \text{(formule } T\text{)}$$

Ces questions soulèvent pour les auteurs — auxquels s'ajoutent en particulier Lagrange, Monge ou Fourier — une série de problèmes qui remettent en cause l'image d'une analyse centrée sur les fonctions-formules.

Premièrement, des problèmes se posent même si l'on se restreint à l'intervalle $[0, L]$. Par exemple, l'idée qu'une somme — même infinie — de fonctions régulières (par exemple : de classe C^{∞}) puisse représenter une fonction affine par morceaux ayant des points singuliers (*cf.* cas 2) n'est guère compatible avec l'image de l'analyse au XVIII^e^ siècle. Les incertitudes de chacun des auteurs et les controverses au sein du collectif sont alimentées par l'absence de certitude mathématique, puisqu'un socle de connaissances partagées sur ces questions de convergence des séries trigonométrique ne commence à s'établir qu'à partir des années 1820. Encore cette lecture est-elle partiellement anachronique, puisqu'elle lit dans le signe « $=$ » de la formule T une égalité numérique (pour chaque x), reposant elle-même sur une notion de limite. On peut avoir — et on a au XVIII^e^ siècle — d'autres lectures de la notion d'égalité ou de « représentation » d'une fonction par une formule.

Deuxièmement, en partant d'une courbe donnée sur $[0, L]$ — même une courbe « continue » représentant une fonction-formule unique et simple (*cf.* cas 3) — son prolongement à $\mathbb{R}$ par imparité et périodicité conduit à une courbe dont on peut douter qu'elle soit « continue ». Le problème disparaîtrait si l'on ne considérait sur $[0, L]$ que les restrictions des fonctions-formules impaires et périodiques sur $\mathbb{R}$ (comme les combinaisons linéaires de $sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, avec n entier), mais cette prudente restriction ne semble répondre à aucune réelle nécessité mathématique ou physique.

Troisièmement, la notion eulérienne de courbe « discontinue » permet certes de rendre compatible le point de vue fonction-formule avec la prise en compte de fonctions obtenues, par exemple, par le prolongement par imparité et périodicité du cas 3 : sur différents intervalles, différentes formules. Par contre, la possibilité de représenter la totalité de la courbe, sur $\mathbb{R}$, par une seule expression (par exemple la formule T) pose problème à Euler. Premièrement, elle montre le caractère incertain de la distinction entre fonction continue et discontinue (une seule formule ou plusieurs selon les intervalles). Deuxièmement, Euler ne peut croire que deux fonctions coïncidant sur tout l'intervalle $[0, L]$ (ici le polynôme $x(L-x)$) et une série trigonométrique) puissent ne pas coïncider sur tout $\mathbb{R}$. Cette coïncidence suggère aussi que la distinction entre fonctions algébriques et transcendantes n'est pas solide.

Signalons en passant qu'on n'a pas besoin d'aller jusqu'aux séries trigonométriques pour souligner les difficultés de l'identification d'une fonction à une formule. Le peu de solidité de la notion eulérienne de courbe continue est par exemple souligné par Cauchy en 1844 dans un petit *Mémoire sur les fonctions continues* (Cauchy, 1893). Cauchy y donne l'exemple d'une fonction affine par morceaux — celle que nous appelons aujourd'hui « valeur absolue » — justiciable de la seule formule $\sqrt{x^2}$. *« Ainsi, le caractère de continuité dans les fonctions, envisagé sous le point de vue auquel se sont d'abord arrêtés les géomètres* [*i.e.* les mathématiciens]*, est un caractère vague et indéterminé »*, conclut Cauchy (1893, p. 146).

En dézoomant, on voit que ces controverses font évoluer l'image que les mathématiciens se font de l'analyse, et ce de plusieurs manières : en obligeant à considérer des fonctions de types plus variés que celles envisagées dans le volume I de l'*Introductio* (fonctions algébriques, transcendantes usuelles) ; en soulignant le caractère incertain d'une classification des fonctions en « espèces » selon les types de formules par lesquelles elles sont données ; en commençant à problématiser la question des domaines d'étude ou de validité de relations entre fonctions. Rétrospectivement, on peut trouver ces incursions dans le monde des fonctions *« bizarres »* (Volkert, 1987 ; Chorlay, 2016) bien timides : l'évocation de courbes librement tracées à la main, même si elle accompagne l'extension du sens donné par Euler au mot fonction de 1748 à 1755, ne joue guère qu'un rôle symbolique ; on peut bien les évoquer, on n'a rien à en dire au sein des mathématiques. Dans les recherches sur les équations aux dérivées partielles — dont la querelle des cordes vibrante n'est qu'un épisode — Euler et ses successeurs n'étendent leurs travaux qu'aux fonctions affines par morceaux ou un peu au-delà. À titre d'échantillon illustrant ce point, la figure 2 reproduit une planche du texte d'Arbogast (1759-1803) intitulé *Sur la nature des fonctions arbitraires*. Ce mémoire répond à la mise au concours de cette question par l'*Académie de Sciences de Saint Pétersbourg*, et emporte le prix. Le fait que cette académie ait mis au concours en 1791 la question des fonctions arbitraires traduit une évolution de l'image de l'analyse : une telle question n'aurait pas été envisagée cinquante ans plus tôt ; les réponses auraient été autrement plus variées cinquante ans plus tard (qu'on pense à la fonction de Dirichlet).

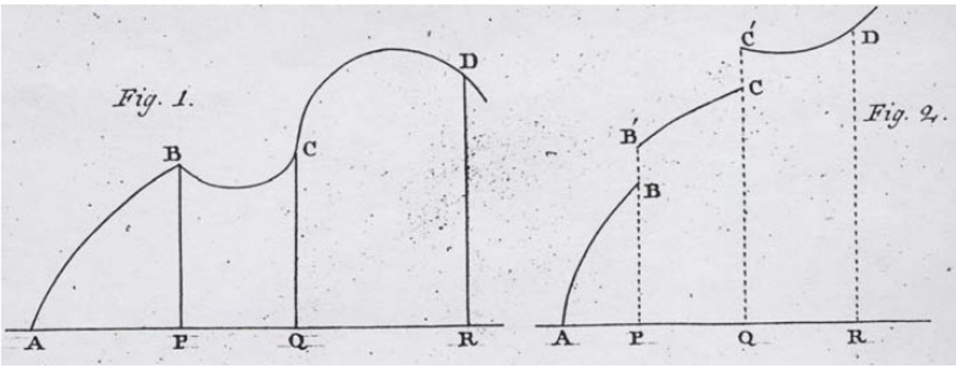


Figure 2 *: Planche du texte d'Arbogast Sur la nature des fonctions arbitraires (reproduite dans Thiele (2005, p. 127)).*

On retrouve ici combien l'espace d'exemples contribue à caractériser l'image qu'une institution se fait d'un concept (fonction) ou d'un domaine mathématique (l'analyse) au moins autant que le font les explications ou définitions des termes en jeu. Le dossier historique rencontré dans cette section suggère une autre composante de cette image, consistant en des croyances partagées — mais plus ou moins implicites — portant sur les objets du domaine, leur comportement et leurs propriétés. Par exemple : croire que deux formules définissant des fonctions sur tout $\mathbb{R}$ ne peuvent coïncider sur un intervalle de longueur non nulle sans coïncider sur tout $\mathbb{R}$; ou qu'une somme infinie de fonction régulières ne saurait représenter qu'une fonction régulière. Du point de vue théorique, on peut regarder ces croyances et ces attentes comme une contrepartie épistémologique de la notion psychologique de théorème en acte (Vergnaud, 1990). Historiens et sociologues des sciences le savent bien, l'étude des controverses est l'un des moyens privilégiés pour observer l'explicitation de telles croyances partagées mais implicites.

