

Fondements de l'analyse (1) : selon Cauchy

Sources et références :

[31] Jean Dieudonné (sous la direction de) *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Hermann, nouveau tirage 1996.

En particulier les chapitres *Les fonctions analytiques* (J.-L. Verley) et *Fondements de l'analyse* (P. Dugac)

[32] A. Youschkevitch *Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle* (trad. J.-M. Bellemin), Bulletin de l'APMEP n°42, 1986.

[33] Leonard Euler *Introduction à l'analyse infinitésimale* (2 volumes, trad. du latin par J.B. Labey), 1853. Première édition latine du volume I : 1748.

[34] J. L. Lagrange *Théorie des fonctions analytiques*, Imprimerie de la République, Prairial an V.

[35] A. L. Cauchy *Cours d'analyse à l'Ecole royale Polytechnique : Analyse algébrique*, in Œuvres Complètes vol. 15 (ou : 2^{ème} série, tome 3), Gauthier-Villars 1882-1974. Edition originale 1821.

[36] A. L. Cauchy *Résumé des leçons données à l'Ecole royale Polytechnique sur le Calcul infinitésimal* in Œuvres Complètes vol. 16 (ou : 2^{ème} série, tome 4), Gauthier-Villars 1882-1974. Edition originale 1829.

[37] A. L. Cauchy *Equations différentielles ordinaires (Cours inédit)*, introduction de C. Gilain, Etudes Vivantes, 1981.

[33] en ligne sur *internet archive*, [34]-[36] en ligne sur *Gallica*.

L'introduction à l'analyse infinitésimale selon Euler (1748)

*Chapitre premier. Des fonctions en général.*¹

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*

Tels sont les nombres de toute espèce, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premières lettres de l'alphabet *a, b, c, &c.* A la vérité, dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que les quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'Alphabet, & celles qui ne le sont pas, par les dernières ; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie ; on y envisage les quantités sous un tout autre aspect particulier, les unes étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

¹ Extraits de [33], vol.1, chapitre 1.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espèce à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernières lettres de l'Alphabet $z, y, x, \&c.$

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manières, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi, une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z . Par exemple, $a+3z$; $az-4zz$; $az + b\sqrt{aa-zz}$; cz ; &c, sont des fonctions de z .

5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{9-zz}$ ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mette des nombres réels à la place de z ; cependant, en introduisant pour z des nombres imaginaires, tels que $5\sqrt{-1}$, il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule $\sqrt{9-zz}$. Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont des fonctions apparentes ; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elle conserve toujours la même valeur, comme z^0 ; $1z$; $\frac{aa-az}{a-z}$. Ces fonctions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. *La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison des variables et des quantités constantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction ; la Multiplication & la Division ; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendentes : comme les exponentielles, les logarithmes, & d'autres sans nombre, que le Calcul fait connaître. (...)

7. *Les fonctions se divisent en algébrique & transcendentes ; les premières sont formées des opérations algébriques seulement, & les dernières supposent pour leur formation des opérations transcendentes.*

(...) Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement ; telle serait la fonction Z de z , si elle était exprimée par l'équation $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Car quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, & que par conséquent Z est une fonction quelconque de z . (...)

8. *Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dans les dernières la variable est affectée de radicaux, & dans les premières elle n'en est point affectée. (...)*

Celles-ci [les fonctions irrationnelles] se divisent commodément en explicites & en implicites.

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entières & en fractionnaires. (...)*

10. *Il faut enfin remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z . La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles soit entières, soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes (...); mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguïté des signes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a aussi parmi les fonctions transcendentes des fonctions uniformes et multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes ; tel serait l'arc de cercle qui répondrait au sinus z , car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus. (...)

Chapitre IV. Du développement des fonctions en séries infinies.

59. La formule $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\&c$, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z ; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. (...) & si quelqu'un doutait qu'elle [une fonction non entière] pût être exprimée par une telle série d'un nombre infini de termes, le développement même de chaque fonction ne lui laissera aucun doute ; mais pour plus de généralité, outre les puissances de z , qui ont des exposants positifs et entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi il ne restera aucun doute (...).

*Introduction à l'analyse infinitésimale. Livre second, contenant la théorie des lignes courbes, avec un traité abrégé des surfaces.*²

Chapitre premier. Des lignes courbes en général.

Une quantité variable étant une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées ; une droite indéfinie, telle que RS , sera très-propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature.

² [33] vol.2, extraits de pages 1-4.

(...) Puisqu'une ligne droite indéfinie est propre à représenter une quantité variable x , cherchons à présent une manière très commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x . Soit y cette fonction de x ; (...) Ayant pris une droite indéfinie RAS pour représenter les valeurs de x , il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x , élever sur cette ligne une perpendiculaire PM , égale à la valeur correspondante de y ;

(...) Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble; nous les considérons ici principalement comme le résultat des fonctions; cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul. Ainsi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il suit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes.

