$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$k(a+b) = ka + kb$

CALCUL LITTÉRAL

$x^2 = -1$

guillaume.didier@inspe-paris.fr

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Plan du bloc «calcul littéral»

$k(a+b) = ka + kb$

- Tâches liées (relief) au calcul littéral au cycle 4
- Le programme de l'enseignement du calcul littéral au cycle 4
- Les obstacles liés à l'enseignement du calcul littéral
- Situations d'introduction pour le calcul littéral

Séance 1

- Trace écrite de cours
- Aides potentielles pour les élèves
- Classe de problèmes

Séance 2

$x^2 = -1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$k(a+b) = ka + kb$

Liste non exhaustive de documents de référence sur le calcul littéral au cycle 4

Document d'accompagnement du cycle 4 « Utiliser le calcul littéral », Éduscol (2016)

Document d'accompagnement « Du numérique au calcul littéral », Éduscol (2008)

COMBIER.G-PRESSIAT.A-GUILLAUME.J-C Les débuts de l'algèbre au collège. INRP (1996)

COPPÉ.S-GRUGEON.B Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? Actes de la CORFEM 2009

CHAACHOUA.H-FERRATON.G Rapport institutionnel au calcul littéral au collège. État des lieux et perspectives, Petit'x n°91

COPPÉ.S Étude des processus de vérifications mis en œuvre par les élèves, Bulletin APMEP n°411 1997

VLASSIS.J-DEMONTY.I-SQUALLI.H Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs, NCRE vol 20 n°3 (2017)

$x^2 = -1$

Moment de correction

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$k(a+b) = ka + kb$

Consigne 1 :

Dans le cadre d'une formation continue sur le calcul littéral, des professeurs ont été confrontés à la tâche suivante :

Quelle(s) rédaction(s) et quelle(s) justification(s) donneriez-vous en début d'apprentissage à vos élèves lors de la correction de l'exercice « développer puis réduire les expressions $x \times (x+2)$ et $(3-x) \times 5$ » ?

Analyser les productions de ces professeurs.

$x^2 = -1$

Moment de correction

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$x \times (x + 2) = \underline{x \times x} + \underline{x \times 2}$$

$$= x^2 + 2x$$

$$(3 - x) \times 5 = \underline{3 \times 5} - \underline{x \times 5}$$

$$= 15 - 5x$$

$$x^2 = -1$$

Moment de correction

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$k(a+b) = ka + kb$

$$x \times (x + 2)$$

Rédaction

$$x \times (x + 2) = x \times x + x \times 2$$
$$= x^2 + 2x$$

Justifications

$\times$	x	2
x	$x \times x$	$2 \times x$

$$(3 - x) \times 5$$

COMMUTATIVITÉ

Rédaction

$$5 \times (3 - x) = 5 \times 3 + 5 \times (-x)$$
$$= 15 - 5x$$

Justifications

5×3 $\quad$ $5 \times (-x)$

$5 \times (3 - x)$ c'est

$3 - x$
$3 - x$
$3 - x$
$3 - x$
$3 - x$

Moment de correction

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$x^2 = -1$$

$$x \times (x+2)$$

ON POSE

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \times \quad x \\ \hline x^2 + 2x \end{array}$$

$$(3-x) \times 5$$

$$\begin{array}{r} 3 - x \\ \times \quad 5 \\ \hline 15 - 5x \end{array}$$

Moment de correction

	x	$+2$
x	$x \times x = x^2$	$x \times (+2) = +2x$

Donc $x \times (x+2) = x^2 + 2x$

	5
3	$3 \times 5 = 15$
$-x$	$-x \times 5 = -5x$

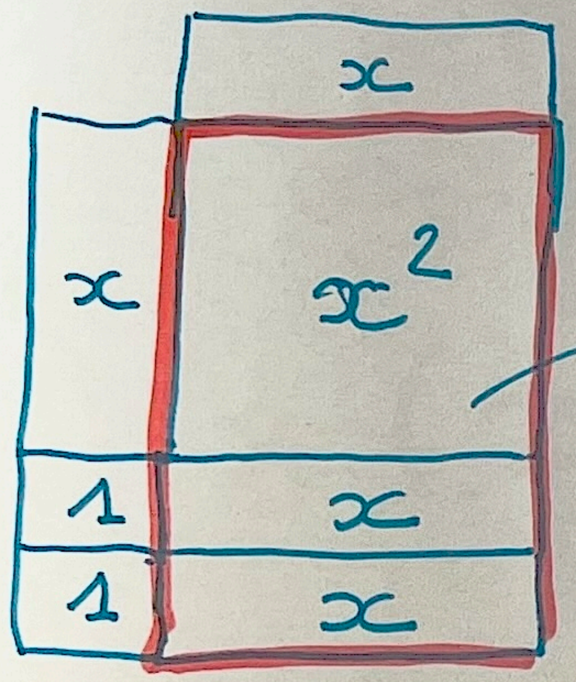
Donc $(3-x) \times 5 = 15 - 5x$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