2.4. Des contextes internes aux mathématiques motivent une notion de fonction différente de la nôtre : la fonction multiforme

La section précédente montrait un mouvement vers une notion de fonction plus proche de la nôtre (fonction-correspondance plutôt que fonction-formule) se dessinant dans un cadre de physique mathématique et dans un certain flou — faute de résultats mathématiques reconnus par tous et vidant les polémiques. Par contraste, la *controverse des logarithmes* porte sur une question de mathématiques pures, à laquelle Euler apporte une réponse que l'on considère comme rigoureuse, et qui conduit à légitimer les fonctions multiformes dans les mathématiques savantes, chez Euler et pour plus d'un siècle. Un aperçu sur ce dossier historique permet aussi d'évoquer rapidement la naissance de l'analyse complexe qui, avec la théorie des séries de

Fourier (on l'a vu plus haut avec Dirichlet), contribue au renouvellement de l'analyse au XIXe siècle ; d'un renouvellement qui redessine, entre autres, le sens du mot « fonction ».

Il s'agit de savoir comment le logarithme, supposé connu sur ce que nous nommons $\mathbb{R}^{+*}$, peut être étendu aux valeurs négatives, voire complexes, de la variable. Dans les années 1710, un échange épistolaire sur cette question avait fait émerger des solutions différentes chez Leibniz et chez Jean Bernoulli. Dans les années 1740, la même question et un même désaccord opposent deux nouveaux protagonistes, Euler et d'Alembert, au moment où l'échange entre les mathématiciens de la génération précédente fait l'objet d'une publication. Euler fait paraître en 1751 un mémoire intitulé *De la controverse entre Mrs Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* (Euler, 1751), dans lequel il présente de manière assez pédagogique les arguments des deux premiers protagonistes, puis apporte une solution qui lui semble mettre fin aux débats. Le texte est un trompe-l'œil, puisqu'il s'adresse en fait à d'Alembert sans jamais le citer, et mêle sans le dire les arguments des deux générations. Soulignons que, si le *Mémoire* paraît en 1751, une première version est présentée à l'*Académie de Berlin* en 1747, un an avant la publication de l'*Introductio*.

Premier point à souligner, la « *dispute* » nait ici au sein des mathématiques pures et non dans la modélisation des phénomènes naturels via la physique mathématique. Euler souligne ce contraste dès l'introduction :

> *Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie que les vérités qu'elle renferme semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Géométrie, les Mathématiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.* […] *bien que leurs sentiments* [ceux des mathématiciens] *puissent être fort différents sur des questions qui regardent la Mathématique appliquée* […] *on a toujours prétendu que les parties pures de la Mathématique étaient entièrement délivrées de tout sujet de dispute, et qu'il ne s'y trouvait rien dont on ne fût en état de démontrer la vérité ou la fausseté* (Euler, 1751, p. 195).

Dans un second temps, Euler résume les arguments attribués à Leibniz et à Bernoulli, et les réfutations que l'un oppose aux arguments de l'autre. Nous invitons le lecteur intéressé à lire ce mémoire passionnant et rédigé en français, et à consulter des travaux sur cette question (Verley, 1981 ; Gilain, 2008). En un mot, Bernoulli propose de prolonger le logarithme sur $\mathbb{R}^{*}$ par parité, avec donc $\ell(-x)=\ell(x)$ (ℓ désignant un logarithme népérien, qu'Euler appelle « *hyperbolique* »). Cette solution a l'avantage, par exemple, de faire du logarithme étendu une primitive de la fonction inverse sur tout $\mathbb{R}^{*}$. Elle est aussi cohérente avec l'extension aux réels (non nuls) des propriétés algébriques du logarithme ordinaire : $\ell((-x)^2)=2\,\ell(-x)=l(x^2)=2\,\ell(x)$, d'où $\ell(-x)=\ell(x)$. Leibniz considère que le logarithme d'un négatif ne saurait être un nombre réel. Donnons un seul de ses arguments : la proposition de Bernoulli conduirait à $\ell(-1)=0$, ce qui, si le logarithme étendu demeurait réciproque de l'exponentielle, conduirait à $-1=e^0$, ce qui est incompatible, par exemple, avec le développement en série de l'exponentielle. Tous ces arguments sont mathématiquement justes. Si l'on prend un peu de recul, on voit qu'il s'agit ici d'un enjeu de principe de permanence. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, le logarithme usuel possède plusieurs propriétés bien différentes mais toutes caractéristiques : réciproque de l'exponentielle, primitive de la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction inverse s'annulant en 1, fonction[18] qui transforme les produits en somme. Selon la propriété que l'on prend comme guide on construit des prolongements différents sur $\mathbb{R}^{-*}$.

[18] Non identiquement nulle.

Euler propose un *« dénouement des difficultés précédentes »* (Euler, 1751, p. 209) et la solution qu'il avance pour vider le scandale d'une incertitude au cœur des mathématiques pures l'éloigne cependant de la notion actuelle de fonctions. En effet, sa solution à la fois s'appuie et renforce le rôle des fonctions multiformes dans les mathématiques.

En termes contemporains : Euler définit le logarithme étendu à ce que nous nommons $\mathbb{C}^*$ comme la réciproque de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ (elle-même définissable par sa série entière). L'exponentielle n'étant pas injective, sa « réciproque » est multivoque. La démarche d'Euler est plus contournée mais conduit à un résultat plus explicite. Euler commence d'abord, à titre heuristique, à montrer que la multivocité de la racine n-ième dans le domaine complexe (hormis 0, chaque nombre a deux racines carrées, trois racines cubiques…) conduit à celle du logarithme. Si deux nombres x et y sont liés par la relation $x=e^y$, alors (par définition du logarithme pour Euler) $y=\ell(x)$. Mais la relation $x=e^y$ est regardée comme limite des relations $x=\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Or, pour chaque n, à chaque étape, $y=x^{\frac{1}{n}}-n$, chacune de ses expressions pouvant prendre n valeurs. À la limite, à chaque x correspond une infinité de y.

Il donne ensuite un autre raisonnement, que l'on peut considérer comme plus démonstratif. Partant du fait que chaque nombre « *imaginaire* » non nul peut s'écrire sous la forme $x=a+ib$ (avec a et b réels non tous deux nuls), il montre qu'en introduisant le nombre réel $c=\sqrt{aa+bb}$, on peut trouver au moins un nombre réel φ vérifiant les conditions $\begin{cases} \cos\varphi=\frac{a}{c} \\ \sin\varphi=\frac{b}{c} \end{cases}$ (système ♣).

On a alors $x=a+ib=c(\cos\varphi+i\sin\varphi)=c\,e^{i\varphi}$

où l'égalité $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ est connue, par exemple, d'après les développements en série entière des trois fonctions. En supposant que le logarithme est réciproque de l'exponentielle et transforme les produits en sommes, il vient $\ell(x)=\ell(c\,e^{i\varphi})=\ell(c)+i\varphi$. Le système ♣ admettant une infinité de solutions différant les unes des autres d'un multiple entier relatif de 2π, le membre de droite de cette dernière égalité recouvre une infinité de valeurs. Euler les écrit presque comme nous (Euler, 1751, p. 220) : en posant $C=\ell(c)$,

$$C+\varphi\sqrt{-1},\quad C+(\varphi\pm2\pi)\sqrt{-1},\quad C+(\varphi\pm4\pi)\sqrt{-1},\quad C+(\varphi\pm6\pi)\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Soulignons que cette définition du logarithme dans $\mathbb{C}^*$ est toujours présente dans l'analyse complexe savante du XXIe siècle. On la retrouve d'ailleurs au lycée dans l'unique fonction multiforme qu'on y rencontre, la fonction *argument*, qui n'est autre que la partie imaginaire du logarithme complexe.