(...) De cette idée des lignes courbes découle naturellement leur division en *continues*, & en *discontinues* ou *mixtes*. La ligne courbe continue est celle dont la nature est exprimée par une seule fonction déterminée de x . Mais, si la ligne courbe est composée de différentes portions BM , MD , DM , &c. déterminées par plusieurs fonctions de x (...) nous appellerons ces sortes de lignes courbes *discontinues*, ou *mixtes & irrégulières*, parce qu'elles ne sont pas formés suivant une seule loi constante, & qu'elles sont composées de portions de différentes courbes continues.

Fonder l'analyse : la proposition de Lagrange (an 5)

*Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toutes considérations d'infiniment petit ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*³

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x , nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f , ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

³ [34] p.1-3.

de cette variable ; comme x^2 ou $a + bx$ ou &c., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x , $f(x^2)$, $f(a + bx)$, &c. désigneront des fonctions de x^2 , de $a + bx$, &c.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y , nous écrivons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrions employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x . Si à la place de x on met $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x + i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$, dans laquelle les quantités $p, q, r, \&c.$, coefficients des puissances de i , seront de nouvelles fonctions de x , dérivées de la fonction primitive fx , et indépendantes de la quantité i .

Il est clair que la forme des fonctions $p, q, r, \&c.$ dépendra uniquement de celle de la fonction fx ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i .

4. Cette manière de déduire d'une fonction donnée d'autres fonctions dérivées et dépendant essentiellement de la fonction primitive, est de la plus grande importance dans l'analyse. La formation et le calcul de ces différentes fonctions sont à proprement parler le véritable objet des nouveaux calculs, c'est-à-dire du calcul appelé *différentiel*, ou *fluxionnel*. Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, *Leibnitz*, les *Bernoulli*, *l'Hopital*, &c. l'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver

par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, *Euler*, d'*Alembert*, &c. ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles; et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies, ou indéfinies.

Mais il faut avouer que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et sur-tout pour être présentée aux commençans;

Les cours de Cauchy à l'École Royale Polytechnique

L'introduction à l'*Analyse algébrique* (1821)⁴

QUELQUES personnes, qui ont bien voulu guider mes premiers pas dans la carrière des sciences, et parmi lesquelles je citerai avec reconnaissance MM. *Laplace* et *Poisson*, ayant témoigné le désir de me voir publier le Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, je me suis décidé à mettre ce Cours par écrit pour la plus grande utilité des élèves. J'en offre ici la première partie connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, et dans laquelle je traite successivement des diverses espèces de fon-

ctions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. En parlant de la continuité des fonctions, je n'ai pu me dispenser de faire connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites, propriétés qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, j'ai présenté des développemens qui peuvent être utiles soit aux Professeurs et aux Élèves des Collèges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout

⁴ Le cursus d'analyse à l'X comprenait trois cours : analyse algébrique [35], puis calcul différentiel et intégral (analyse infinitésimale [36]), puis équations différentielles.

Dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier

je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

Au reste, si j'ai cherché, d'une part, à perfectionner l'analyse mathématique, de l'autre, je suis loin de prétendre que cette analyse doive suffire à toutes les sciences de raisonnement. Sans doute, dans les sciences qu'on nomme naturelles, la seule

par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'une série divergente n'a pas de somme; dans le chapitre VII, qu'une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles; dans le chapitre IX, que, si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires, la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse; &c. Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront,

méthode qu'on puisse employer avec succès consiste à observer les faits et à soumettre ensuite les observations au calcul. Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques, ou dans le témoignage des sens; et quoique personne jusqu'à ce jour n'ait essayé de prouver par l'analyse l'existence d'Auguste ou celle de Louis XIV, tout homme sensé conviendra que cette existence est aussi certaine pour lui que le carré de l'hypothénuse ou le théorème de *Maclaurin*. Je dirai plus; la démonstration de ce dernier théorème est à la portée d'un petit nombre d'esprits, et les savans eux-mêmes ne sont pas tous d'accord sur l'étendue qu'on doit lui attribuer; tandis que tout le monde sait fort bien par qui la France a été gouvernée dans le dix-septième siècle, et qu'il ne peut s'élever à ce sujet aucune contestation raisonnable. Ce que je dis ici

d'un fait historique peut s'appliquer également à une foule de questions, en religion, en morale, en politique. Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine; et n'allions pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral.

Analyse algébrique *Préliminaires* : variable, limite. ⁵

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et l'on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infinitement petit* ou une quantité *infinitement petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞ , s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif*, indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignés conjointement sous le nom de *quantités infinies*.