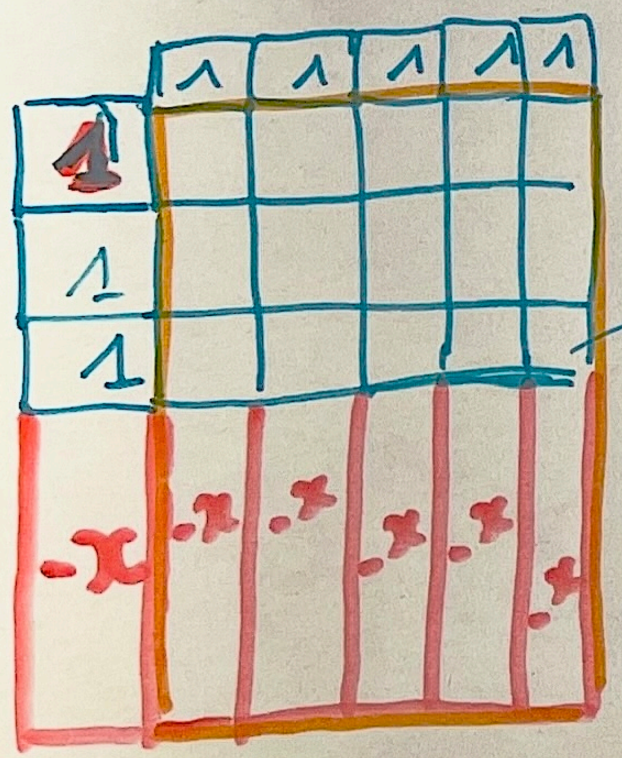
Moment de correction

$k(a+b) = ka + kb$

TUILES ALGEBRIQUES



$\rightarrow x^2 + 2x$



$\rightarrow 15 - 5x$

$$\boxed{x \times}(x + 2) = \boxed{x \times} x + \boxed{x \times}(+2)$$
$$= x^2 + 2x$$

$$(3 - x)\boxed{\times 5} = \boxed{5 \times}(3 - x)$$
$$= \boxed{5 \times} 3 + \boxed{5 \times}(-x)$$
$$= 15 - 5x$$

$x^2 = -1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

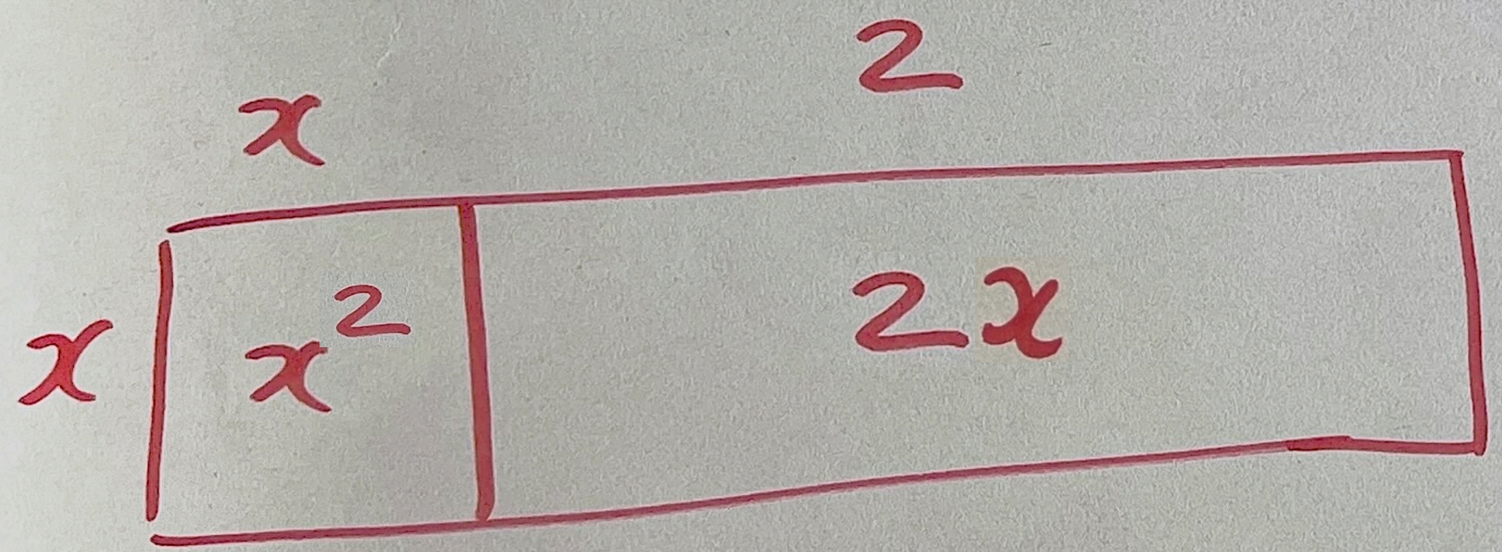
Moment de correction

$k(a+b) = ka + kb$

$x \times (x+2)$

$= x \times x + x \times 2$

$= x^2 + 2x$



$(3-x) \times 5$

$= 5 \times (3-x)$

$= 5 \times 3 - 5 \times x$

$= 15 - 5x$

$(3-x) \times 5$

$= 3 \times 5 - x \times 5$

$= 15 - 5x$

$5 \times (3-x) = (3-x) + \dots + (3-x)$

$x^2 = -1$

Moment de correction

<u>Quelques interrogations sur ces productions :</u>

- L'utilisation d'ostentifs (flèches, couleurs, tableau…) à la place de la propriété de la distributivité est-elle bénéfique ou pénalisante ?
- Le recours à l'addition itérée ne peut s'appliquer que dans des cas particuliers. Avoir plusieurs justifications selon les expressions n'est-il pas source de difficulté ?
- Le recours aux aires ne met pas en jeu la propriété de la distributivité. Cette représentation n'est-elle pas source de difficulté pour la soustraction ?
- Comment doit-on disposer les expressions dans la multiplication posée et le tableau ?
- Cette grande diversité rencontrée durant leur scolarité, contribue-t-elle à aider les élèves ou bien les pénalise-t-elle ?