3. Domaine de définition, multiformité, cadre ensembliste : des stabilisations (partielles) au XXᵉ siècle

3.1. Point de départ : Un cours d'analyse de 1912

Pour faire pendant à la partie 2, dans laquelle nous présentions assez en détail *une* introduction de la notion de fonction au XVIIIᵉ siècle — celle d'Euler, dans les premières pages de son *Introductio* (vol. I) —, nous proposons de mesurer le chemin parcouru en lisant son équivalent fonctionnel dans un cours universitaire d'analyse du début du XXᵉ siècle (Osgood, 1912). Son auteur, William Fogg Osgood (1864-1943) est un mathématicien étasunien ayant fait une partie de ses études en Allemagne et gardant des contacts scientifiques avec elle. L'un des piliers de la jeune *American Mathematical Society*, il fut un spécialiste reconnu de l'analyse complexe des deux côtés de l'Atlantique. Sa profonde connaissance des mathématiques de son temps et un talent d'exposition lui confèrent un rôle dans la stabilisation d'une image des mathématiques savantes dans laquelle la notion de fonction se rapproche de la notion de référence décrite en introduction. En particulier, nos travaux d'histoire (Chorlay, 2008, 2011) ont montré son rôle dans l'explicitation de la différence entre « local » et « global », et, plus généralement, dans la mise en avant systématique des domaines. La promotion conceptuelle des domaines va de pair avec de nouvelles normes d'écriture des mathématiques : on ne peut définir une fonction sans se donner — outre une règle de correspondance — un domaine de définition ; énoncer une propriété d'une fonction sans préciser sur quel domaine on la considère est un défaut de rédaction, source de confusions. Lisons les premières pages de son cours d'analyse (Osgood, 1912) :

> *§1. Notion* [Begriff] *de fonction*
>
> *Depuis Dirichlet, on dit que f(x) est une fonction de x lorsque, à toute valeur de x dans un intervalle donné $a \leqslant x \leqslant b$, une valeur f(x) est associée selon une loi déterminée* [ein bestimmtes Gesetzt]. *Dans ce qui suit, nous supposons que les valeurs de x et f(x) sont réelles ([4]).*
>
> > *[([4]) : C'est la totalité des couples (x,y) qui constitue le véritable substrat du concept de fonction et, en fait, on peut la regarder comme la fonction elle-même. On obtient ainsi un équivalent arithmétique de la courbe représentative de la fonction. Mais dès qu'on commence à opérer avec la fonction (pour calculer sa dérivée, ou pour établir une équation fonctionnelle qu'elle vérifie), le symbole f(x) désigne le second nombre du couple (x,y), celui qu'on appelle variable dépendante. En particulier, dans une formule, f(x) a le plus souvent ce second sens. Néanmoins, f(x) est à prendre au premier sens lorsque nous parlons d'une fonction continue, ou, pour les fonctions complexes d'une variable complexe, d'une fonction analytique monogène au sens de Weierstrass].*
>
> *En analyse élémentaire, ces associations sont le plus souvent données par des formules, par exemple*
>
> $$f(x) = a^2 - x^2 \qquad -\infty < x < \infty$$
>
> $$f(x) = \sqrt{x} \qquad 0 < x < \infty$$
>
> $$f(x) = \log \sin x \qquad 2n\pi < x < (2n+1)\pi \qquad ([1])$$
>
> > *[([1]) : Dans ce cas, la fonction est définie non dans un intervalle, mais dans plusieurs intervalles disjoints. Il en va de même pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x \neq 0$].*
>
> *Mais la notion de fonction ne dépend en rien de la possibilité d'une telle représentation, comme on le voit dans les exemples suivants :*

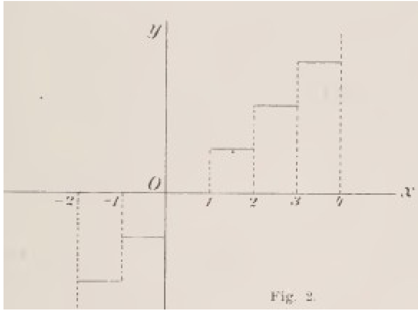
a) Dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 2$, *soit*

$f(x) = ax$ *si* $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$f(x) = 2a - ax$ *si* $1 \leqslant x \leqslant 2$.

En dehors de cet intervalle, la fonction n'est pas déclarée [erklärt], *donc elle n'y existe pas.*

b) Dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, *posons f(x) égal au plus grand nombre entier qui ne dépasse pas x (Fig. 2).*



c) Dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, *soit*

$f(x) = 0$ *si x est un nombre rationnel,*

$f(x) = 1$ *si x est un nombre irrationnel.*

La notion de fonction englobe les cas où le domaine des valeurs que peut prendre x n'est pas constitué d'une succession continue, mais est un ensemble de points quelconque. Par exemple, on peut regarder n!, où n désigne un nombre entier naturel, comme une fonction de n.

[…] *Enfin, on peut associer à tout point d'un intervalle (ou d'un domaine) non seulement une mais plusieurs valeurs ; même si, dans la pratique, on peut souvent les rassembler pour se ramener à une suite de fonctions uniformes. Par exemple :*

$$f(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

[…] *Nous devons à nouveau souligner une différentielle essentielle entre la notion de fonction en analyse élémentaire* [niedere Analysis] *et dans la théorie moderne des fonctions* [moderne Funktionentheorie]. *Dans la première* […] *on a coutume de partir d'une formule particulière pour seulement ensuite déterminer l'intervalle ou le domaine dans lequel la fonction est définie. En revanche, dans la seconde, c'est pour ainsi dire le domaine de définition* [Definitionsbereich] *que l'on place en tête : en premier vient l'espace* [Spielraum] *dans lequel évolue la variable indépendante, ensuite vient la loi selon laquelle des valeurs sont attribuées aux points de ce domaine.*

***Document 2** : Premières pages de Osgood (1912, pp. 1-3)*
(extraits ; traduction de R. Chorlay).

À partir de ce cours d'Osgood, nous pouvons dézoomer pour discuter deux points importants quant à l'évolution du concept de fonction, dans les mathématiques savantes et un peu au-delà.

3.2. Le domaine de définition vient « en tête »

Même si la distinction entre fonction et formule est encore présente, c'est le rôle donné au domaine de définition comme élément *constitutif* de la notion de fonction qui est le thème central de cette première section du premier chapitre du cours d'analyse d'Osgood (1912). Il est souligné dans le paragraphe final, dans lequel Osgood signale qu'il s'agit là d'un point de vue « moderne ». Il est l'un des deux fils rouges présidant à la série des exemples.

En reprenant l'approche par les *example spaces*, on peut dire que cette série joue sur trois dimensions de variations. La première dimension est le mode de donation de la « loi déterminée » ; selon cette dimension, la plage des valeurs explorée comprend trois valeurs : loi donnée par une formule, loi donnée par plusieurs formules (exemple *a*), loi qui n'est pas donnée par une formule (exemples *b* et *c*). Osgood joue ensuite sur la continuité, en introduisant dès la 2e page du traité des fonctions discontinues en des points isolés (exemple *b*) ou partout (exemple *c*). Il le fait d'ailleurs sans encore mentionner la continuité, qui sera introduite quelques pages plus loin. Enfin, Osgood joue la dimension « domaine de définition », en parcourant les valeurs : intervalles (fermés et bornés, demi-droite réelle fermée, droite réelle), union finie ou infinie d'intervalles disjoints, cas discret (cas particulier du précédent) avec le domaine $\mathbb{N}$.