⁵ [35] p.19

(...)⁶

Par exemple, si l'on suppose que la variable x converge vers zéro, on aura

$$\lim\left(\left(\sin \frac{1}{x}\right)\right) = M((-1, +1)),$$

attendu que l'expression $\lim\left(\left(\sin \frac{1}{x}\right)\right)$ admettra une infinité de valeurs comprises entre les valeurs extrêmes -1 et $+1$.

Analyse algébrique *chapitre 1* : des fonctions réelles⁷

§ I. — *Considérations générales sur les fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$L(x), \sin x, \dots$$

⁶ [35] p.30

⁷ [35] p.31-33

sont des fonctions de la variable x ;

$$x + y, x^y, xyz, \dots$$

des fonctions des variables x et y ou x, y et z, \dots .

Lorsque des fonctions d'une ou de plusieurs variables se trouvent, comme dans les exemples précédents, immédiatement exprimées au moyen de ces mêmes variables, elles sont nommées *fonctions explicites*. Mais, lorsqu'on donne seulement les relations entre les fonctions et les variables, c'est-à-dire les équations auxquelles ces quantités doivent satisfaire, tant que ces équations ne sont pas résolues algébriquement, les fonctions, n'étant pas exprimées immédiatement au moyen des variables, sont appelées *fonctions implicites*. Pour les rendre explicites, il suffit de résoudre, lorsque cela se peut, les équations qui les déterminent. Par exemple, y étant une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$L(y) = x,$$

si l'on nomme A la base du système de logarithmes que l'on considère, la même fonction, devenue explicite par la résolution de l'équation donnée, sera

$$y = A^x.$$

Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variables x, y, z, \dots , sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations

$$f(x), F(x), \varphi(x), \chi(x), \psi(x), \omega(x), \dots,$$

$$f(x, y, z, \dots), F(x, y, z, \dots), \varphi(x, y, z, \dots), \dots$$

Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Quelquefois, pour chaque valeur de la variable, la fonc-

tion donnée en obtient plusieurs différentes les unes des autres. Conformément aux conventions adoptées dans les préliminaires, nous désignerons d'ordinaire ces valeurs multiples d'une fonction par des notations dans lesquelles la variable sera entourée de doubles traits ou de doubles parenthèses. Ainsi, par exemple,

$$\text{arc sin}((x))$$

indiquera un quelconque des arcs qui ont x pour sinus ;

$$\sqrt{x} = \pm \sqrt{x}$$

l'une quelconque des deux racines carrées de la variable x supposé positif, etc.

Analyse algébrique : notion de fonction continue ⁸

§ II. — De la continuité des fonctions.

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en parlant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α , la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x . Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α . En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

⁸ [35] p.43

Analyse algébrique : un théorème relatif aux fonctions continues

Enoncé donné dans le corps du texte ⁹

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X .

Démonstration. — Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe

1° par le point correspondant aux coordonnées x_0 , $f(x_0)$. 2° par le point correspondant aux coordonnées X et $f(X)$, sera continue entre ces deux points; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y = b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la Note III, démontrer le théorème IV par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x) = b.$$

⁹ [35] p.50-51

La « méthode directe et purement analytique » de l'Annexe III

Démonstration. — Soit x_0 la plus petite des deux quantités x_0, X . Faisons

$$X - x_0 = h,$$

et désignons par m un nombre entier quelconque supérieur à l'unité. Comme des deux quantités $f(x_0), f(X)$, l'une est positive, l'autre négative, si l'on forme la suite

$$f(x_0), f\left(x_0 + \frac{h}{m}\right), f\left(x_0 + 2\frac{h}{m}\right), \dots, f\left(X - \frac{h}{m}\right), f(X),$$

et que, dans cette suite, on compare successivement le premier terme avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, etc., on finira nécessairement par trouver une ou plusieurs fois deux termes consécutifs qui seront de signes contraires. Soient

$$f(x_1), f(X')$$

deux termes de cette espèce, x_1 étant la plus petite des deux valeurs correspondantes de x . On aura évidemment

$$x_0 < x_1 < X' < X$$

et

$$X' - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0).$$

Ayant déterminé x_1 et X' comme on vient de le dire, on pourra de même, entre ces deux nouvelles valeurs de x , en placer deux autres x_2, X'' qui, substituées dans $f(x)$, donnent des résultats de signes contraires, et qui soient propres à vérifier les conditions

$$x_1 < x_2 < X'' < X',$$

$$X'' - x_2 = \frac{1}{m}(X' - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0).$$

En continuant ainsi, on obtiendra : 1° une série de valeurs croissantes de x , savoir

$$(2) \quad x_0, x_1, x_2, \dots;$$

2° une série de valeurs décroissantes

$$(3) \quad X, X', X'', \dots,$$

qui, surpassant les premières de quantités respectivement égales aux produits

$$1 \times (X - x_0), \quad \frac{1}{m} \times (X - x_0), \quad \frac{1}{m^2} \times (X - x_0), \quad \dots,$$

finiront par différer de ces premières valeurs aussi peu que l'on voudra. On doit en conclure que les termes généraux des séries (2) et (3) convergeront vers une limite commune. Soit a cette limite. Puisque la fonction $f(x)$ reste continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, les termes généraux des séries suivantes