Sans enseignement de moyen(s) de vérification, comment peut-on espérer que les élèves puissent accéder à l'autonomie en calcul littéral ?

Moyens de vérification

Définition d'un moyen de vérification

« Dans une situation de résolution de problème, pour une question, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat.
Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment là et dans cette situation.
Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification ».

Sylvie COPPÉ (1997)

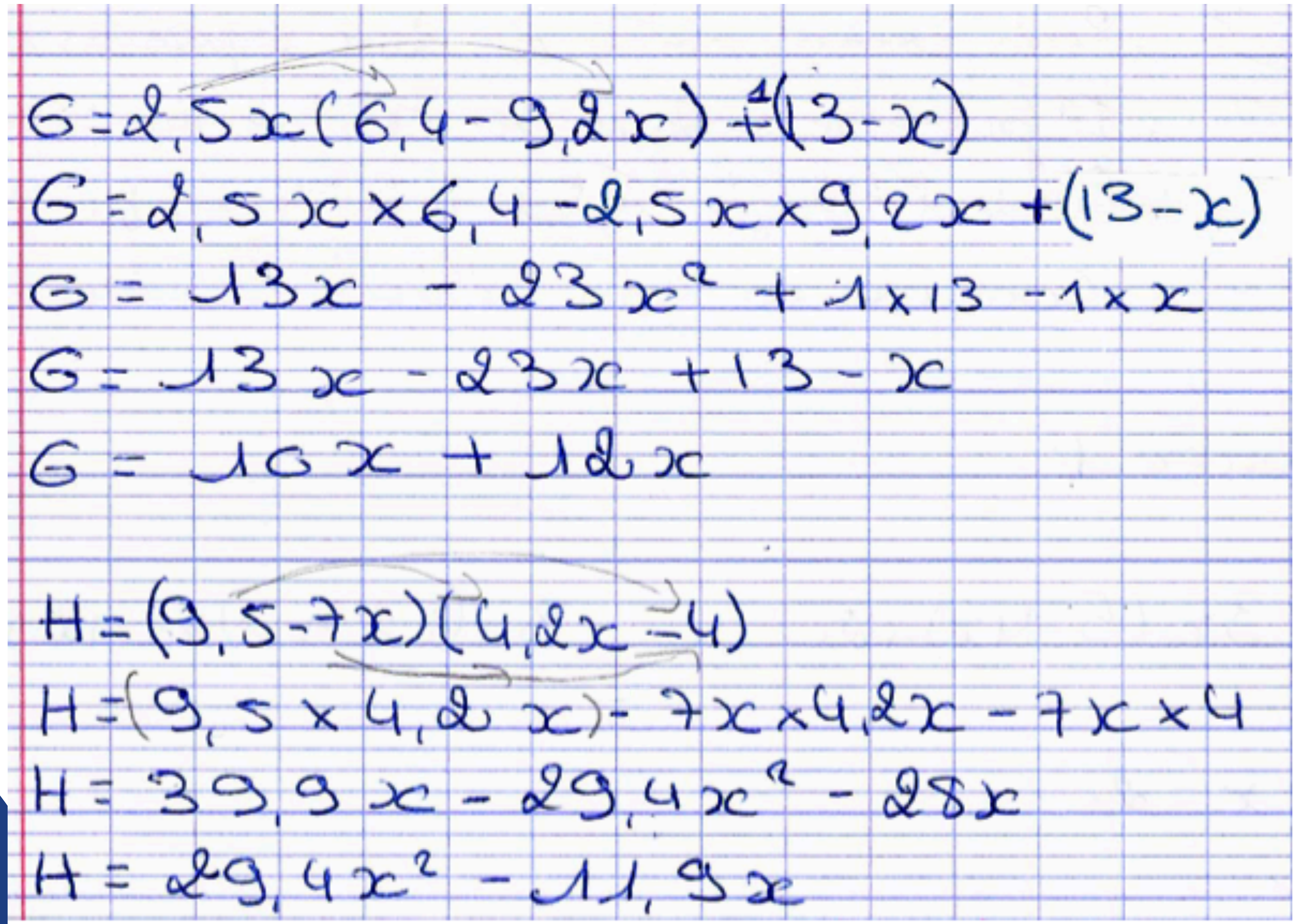
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