Les dimensions de variations s'entrecroisent pour illustrer le point de vue « moderne ». Par exemple, les deux formules de l'exemple *a* permettraient aussi bien de définir une fonction affine par morceaux sur tout $\mathbb{R}$, avec un changement de formule en $x=1$. Certes, mais ces mêmes formules définiraient une *autre* fonction. Et, face à une formule donnée, rien n'oblige à lui associer une fonction en l'étudiant sur son domaine maximal de validité ; Osgood met les points sur les « i » : *« En dehors de cet intervalle la fonction n'est pas déclarée* [erklärt]*, donc elle n'y existe pas »* (Osgood, 1912, p. 2). Qu'on puisse *décider* de ne pas considérer la valeur de $10-x$ en $x=5$, voilà qui aurait suscité la perplexité des mathématiciens des générations précédentes ! On observe ici une troisième vague de disjonction entre fonction et formule : non seulement une fonction n'a pas à être donnée par une formule (cette idée est presque aussi ancienne que le mot « fonction ») ; non seulement on peut définir une fonction avec des formules différentes pour différentes plages de valeurs de la variable (thème discuté en XVIIIe siècle) ; mais une même formule définit différentes fonctions selon les domaines de définitions choisis. Osgood donne l'exemple de $\frac{1}{x}$, qui définit des fonctions différentes sur $\mathbb{R}^-$ et sur $0<x<1$ (voir ci-dessous). Pas plus que les deux premières, cette troisième disjonction ne constitue une « découverte mathématique » ni une « vérité » ou un « fait mathématique », il s'agit plutôt d'un choix conventionnel de délimitation des notions mathématiques élémentaires à partir desquelles exposer l'ensemble de l'analyse. Conventionnel ne signifie pas arbitraire, au contraire. On peut montrer que ce choix reflète le regard de certains auteurs de la génération d'Osgood sur les mathématiques les plus avancées, en particulier la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, dont Osgood est doublement spécialiste, comme chercheur et comme auteur d'une synthèse de référence (Chorlay, 2007, 2011). Son exposé didactique comprend d'ailleurs de discrets clins d'œil aux deux contextes de recherche ayant conduit à remodeler la notion de fonction au XIXe siècle, lorsqu'Osgood cite Dirichlet (séries de Fourier, fonctions pathologiques) et Weierstrass pour l'analyse complexe (avec une allusion au problème du prolongement analytique).

Un petit détour devrait contribuer à montrer le caractère tardif de cette promotion des domaines comme éléments définitoires. Quelques pages après l'exposé introductif sur la notion de fonction, Osgood définit les notions de limite et de continuité. En cela, il suit complètement le modèle d'exposition des cours d'analyse inspirés de Weierstrass qui apparaissent dès les années 1870. Il énonce ensuite une série de théorèmes alors bien connus :

> *Si f(x) est continue dans un intervalle, on ne peut conclure que f(x) est finie* [bornée]*, comme le montre l'exemple :*
>
> $$f(x)=\frac{1}{x},\ 0<x<1$$
>
> *Mais si nous demandons en outre que l'intervalle soit fermé, c'est-à-dire soit fini et contienne ses extrémités, il en va autrement.*
>
> *Proposition. Si f(x) est continue dans l'intervalle fermé $a\leqslant x\leqslant b$, alors f(x) est finie* [bornée] *dans cet intervalle*[19]*.*

[19] Nous nous sommes permis de corriger une faute de frappe (corrigée dans les éditions ultérieures de l'ouvrage). En 1912, l'intervalle est décrit par les inégalités strictes $a<x<b$.

> […] *Si f(x) est une fonction quelconque, il n'est pas nécessaire que, dans un intervalle où elle est définie, elle prenne une valeur maximale ou une minimale ; et ce même si f(x) est continue dans l'intervalle en question, comme le montre l'exemple :*
>
> $$f(x)=2x+3,\ 0<x<1$$
>
> (Osgood, 1912, p. 13 ; notre traduction).

Osgood fait comprendre le sens du théorème qu'il énonce en illustrant par des exemples le rôle des hypothèses. Ici, il ne prend pas même la peine d'illustrer le rôle de l'hypothèse de continuité. Dans ses deux exemples la fonction est continue : c'est sur la dimension « nature du domaine » qu'il dirige l'attention du lecteur. Dans ce cadre, il aurait pu jouer sur un large gamme de possibilités (par exemple en prenant le cas d'une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ mais non bornée), mais il ne prend que des domaines connexes et bornés, pour faire spécifiquement sentir la différence entre intervalle ouvert et intervalle fermé.

Comparons avec le début du *Mémoire sur les fonctions discontinues* que Gaston Darboux (1842-1917) publie en 1875. Il y introduit en France l'analyse « à la » Weierstrass, et produit des résultats nouveaux dans ce cadre inhabituel aux mathématiciens français. Ce sont moins ces résultats qui nous intéressent que les premières pages dans lequel Darboux (1875) illustre sur des cas simples ce qu'est, pour lui, la bonne manière de parler des fonctions et de leurs propriétés. Les théorèmes garantissant que des fonctions sont, sous certaines hypothèses, bornées, voire admettent un maximum et un minimum (*i.e.* les bornes sont atteintes) ne font pas alors partie, en France, d'un exposé standard des premières notions d'analyse. Dans son exposé, Darboux souligne le rôle de l'hypothèse de continuité ainsi que l'importance qu'il y a à distinguer un maximum d'une simple borne supérieure ; mais il ne joue *pas* sur la dimension « nature du domaine » (en particulier sur la distinction entre intervalle ouvert et intervalle fermé). Ainsi, là où Osgood montrait qu'une fonction continue peut être majorée sans avoir de maximum en jouant sur le domaine ($0<x<1$), Darboux n'illustre la différence entre borne supérieure et maximum qu'en jouant sur la continuité :

> *Par exemple, la fonction*
>
> $$y=x,\ \text{pour } x \text{ différent de } 1,$$
> $$y=0,\ \text{pour } x=1,$$
>
> *a 1 pour limite maximum* [borne supérieure] *quand x varie de 0 à 1 ; elle ne devient jamais égale à 1* (Darboux, 1875, p. 61).

Notons qu'aucun domaine de définition n'a été précisé, même si la propriété en jeu demande qu'on ne considère le comportement que *« quand x varie de 0 à 1 »*.

3.3. D'une explication en extension à une définition dans un cadre ensembliste

Comme parfois chez Osgood (1912), les discussions conceptuelles fondamentales sont dans les notes de bas de page. Ainsi, après avoir évoqué assez vaguement une notion de fonction attribuée à Dirichlet, c'est en note *infra* 4 qu'il donne ce qui ressemble à une définition ensembliste. Ici, la notion de fonction ne renvoie plus seulement à une *idée* de « correspondance » ou de « loi », idées non définies mathématiquement. Une fonction est un objet mathématique bien défini : un ensemble de couples d'objets ; d'objets d'une nature connue (ici des nombres réels, mais on voit que cette limitation n'a rien d'essentiel). Osgood qualifie cette caractérisation d'« arithmétique » au sens où les composantes du couple sont des nombres, donc dans le sens où Felix Klein a pu parler d'arithmétisation de l'analyse.