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, \\ f(X), f(X'), f(X''), \dots$$

convergeront également vers la limite commune $f(a)$; et, comme en s'approchant de cette limite ils resteront toujours de signes contraires, il est clair

que la quantité $f(a)$, nécessairement finie, ne pourra différer de zéro. Par conséquent on vérifiera l'équation

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

en attribuant à la variable x la valeur particulière a comprise entre x_0 et X . En d'autres termes,

$$(4) \quad x = a$$

sera une racine de l'équation (1).

Analyse algébrique : quelques propriétés des séries et séries de fonctions¹⁰

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s ; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n , les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots$$

diffèrent de la limite s , et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= u_n, \\ s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\ s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire

que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n , les différentes sommes

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1}, \\ u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

(...)

¹⁰ [35] p.115-116 et 120.

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n , on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x , dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, r_n \text{ et } s$$

sont encore trois fonctions de la variable x , dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α . L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .*

Résumé des Leçons ... : dérivation ¹¹

Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x , et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

¹¹ [36] p.22-23

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x . Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}i + \dots + i^{m-1},$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1} , c'est-à-dire une nouvelle fonction de la variable x . Il en sera de même en général; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle

fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

Résumé ... : Leçon 21, l'intégrale définie ¹²

Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$, $x = X$, on désigne par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$(1) \quad x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad \dots, \quad X - x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'origine de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment : 1° du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X - x_0$; 2° des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites

¹² [36] extraits des pp. 122-126

et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.

(...je coupe 3 pages de démonstration)

Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x . Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

(...)

d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x , on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre \int , ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$(10) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx, \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x_0 \\ X \end{matrix} \right], \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x = x_0 \\ x = X \end{matrix} \right].$$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par

Résumé .. : Leçon 26, l'intégrale indéfinie ¹³

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^X f(x) dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X , l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x , on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x , qui sera ce qu'on appelle une *intégrale prise à partir de l'origine $x = x_0$* . Soit

$$(1) \quad \mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) (vingt-deuxième

(...)
Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites,

$$(4) \quad \mathcal{F}'(x) = f(x).$$

Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x , a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe \int dans cette intégrale. On

¹³ [36] p. 151-152

La « méthode d'intégration » des équations différentielles du premier ordre¹⁴

Toutes les fois qu'une équation différentielle de la forme

$$(1) \quad dy = f(x,y) dx$$

est intégrable par l'une des méthodes exposées dans les leçons précédentes, on en conclut aisément, comme on l'a fait voir, qu'il est possible d'obtenir, pour l'inconnue y , une fonction de x propre à vérifier cette équation différentielle, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire, y_0 , dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0 . Réciproquement, il sera certain que l'équation (1) est intégrable, et qu'elle admet une intégrale générale comprenant une constante arbitraire, si l'on démontre qu'il existe une valeur générale de y propre à remplir les deux conditions énoncées. Or, on y parvient aisément, dans un grand nombre de cas, à l'aide des principes que nous allons établir.

Concevons que, X étant une nouvelle particulière de x , on désigne par

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

Des quantités intermédiaires entre les limites x_0, X , et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. Supposons, en outre qu'aux quantités

$$(2) \quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X,$$

on fasse correspondre d'autres quantités

$$(3) \quad y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, Y,$$

dont la première soit précisément y_0 , et les suivantes étant déterminées par le moyen des équations

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) \\ y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)f(x_1, y_1) \\ \quad \quad \quad \&c. \\ Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1})f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} .$$

(...)

[dans la suite, on suppose que « pour toutes les valeurs de x renfermées entre les limites x_0, X , la fonction $f(x,y)$ reste continue par rapport aux variables x,y , et demeure comprise entre les limites $\pm A$ (A désignant une quantité positive (...)) » ; même chose pour $\partial f / \partial y$]

3^{ème} théorème. Les mêmes choses étant admises que dans les théorèmes 1^{er} et 2^{ème}, si l'on fait décroître à l'infini les valeurs numériques des éléments de la différence $X-x_0$, la valeur de Y déterminée par l'équation (6) convergera vers une limite qui dépendra uniquement des trois quantités x_0, X , et y_0 .

(...) [si, sous les mêmes hypothèses, on note $y = F(x)$ cette limite] y sera une fonction de x , qui aura la double propriété de se réduire à y_0 pour $x = x_0$, et de vérifier l'équation différentielle $dy = f(x,y) dy$ (...).

¹⁴ [37] extraits de la septième leçon.