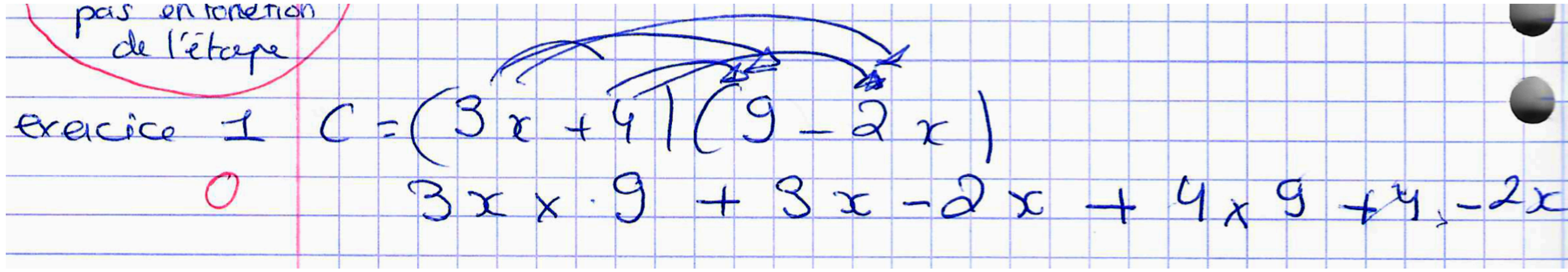
Les flèches peuvent constituer une aide pour mettre en œuvre la propriété de la distributivité mais ne sont pas un moyen de vérification

Voici des copies d'un contrôle de 3e où les élèves ont utilisé des flèches :



$G = 2{,}5x(6{,}4 - 9{,}2x) + 1(13 - x)$
$G = 2{,}5x \times 6{,}4 - 2{,}5x \times 9{,}2x + (13 - x)$
$G = 13x - 23x^2 + 1 \times 13 - 1 \times x$
$G = 13x - 23x + 13 - x$
$G = 10x + 12x$

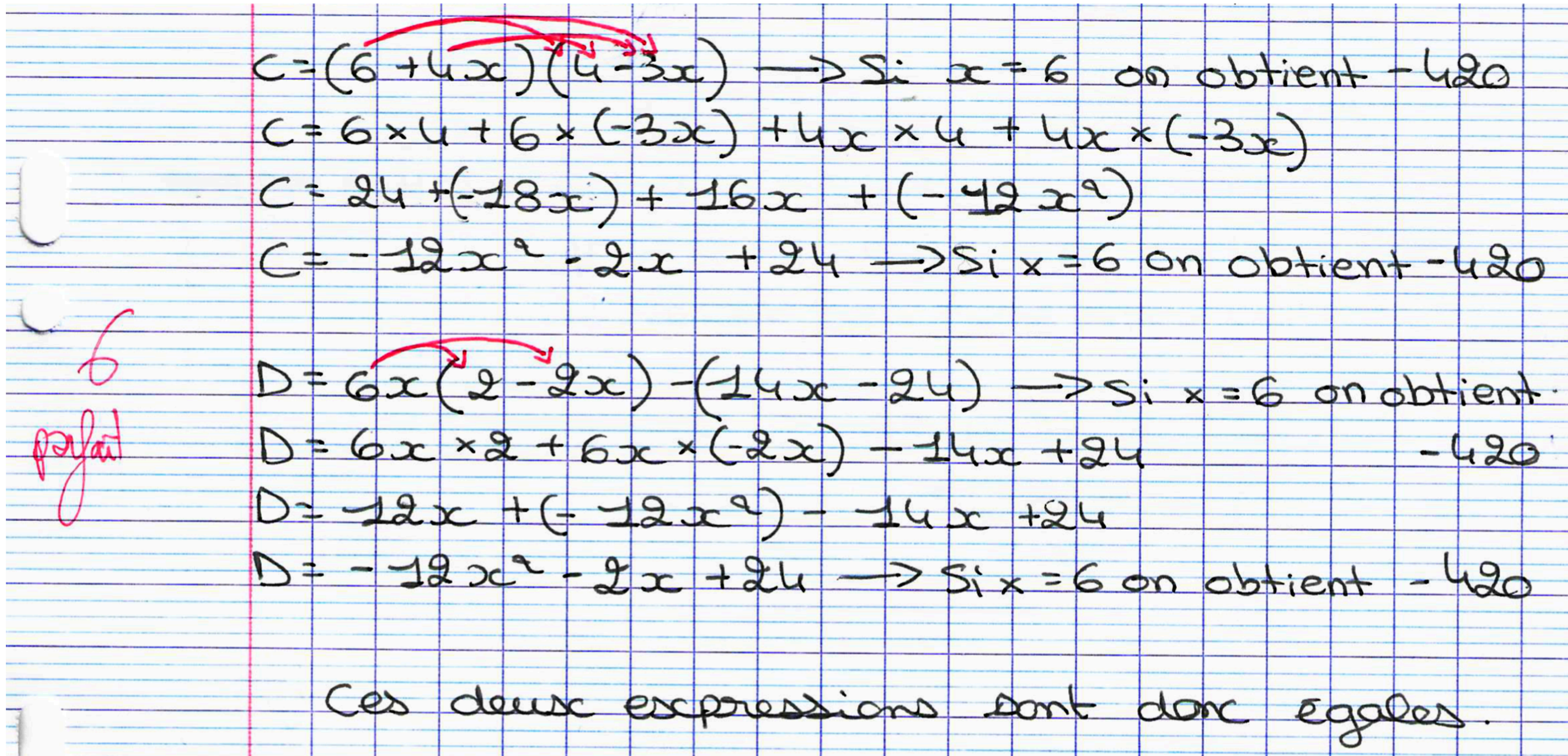
$H = (9{,}5 - 7x)(4{,}2x - 4)$
$H = (9{,}5 \times 4{,}2x) - 7x \times 4{,}2x - 7x \times 4$
$H = 39{,}9x - 29{,}4x^2 - 28x$
$H = 29{,}4x^2 - 11{,}9x$