Nous ne pouvons assurer qu'Osgood est le premier à présenter la chose ainsi, mais il est certain que ce n'est pas standard en 1912. Pour faire jouer le contraste, citons une autre présentation de la notion de fonction datant de la génération précédente, qui est aussi celle de Darboux (1875). Élève de Weierstrass, du Bois-Reymond (1831-1889) publie en 1875 un article portant sur les propriétés typiquement explorées dans le paradigme weierstrassien de l'analyse réelle élémentaire, de la propriété la moins contraignante à la plus forte : intégrabilité, continuité, dérivabilité. Seule nous importe la première page dans laquelle, avant d'introduire la moindre propriété, l'auteur explique ce qu'est une fonction « sans propriété », ou *« sur laquelle on ne fait aucune hypothèse »* (*die voraussetzungslose Function*) :

> *La fonction mathématique, lorsqu'elle n'est soumise à aucune restriction, est semblable à une table de logarithmes idéale*[20]*, au moyen de laquelle, pour chaque valeur numérique donnée aux variables indépendantes, correspond une valeur ou plusieurs valeurs quelconques de la fonction* […]. *Aucune ligne du tableau n'a d'influence sur les autres ; autrement dit, chaque valeur dans la colonne des valeurs fonctionnelles existe pour elle-même et peut être modifiée, sans que la colonne ne cesse de représenter une fonction mathématique*[21].
>
> *Le concept mathématique de fonction ne comprend rien de plus et rien de moins. Il est ainsi épuisé* (du Bois Reymond, 1875, pp. 21-22, notre traduction).

On est encore dans les variations sur le thème de l'arbitraire. Aux évocations déjà classiques d'une courbe librement tracée à la main (image évoquant la continuité), du Bois-Reymond (1875) ajoute la référence à des objets mathématiques bien connus des générations n'ayant pas disposé de moyens de calcul électronique, les tableaux de valeurs (tables de logarithmes, tables trigonométriques). L'auteur demeure plus près de Lejeune-Dirichlet (1837) que d'Osgood : son but n'est pas de montrer le rôle du domaine (non évoqué explicitement) mais de souligner le fait que la correspondance peut être quelconque. Là où Dirichlet s'exprimait en termes d'intervalles — la donnée de la fonction sur un intervalle ne préjuge pas de ses valeurs ailleurs — du Bois-Reymond descend jusqu'au niveau du point.

La définition qu'on trouvait chez Osgood d'une fonction comme ensemble de couples soumis à certaines contraintes se retrouve chez Bourbaki (1954) par exemple, dans le *livre I de la Théorie des ensembles* (Bourbaki, 1954, pp. 71-76). Après avoir défini le produit cartésien de deux ensembles, l'auteur y définit la notion de *« correspondance entre un ensemble A et un ensemble B »* (toute partie du produit $A \times B$, A s'appelant alors l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée), puis la classe spécifique des fonctions, c'est-à-dire des correspondances pour lesquelles à chaque élément de l'ensemble de départ correspond un (condition d'existence) et un seul (condition d'unicité) élément de l'ensemble d'arrivée. Deux différences avec la présentation d'Osgood sont à noter. Premièrement, là où Bourbaki utilise un signe graphique isolé pour désigner une fonction (disons : *f*) et distingue ainsi l'objet *f* et l'objet *f(x)*, Osgood n'utilisait que les symboles du type *f(x)*, tout en soulignant la dualité de sens : objet fonctionnel *f* (par exemple pour énoncer : « *f* admet un maximum ») ou élément générique de l'ensemble d'arrivée (par exemple, pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour énoncer : « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ est un entier »). Deuxièmement, les fonctions chez Osgood peuvent être multiformes, ce qui est exclu par définition chez Bourbaki. Chronologiquement, la condition d'existence (donc la notion d'ensemble de définition comme élément constitutif de la définition d'un ensemble) précède la condition d'unicité de l'image.

[20] Au sens de *«* [par opposition à *réel*] *Qui a une existence intellectuelle* […] *Synon. Asbtrait, idéel, théorique ».* Source : Trésor de la Langue Française informatisé (consulté le 5/9/2024).

[21] Le tableau de valeur est disposé verticalement : une colonne à gauche pour la variable indépendante, une colonne à droite pour la variable dépendante ou fonction.

Les codifications savantes de Bourbaki offrent à la fois un cadre théorique — une théorie des ensembles — au sein duquel énoncer une définition de la notion de fonction (et pas seulement une explication) ainsi que des outils syntaxiques pour lever certaines ambiguïtés — ainsi entre f et $f(x)$. Cela n'efface en rien la variété des points de vue possibles sur la notion de fonction. On dispose d'outils conceptuels et syntaxiques pour dire la variété des points de vue, voire pour expliciter des tensions qui demeurent. Les notions d'abus de langage ou de tâche scolaire permettent d'étiqueter ces tensions. Illustrons ces deux points.

Le lien entre fonction et formule tout comme l'obligation de déclaration du domaine de définition ont pu faire l'objet de réflexions et de changements chez Bourbaki. Ainsi, dans une version de travail que Dieudonné (1906-1992) rédige pour l*e Fascicule de résultats* de 1939, on peut lire : *« Par abus de langage, on désigne parfois l'application elle-même par le symbole de sa valeur ; on dira par exemple « la fonction $x+1$ » au lieu de « la fonction $x \to x+1$ »[22] »*. Ce passage disparaîtra dans la version publiée.

Par un amusant retournement, signalons qu'en 1939 comme en 1954, le premier exemple de fonction donné par Bourbaki est celui d'une fonction constante (Bourbaki, 1939, p. 8). C'est justement le cas qui entrait mal dans le cadre d'une introduction de la notion via l'opposition entre grandeurs variables et constantes.

Pour le second point, qu'on nous permette de clore le dossier documentaire historique en quittant la sphère savante à laquelle nous nous restreignions jusqu'ici, pour illustrer la persistance de tensions dans la sphère scolaire. À l'apogée des « mathématiques modernes », la tension entre d'une part exposition savante, et d'autre part pratiques de résolution de problèmes conduisant à l'étude de formules sous un angle fonctionnel ou à la recherche de modélisations fonctionnelles demeure. Par exemple, en 1970, cette tension est explicitée à l'attention des enseignants de lycée dans une annexe du programme intitulée *Commentaire pour les programmes de mathématiques de la classe de Seconde*. Ici, la tension n'est plus dite en termes d'abus de langage, mais rappelant l'ambiguïté du mot « fonction » et la pertinence de certaines tâches scolaires :

> ***Applications.*** *– Le programme n'a pas fait de place à l'étude méthodique des correspondances quelconques entre deux ensembles.* […] *Le mot d'*application *a, en mathématiques, un sens très précis : dans une application de l'ensemble de départ A vers l'ensemble d'arrivée B,* tout *élément de A a une image et une seule dans B. Le sens du mot* fonction *est moins assuré : pour certains, fonction et application sont synonymes ; pour d'autre, la correspondance définie par la fonction f de l'ensemble A vers l'ensemble B est telle que tout élément de A a* au plus *une image dans B ; l'ensemble des éléments de A qui ont une image est l'*ensemble de définition *de la fonction, noté parfois* déf *f ; par f est ainsi définie une application de* déf *f vers B ; c'est assurément l'étude de cette dernière application qui présente, en définitive, un intérêt majeur.*
>
> *Toutefois, il n'est pas sans intérêt, dans un sens scolaire, de mettre* a priori *les élèves en présence d'expressions comportant des symboles (fractions, radicaux, ...) et de leur faire rappeler avec précision les conditions de validité des symboles utilisés ; cette recherche d'un ensemble de définition,* préalable *à l'étude de l'application revient à établir les conditions dans lesquelles une relation a été antérieurement rendue fonctionnelle par son auteur. Dans l'étude même de l'application, cet ensemble maximal de définition dans* $\mathbb{R}$ *peut subir, en outre, des restrictions liées à la nature du problème* (MEN, 1970, p. 36).