pas en fonction de l'étape

exercice 1 $\quad C = (3x + 4)(9 - 2x)$

0 $\quad 3x \times 9 + 3x - 2x + 4 \times 9 + 4 \times -2x$



$C = (6 + 4x)(4 - 3x)$ ⟶ Si $x = 6$ on obtient -420
$C = 6 \times 4 + 6 \times (-3x) + 4x \times 4 + 4x \times (-3x)$
$C = 24 + (-18x) + 16x + (-12x^2)$
$C = -12x^2 - 2x + 24$ ⟶ Si $x = 6$ on obtient -420

6
parfait

$D = 6x(2 - 2x) - (14x - 24)$ ⟶ Si $x = 6$ on obtient -420
$D = 6x \times 2 + 6x \times (-2x) - 14x + 24$
$D = 12x + (-12x^2) - 14x + 24$
$D = -12x^2 - 2x + 24$ ⟶ Si $x = 6$ on obtient -420

Ces deux expressions sont donc égales.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Consigne 2 :

Voici quatre productions d'élèves sur la tâche « développer puis réduire ».
Quel(s) moyen(s) de vérification donneriez-vous à chaque élève pour lui faire prendre conscience que son travail comporte des erreurs ?

$x^2 = -1$

$C = (4-3x)(8+9x)$
$C = (4-3x)\times(8+9x)$
$C = (1x)\times(17x)$
$C = 17x^2$

Copie 1

Copie 2

Exercice 3 →

$E = -6,25(7,2-9,6x)$
$= -6,25 \times 7,2 - 9,6x$
$= -45 - 9,6x$

$A = (7x-3)(6x-8)$
$A = 7x - 3 \times 6x - 8$
$A = (7x \times 6x)(-8-3)$
$A = 42x - 11$

Copie 3

$G = 4x(6-9x)+(13-x)$
$G = 4x \times 6 + 4x \times (-9x) + 4x \times 13 + 4x \times (-x)$
$G = 24x + (-36x^2) + 52x + (-4x^2)$
$G = 76x + (-40x^2)$

Moyens de vérification

<u>Liste des moyens de vérification pour le cycle 4 :</u>

- Calculer le monôme du degré le plus élevé et/ou celui du degré le moins élevé
- Calculer le degré du monôme du degré le plus élevé et/ou celui du degré le moins élevé
- Substituer sans utiliser calculatrice
- Substituer en utilisant la calculatrice

<u>Consigne 3 :</u>

Pour chacun de ses moyens de vérification, discuter des avantages et des inconvénients pour leur mise en œuvre avec des élèves.

Moyens de vérification

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES

Moyens de vérification

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES
Calculer le monôme du degré le plus élevé et/ou celui du degré le moins élevé	Ne permet pas de détecter les erreurs sur les autres monômes Peut être difficile à calculer pour certaines expressions Risque d'erreurs dans le calcul si pas de calculatrice Nécessite de savoir analyser la structure de l'expression Nécessite de savoir calculer le degré d'un produit de monômes Ne s'applique pas à toutes les expressions (si les monômes de degré le plus élevé s'annulent)

Moyens de vérification

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES
Calculer le monôme du degré le plus élevé et/ou celui du degré le moins élevé	Ne permet pas de détecter les erreurs sur les autres monômes Peut être difficile à calculer pour certaines expressions Risque d'erreurs dans le calcul si pas de calculatrice Nécessite de savoir analyser la structure de l'expression Nécessite de savoir calculer le degré d'un produit de monômes Ne s'applique pas à toutes les expressions (si les monômes de degré le plus élevé s'annulent)
Calculer le degré du monôme du degré le plus élevé et/ou celui du degré le moins élevé	Ne permet pas de détecter les erreurs sur les autres monômes Nécessite de savoir analyser la structure de l'expression Nécessite de savoir calculer le degré d'un produit de monômes Ne s'applique pas à toutes les expressions (si les monômes de degré le plus élevé s'annulent)

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES

Moyens de vérification

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES
Substituer sans calculatrice ou avec la calculatrice	Risque d'erreurs dans le calcul (ordre de priorité, opération) Nécessite de savoir faire apparaître les multiplications non écrites par convention Long et complexe à mettre en œuvre pour certaines expressions S'applique à toutes les expressions Renforce le sens du signe égal comme une relation d'équivalence et le statut de la lettre

Moyens de vérification

MOYEN DE CONTRÔLE	LIMITES ET AVANTAGES
Substituer sans calculatrice ou avec la calculatrice	Risque d'erreurs dans le calcul (ordre de priorité, opération) Nécessite de savoir faire apparaître les multiplications non écrites par convention Long et complexe à mettre en œuvre pour certaines expressions S'applique à toutes les expressions Renforce le sens du signe égal comme une relation d'équivalence et le statut de la lettre
Substituer avec calculatrice en utilisant la touche CALC	Pas d'erreurs de calcul sauf erreur de frappe sur la calculatrice Ne nécessite pas de savoir faire apparaître les multiplications non écrites par convention Rapide et facile à mettre en œuvre S'applique à toutes les expressions Renforce le sens du signe égal comme une relation d'équivalence et le statut de la lettre

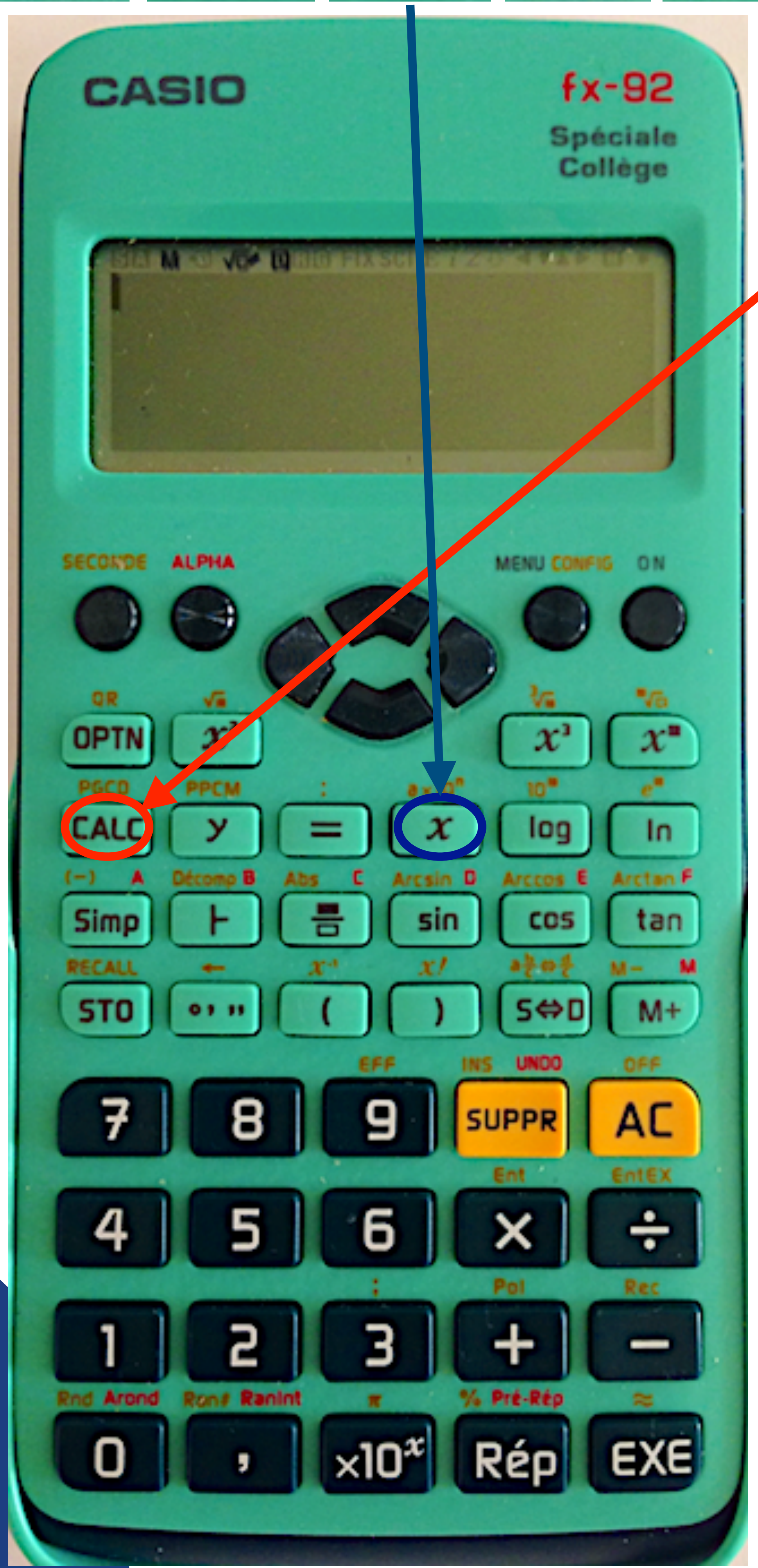
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