Ce flottement dans l'acception du mot « fonction » tient bien entendu au caractère conventionnel des définitions. Le sens a d'ailleurs varié aussi chez Bourbaki lui-même, puisque dans autre version de travail du *Fascicule de résultat* de 1939, Delsarte (1903-1968) appelait « application »

[22] Source : https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/redactions (consulté le 9/9/2024).

ce que le programme de 1970 appelle « fonction » et réciproquement : « *Considérons maintenant une fonction* $\xi = f(x)$ *définie seulement sur une partie P de A, et prenant ses valeurs dans B. Une telle fonction est dite une application dans B*[23] *».* Ici encore, la distinction disparait dans le fascicule publié.

4. Perspectives didactiques

Nous voudrions, dans cette dernière section, prolonger les quelques éléments théoriques esquissés au fil du parcours du dossier documentaire. Un autre choix aurait pu être fait, qui aurait cherché à dégager des pistes plus pratiques pour l'enseignement des fonctions ou la formation des enseignants. Gageons que ces pistes sont apparues : pour qui chercherait des arguments et des leviers pour dépasser l'identification naïve entre fonction et formule ; pour construire des séries d'exemples jouant sur plusieurs dimensions, en particulier la dimension « domaine » ; ou pour introduire des exemples frontières, tel celui des fonctions constantes, qui invitent à se détacher d'une image des fonctions trop liée à la notion de formule ou à celle de co-variations.

4.1. La notion de fonction, un concept FUG ?

Le caractère indéniablement unificateur de la notion de fonction — et ce dès les exposés « didactiques » d'Euler — invite à se demander s'il relève de la catégorie des concepts formalisateurs-unificateurs-généralisateurs, à l'exemple du concept abstrait d'espace vectoriel (Robert, 1998 ; Dorier, 2000). Le dossier historique suggère une réponse nuancée, ce qui, loin d'illustrer l'inadéquation de la notion de concept FUG, montre son pouvoir heuristique dans l'analyse du relief épistémologique des notions fondamentales ou avancées en mathématiques.

Sous la plume d'Euler, en 1748, le terme fonction est utilisé d'emblée, sinon pour décrire l'objet propre de l'analyse, du moins pour exposer son projet spécifique. Il est un élément central d'un nouveau mode d'exposition qui unifie des recherches menées depuis un demi-siècle en calcul différentiel et intégral ainsi qu'en physique mathématique. Il permet de parler d'une manière générale d'objets divers, allant des plus familiers (polynômes, fonctions circulaires) jusqu'à une infinité d'autres encore à venir.

L'évolution de la notion montre aussi d'autres aspects FUG. En particulier le fait que, aussi élémentaire que puisse sembler la notion — décrite en quelques lignes dans les premières pages des traités d'analyse — ce sont des dynamiques au sein de recherches les plus pointues qui conduisent à la faire évoluer. Ainsi, si dès le départ une notion de « correspondance arbitraire » élargit la description de ce qu'on entend par fonction bien au-delà de la fonction-formule, ce qu'on met sous les termes d'« arbitraire » ou de « quelconque » évolue dans le cadre de recherches de pointe : résolution d'équations aux dérivées partielles par des séries trigonométriques, recherche de conditions d'intégrabilité de fonctions non continues, pour ne citer que les cas rencontrés dans notre dossier. De même, la prise en compte progressive des domaines (de définition ou d'étude) reflète sous forme de petites contraintes d'écriture (ne pas dire sur quel domaine on énonce une propriété fonctionnelle, c'est mal rédiger) des progrès dans le corpus des connaissance savantes (topologie ensembliste, topologie algébrique), eux-mêmes motivés par l'étude des séries trigonométriques ou des fonctions d'une variable complexe (Chorlay, 2007). On retrouve l'un des défis classiques dans l'enseignement des notions FUG : les raisons qui ont conduit à faire évoluer la notion de fonction et à lui conférer un rôle central dans les mathématiques ne peuvent se dire en une phrase, ni émerger dans la confrontation avec

[23] Source : https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/redactions (consulté le 9/9/2024).

un problème bien choisi ou une situation bien conçue. Le dossier historique montre aussi le caractère conventionnel de la notion de fonction : les conditions d'existence et d'unicité de l'image n'ont rien de « naturel », et les mathématiciens ont travaillé pendant un siècle et demi avec des fonctions multiformes étudiées sur des domaines parfois mal décrits (faute d'une théorie d'appui offrant concepts et registres sémiotiques) et implicitement supposés maximaux.

Toutefois, le « F » de formalisateur cadre moins bien que le « U » et le « G ». Même si la structure syntaxique à deux places « $f(x)$ » est présente dès Euler et demeure ensuite, l'analyse mathématique a pu avancer pendant un siècle et demi sans que les mathématiciens aient eu besoin de dépasser le stade des descriptions rhétoriques et assez vagues de ce qu'est f : correspondance, loi (mais loi arbitraire !), quelque chose comme une courbe, ou, plus généralement, comme un tableau de valeurs. Du Bois-Reymond (1875) l'écrit on ne peut plus clairement : de la fonction « en général », il n'y a rien à dire ; mais c'est à partir de cet objet sans propriétés que l'on peut organiser la description de ceux qui en ont (Chorlay, 2015). Au XX[e] siècle, un point de vue statique sur les objets de l'analyse (comme chez Osgood (1912) dans sa note infrapaginale n°4) puis une théorie d'appui comme la théorie des ensembles offrent un cadre et un formalisme permettant une définition de la fonction générale comme objet mathématique et non plus comme simple idée permettant de faire des mathématiques.

Soulignons que cet écart entre la formalisation, dans le cadre d'une théorie d'appui, de notions générales dont les cas particuliers sont bien définis et étudiés depuis longtemps n'est pas spécifique ni à la notion de fonction, ni même peut-être aux notions présentant des caractères FUG. Par exemple, la notion de nombre premier est bien définie chez Euclide (vers -300), mais elle repose sur une notion de nombre entier qui ne reçoit de définition qu'à la fin du XIX[e] siècle, par exemple chez Peano (1858-1932).

4.2. Image d'un concept ou d'une discipline : échos entre histoire et didactique

L'analyse des épisodes du passé sélectionnés dans cet article a permis d'illustrer la pertinence d'une notion d'« image » (image d'une notion, d'une branche de mathématiques, des mathématiques dans leur ensemble), à l'articulation entre l'histoire et l'épistémologie. Il peut être intéressant de la rapprocher de la notion didactique de « *concept image* », issue des travaux de David Tall et très utilisée depuis longtemps dans la littérature didactique anglo-saxonne (Tall & Vinner, 1981). « Rapprocher » ne signifie pas « identifier », et les écarts sont aussi importants que les échos.

Partant d'un point de vue de psychologue, Tall introduit la notion d'« image » d'un concept (*concept image*) pour la distinguer de celle, mathématique, de « définition » d'un concept (*concept definition*). Citons Tall :

> *We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kind, changing as the individual meets new stimuli and matures* (Tall & Vinner, 1981, p. 152).

Tall joue d'ailleurs dès le départ sur deux niveaux, en distinguant d'une part une « *structure cognitive* » individuelle (*personnal concept image*), d'autre part une image plus officielle, partagée par la communauté des mathématiciens ; cette dernière ne peut cependant pas être assimilée à une structure cognitive. Si l'on s'en tient à la notion individuelle, l'image s'avère être dépendante non seulement de l'individu (à un moment donné de son parcours d'apprentissage) mais aussi de la tâche déclenchant son activité. Elle peut englober des éléments mathématiquement corrects comme incorrects, faisant ainsi place aux classiques *misconceptions* (*e.g.*, toute augmentation se modélise par une addition ; la distance entre une suite convergente et sa limite finit par être décroissante ; la fonction inverse est discontinue). Elle est plus ou moins implicite, plus ou moins structurée (et des approches psychologiques comme APOS ou l'approche par champ conceptuels fournissent des outils pour étudier cette structure), et peut comprendre des éléments contradictoires. Classiquement, placer l'élève devant un dissensus ou une contradiction, soit entre deux éléments de son image d'un concept, soit entre son image du concept et un échantillon de mathématiques qui lui est incompatible, est vu comme un levier de conceptualisation privilégié.