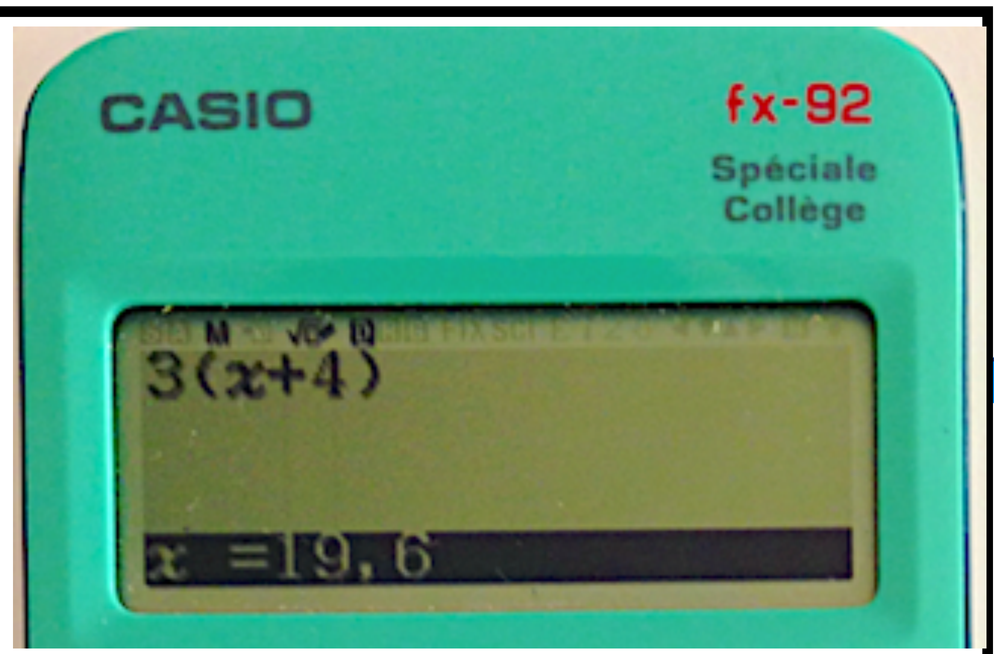
$k(a+b) = ka + kb$

Comment rentrer l'expression $3(x+4)$?

On commence par taper sur les touches



On obtient l'écran suivant:



19,6 correspond à la dernière valeur attribuée à la variable x.

La calculatrice nous demande quelle valeur veut-on attribuer à la variable x?

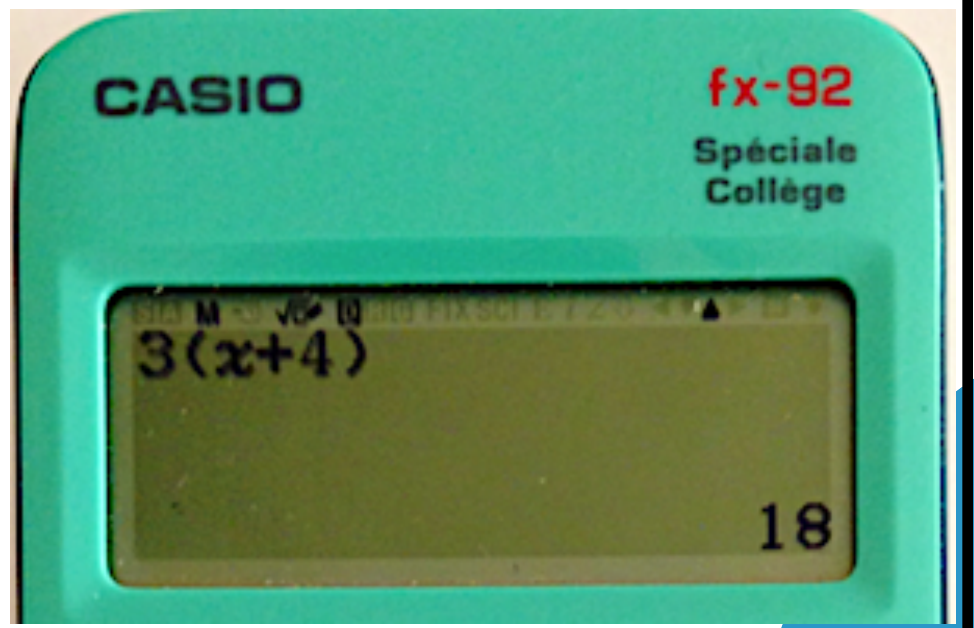
Par exemple 2.

On tape sur les touches suivantes:

afin que la calculatrice puisse faire la substitution.

Puis on tape sur la touche

pour que la calculatrice renvoie la valeur de l'expression $3(x+4)$ pour $x = 2$.



$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Tableau 6 : Tableau récapitulatif du nombre d'élèves ayant utilisé la substitution et analyse des résultats faux de l'évaluation sur la distributivité n°2 de la classe de 4ème.

	Résultat correct et substitution utilisée	Résultat faux et substitution non utilisée	Résultat faux et substitution utilisée	Résultat correct et substitution non utilisée
Q1	2	1	4	18
Q2	2	4	5	14
Q3	4	2	3	16
Q4	8	3	0	14