Les échos sont nombreux avec notre dossier historique, nous les avons soulignés au fil des pages. Le parcours nous a amené à préciser certains éléments structurant l'image d'un concept ou d'une branche des mathématiques portée par des instances (auteurs, communauté savante, institution d'enseignement), sans que l'on ait besoin de psychologiser l'étude historique. En particulier, nous avons vu combien les définitions — ou, faute de théorie d'appui, les explications — peuvent jouer un rôle mineur dans la structuration et l'évolution de l'image de la notion de la fonction ou de l'analyse mathématique. Deux concepts issus de la didactique nous semblent pouvoir contribuer à la fois à préciser la notion d'image d'un concept et à faire circuler questions et connaissances entre histoire et didactique. Le premier, issu de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), est celui de théorème-en-acte : les actions des acteurs révèlent et mettent à l'épreuve du réel des croyances et des attentes qu'ils ont vis-à-vis des objets d'un domaine. Nous avons illustré ce point dans les aperçus sur la controverse des cordes vibrantes[24]. Le second concept, issu d'une didactique ancrée dans l'épistémologie plus que dans la psychologie, est celle d'espace d'exemples. La description d'un tel espace — selon ses dimensions puis selon les plages de variations effectivement parcourues au sein d'une dimension — et les classifications des fonctions des exemples (paradigmes, contre-exemples, non exemples, exemples frontières) permettent de structurer le narratif historique par l'identification d'évolutions et de leviers d'évolution.

4.3. Un support pour des interventions de formation inspirées de l'approche *Nature of Science* ?

Nous voudrions terminer en esquissant un rapprochement avec une tradition de recherche en didactique des sciences de la nature, en nous centrant sur les enjeux de formation des enseignants[25]. La littérature gravitant autour du mot-clé « nature de la science » (*Nature of Science* ou *NoS*) pose en particulier la question des liens entre la connaissance qu'ont les enseignants de l'histoire et de la philosophie de leur science, leur conceptions/image de la science, et pratiques effectives d'enseignement. Nous limiterons notre aperçu aux travaux d'abd-el-Khalick (2000a, 2000b, 2013).

Cet auteur s'appuie sur une vaste littérature portant *sur* les sciences pour en tirer des maximes relatives à la nature de la science, faisant l'hypothèse qu'à un certain niveau de généralité ces travaux convergent :

> *The phrase « nature of science » typically refers to the epistemology of science, science as a way of knowing, or the values and beliefs inherent to the development of scientific knowledge (Lederman,*

---

[24] Le cadre de cet article ne permet pas de dépasser le stade de l'allusion — d'une allusion adossée à une étude de cas.

[25] Cette tradition de recherche étudie d'autres aspects : liens entre connaissances des enseignants sur la nature de la science et pratiques d'enseignements effectives ; lien entre les activités des élèves en classe de science et leur conception/image de la science.

> *1992). Beyond these general characterizations, philosophers of science, historians of science, sociologists of science, scientists, and science educators are quick to disagree on a specific definition for NoS (Abd-El-Khalick* et al.*, 1998 ; Losee, 1993).* […] *Moreover, despite continuing disagreements about a specific definition for NoS, at a certain level of generality and within a certain period of time, there is a « shared wisdom » about NoS* (abd-el-Khalick & Lederman, 2000b, pp. 1062-1063).

Donnons quelques exemples de telles maximes, chacune rattachée à un thème, et relevant de connaissances épistémologiques : les sciences de la nature ne procèdent pas par observation puis induction, c'est dans le cadre d'une théorie déjà-là que se formulent les questions et se définissent les observables (thème de la *theory-ladenness of observation*) ; un fait contredisant une théorie ne conduit pas en général à son abandon (thème de la sous-détermination de la théorie par l'expérience) ; la production de connaissances scientifique est un processus intrinsèquement collectif, sous des formes variées allant de la controverse scientifique à la validation par publication dans des revues où les papiers sont examinés par les pairs et à l'aveugle (thème : *science as social knowledge*).

Les travaux empiriques d'abd-el-Khalick sur les connaissances NoS des enseignants de sciences et sur l'impact de différentes modalités de formations ont mis au jour un certain nombre de phénomènes. Premièrement, la large prévalence de conceptions « naïves » ou pauvres de la nature de la science chez les étudiants du supérieur et les enseignants du secondaire. Deuxièmement, le fait que, même pour les enseignants dont les conceptions se rapprochent des conceptions de référence, cela ne peut avoir d'impact dans leurs pratiques d'enseignement que s'ils peuvent illustrer les maximes générales par des exemples :

> […] *what needs to be emphasized is that teaching about NoS requires science teachers to have more than a rudimentary or superficial knowledge and understanding of various aspects of NoS. Those teachers should be able to comfortably discourse about* […] *and contextualize their teaching about NoS with some examples or « stories » from history of science. For instance, it is not enough for teachers to « know » that scientific knowledge is socially and culturally embedded. They should be able to use examples and/or simplified case histories from scientific practice to substantiate this claim and make it accessible and understandable to students* (abd-el-Khalick & Lederman, 2000a, p. 693).

Troisièmement, ces travaux montrent le faible impact de formations ne laissant pas de place à des moments spécifique consacrés aux enjeux NoS. Un simple enseignement par analogie (placer les apprenants dans une situation ayant des caractéristiques d'une démarche scientifique la plus « authentique » possible) ou un enseignement consacré à l'histoire des sciences (même évoquant des controverses) font peu évoluer les conceptions épistémologiques — des tests avant-après en témoignent — si l'on ne ménage pas de moments de retour réflexif, d'identification des thèmes et d'explicitation des maximes[26].

Vus depuis la didactique des mathématiques, ces travaux peuvent légitimement susciter à la fois intérêt et perplexité. Perplexité quant à la possibilité de constituer un savoir de référence consensuel pour peu qu'on se place à un niveau de généralité suffisant. Perplexité quant au contenu d'éventuelles maximes concernant les mathématiques, dont on voit qu'elles ne recouperaient sans doute quasiment pas celles relatives aux sciences de la nature. Perplexité quant aux enjeux d'enseignement : le contexte de la recherche didactique sur NOS est celui de programmes en sciences de la nature qui, depuis longtemps et dans de nombreux pays, fixent à l'enseignement des objectifs *explicites* de transmission aux élèves de connaissances sur ce qu'est

[26] Pour un travail récent sur ces questions, nous renvoyons à la thèse d'Anne Boulais (2023).

la science[27]. Ces injonctions institutionnelles ne nous semblent pas aussi explicites en mathématiques.

Nous avons cependant souhaité prendre le risque de nous prêter au jeu, en petite dimension. Il ne s'agit pas ici de *produire* des *connaissances* épistémologiques mais de se demander quel aspect un peu général peut être illustré (« *exemplified* » et « *contextualized* » pour reprendre les termes d'abd-el-Khalick) par des éléments du dossier historique.

- la dimension collective de la construction du savoir scientifique : illustration par les controverses (cordes vibrantes, logarithmes des imaginaires) ;
- la multiplicité des leviers d'évolution des mathématiques : sources externes (modélisation de phénomènes physiques) et sources internes (prolongement du logarithme au-delà de $\mathbb{R}^{+*}$, recherche de conditions minimales d'intégrabilité) ;
- les définitions de certains objets mathématiques sont en partie conventionnelles : par exemple les conditions d'existence et d'unicité de l'image dans la définition de « fonction ». Conventionnel ne signifie par arbitraire, et la préférence pour une définition plutôt qu'une autre peut faire l'objet d'une argumentation ;
- le développement des connaissances mathématiques procède autant par *enrichissements* successifs que par des *corrections* successives qui *remplaceraient* des idées fausses par des idées (plus) justes. Ainsi, la notion statique et ensembliste de fonction comme ensemble de couples ne fait pas disparaître — ni dans les études ni dans les mathématiques savantes — les points de vue « modélisation de la dépendance entre grandeurs » (que ces grandeurs soient issues des mathématiques ou des sciences) ou « point de vue fonctionnel sur les formules ».

Pour des exemples de propositions d'intervention didactique en classe sur la notion de fonction appuyées sur l'histoire des mathématiques et conceptualisées dans des cadres NoS ou *commognition*, nous invitons le lecteur à consulter les travaux de Kjeldsen (2012, 2015) et de ses collègues.

Références bibliographiques

Abd-El-Khalick, F. & Lederman, N. (2000a). Improving science teachers' conceptions of nature of science: a critical review of the literature. *International Journal of Science Education, 22*(7), 665-701.

Abd-El-Khalick, F. & Lederman, N. (2000b). The Influence of History of Science Courses on Students' Views of Nature of Science. *Journal of Research in Science Teaching, 37*(10), 1057-1095.

Abd-El-Khalick, F. (2013). Teaching With and About Nature of Science, and Science Teacher Knowledge Domains. *Science & Education, 22*, 2087-2107.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M. A. & Zaslavsky, O. (éds.) (2011). Examples in mathematical thinking and learning from an educational perspective. *ZDM - Mathematics Education, 43*(2).

[27] Le lecteur français pourra, par exemple, se reporter au programme d'enseignement scientifique en classe de première générale de 2019.

Artigue, M. & Deledicq, A. (1992). Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : Quelques commentaires épistémologiques et didactiques. *Cahier de DIDIREM n° 15*. IREM de Paris.

du Bois-Reymond, P (1875). Versuch einer Classification der wilkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 79*, 21-37.

Boulais, A. (2023). *Un apport de l'histoire des sciences pour l'enseignement des phénomènes liés à la pression*. [Thèse de doctorat, Université Paris Cité].

Borel, É. (1972). Notice sur les travaux scientifiques. dans *Œuvres d'Émile Borel, tome I* (pp. 119-190). Éditions du CNRS.

Bourbaki, N. (1939). *Théorie des ensembles - fascicule de résultats*. Hermann.

Bourbaki, N. (1954). *Théorie des ensembles, livre I*. Hermann.

Cauchy, A.-L. (1893). *Œuvres complètes, 1re série, vol. VIII*. Gauthiers-Villars.

Chorlay, R. (2007). *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*. [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].

Chorlay, R. (2011). "Local - Global": The First Twenty Years. *Archive for History of Exact Sciences, 65*(1), 1-66.

Chorlay, R. (2016). Questions of Generality as Probes into 19th Century Analysis. Dans K. Chemla, R. Chorlay & D. Rabouin (éds.), *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences* (pp. 385-410). Oxford University Press.

Chorlay, R. & de Hosson, C. (2016). History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research. Dans B. Hodgson, A. Kuzniak & J.-B. Lagrange (éds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue* (pp. 155-189). Springer International Publishing Switzerland.

Corry, L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*. Springer.

Dahan, A. & Bottazzini, U. (éds.) (2001). *Changing Images of Mathematics in History. From the French Revolution to the new Millenium*. Harwood Academic Publishers.

Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'E.N.S., 5* (2e série), 57-112.

Dhombres, J. (1988). Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 1re série, tome 9*, 23-68.

Dorier, J.-L. (éd.). (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publisher.

Euler, L. (1748a). *Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus*. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

Euler, L. (1748b). *Introductio in analysin infinitorum, Tomus secundus*. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.

Euler, L. (1751). De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Histoires de l'Académie de Berlin 1749* (pp. 139-179), = Opera, Serie I, vol. 17, pp. 195-232.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. Berolini & Academiae imperialis scientiarum.

Euler, L. (1796a). *Introduction à l'analyse infinitésimale par Leonhard Euler, tome premier. (traduction et notes de J.B. Labey)*. Chez Barrois.

Euler, L. (1796b). *Introduction à l'analyse infinitésimale par Leonhard Euler, tome second. (traduction et notes de J.B. Labey)*. Chez Barrois.

Gilain, C. (2008). Euler, d'Alembert et la controverse sur les logarithmes. *Quaderni della Accademia delle Scienze di Torino, 16*, 43-60.

Goldberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Grattan-Guinness, I. (éd.) (1980). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. Princeton University Press.

Gray, J. (1986). *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. Brikhäuser.

Kjeldsen, T. H. & Blomhoj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.

Kjeldsen, T. H. & Lützen, J. (2015). Interactions Between Mathematics and Physics: The History of the Concept of Function - Teaching With and About Nature of Mathematics. *Science & Education, 24*, 543-559.

Lagrange, J.-L. (1813) *Théorie des fonctions analytiques (nouvelle édition revue et augmentée par l'auteur)*. Courcier.

Lejeune-Dirichlet, G. (1829). Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4*, 157-169.

Lejeune-Dirichlet, G. ([1837] 1889-1897). Ueber die Darstellung ganz wilkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Dans L. Kronecker & I. L. Fuchs (éd.), *G. Lejeune Dirichlet's Werke, Bd. I* (pp. 133-160). G. Reimer.

Lützen, J. (1983). Euler's vision of a general partial differential calculus for a generalized kind of function. *Mathematics Magazine, 56*(5), 299-306.

Mason, J. & Watson, A. (2008). Mathematics as a constructive activity: Exploiting dimensions of possible variations. Dans M. Carlson & C. Rasmussen (éds.), *Making the connection. Research in teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 191-204). Mathematical Association of America.

Osgood, W. F. (1912). *Lehrbuch der Funktionentheorie (2te Auflage)*. B. G. Teubner.

Panza, M. (2003). *Newton*. Les Belles Lettres.

Ravetz, J. R. (1961). Vibrating strings and arbitrary functions. Dans *The Logic of Personal Knowledge: Essays Presented to Michael Polanyi on his 70th Birthday* (pp. 71-88). Routledge.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Rolland, A., & Chorlay, R. (à paraître). Expectations regarding French prospective teachers' knowledge in group theory - A historical survey. *Colloque HPM 2024*. UNSW, Sydney, 1-5/7/2024.

Tall, D, & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*(2), 151-169.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Verley, L.-L. (1981). La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Dans *Fragments d'histoire des mathématiques. Brochure APMEP 41*,121-140.

Thiele, R. (2005). The Mathematics and Science of Leonhard Euler (1707-1783). Dans G. Van Brummelen & M. Kinyon (éds), *Mathematics and the Historian's Craft* (pp. 81-140). CMS Books in Mathematics. Springer.

Volkert, K. (1987). Die Geschichte der pathologischen Funktionen - Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie. *Archive for History of Exact Sciences, 73*(1), 193-232.

Weyl, H. (1927). *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. R. Oldenburg.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. Dans *Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP 41*, 7-68.

MEN (1970). Commentaires pour les programmes de mathématiques des classes de seconde (arrêté du 3 juillet 1969). *Brochure n°59*. Institut Pédagogique National.