Extrait d'une expérimentation d'une stagiaire en M2

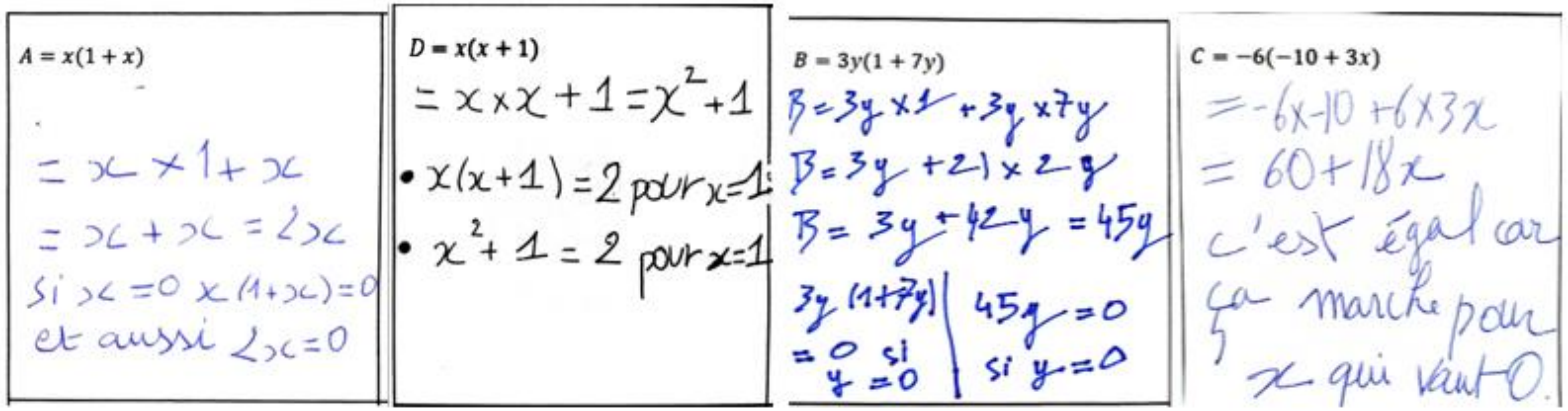


Figure 11 : Extraits de quatre copies différentes d'élèves portant sur l'évaluation n°2.

En effet, pour chacun de ces quatre élèves, ils ont la volonté de vérifier leurs résultats, ce qui est positif. En revanche, leur choix de substitution les induit en erreur quant à leurs conclusions. Ils obtiennent deux expressions littérales relatives à une valeur de substitution égales et en concluent qu'ils ne commettent pas d'erreurs. L'utilisation de la substitution avec la calculatrice ne les aide pas ici à détecter leurs erreurs.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Moyens de vérification

$$k(a+b) = ka + kb$$

	Résultat correct et substitution écrite	Résultat correct et substitution non écrite	Résultat faux et substitution écrite	Résultat faux et substitution non écrite
E	18	9	0	2
F	12	8	3	6
G	14	5	3	7
H	14	4	2	9

Analyse d'un contrôle en classe de 4ème par un professeur

$G = \underbrace{4x(6-9x)}_{\text{distribuvite}} + \underbrace{(13-x)}_{\text{adition}}$ → si $x=4$ on obtient -471

$G = 4x \times 6 + 4x \times (-9x) + 13 + (-x)$

$G = 24x + (-36x^2) + 13 + (-1x)$

$G = 23x + (-36x^2) + 13$

$G = -36x^2 + 23x + 13$ → si $x=4$ on obtient -471

$F = 8x + (-3x) \times (-2x) + (-3x) \times 5 - x^2$ → si $x=4$ on obtient 52

$F = 8x + 6x^2 - 15x - x^2$

$F = 6x^2 - x^2 + 8x - 15x$

$F = 5x^2 - 7x$ → $x=4$ on obtient 52

Exercice 3 :

$E = \underbrace{-9x(7-8x)}_{\text{distributivité}}$ → si $x=2$ on obtient 162

$k = -9x$
$a = 7$
$b = -8x$

$E = -9x \times 7 + (-9x) \times (-8x)$

$E = -63x + 72x^2$

$E = 72x^2 - 63x$ → si $x=2$ on obtient 162

H

$k = 7$
$a = 5$
$b = -4x^2$

$k = -3x$
$a = 5$
$b = 7x$

j'obtiens -2471 pour $x = 7$

$H = \underbrace{7(5-4x^2)}_{\text{distributivité}} - \underbrace{3x(5+7x)}_{\text{distributivité}}$

$H = 7 \times 5 + 7 \times (-4x^2) + (-3x) \times 5 + (-3x) \times 7x$

$H = 35 + (-28x^2) + (-15x) + (-21x^2)$

$H = -49x^2 - 15x + 35$ pour $x = 7$ j'obtiens -2471

Moyens de vérification

Pourquoi une telle différence sur l'utilisation par les élèves de la substitution comme moyen de vérification ?

Moyens de vérification

Pourquoi une telle différence sur l'utilisation par les élèves de la substitution comme moyen de vérification ?

J'ai volontairement fait le choix de ne pas enseigner l'utilisation de la touche « CALC » de la calculatrice avec ces élèves, qui est pourtant un bon moyen de contrôle. En effet, dans l'établissement dans lequel je suis en stage, aucun modèle de calculatrice n'est imposé et les élèves ont quasiment tous des modèles de calculatrices différents. (stagiaire en M2)

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Pourquoi une telle différence sur l'utilisation par les élèves de la substitution comme moyen de vérification ?

J'ai volontairement fait le choix de ne pas enseigner l'utilisation de la touche « CALC » de la calculatrice avec ces élèves, qui est pourtant un bon moyen de contrôle. En effet, dans l'établissement dans lequel je suis en stage, aucun modèle de calculatrice n'est imposé et les élèves ont quasiment tous des modèles de calculatrices différents. (stagiaire en M2)

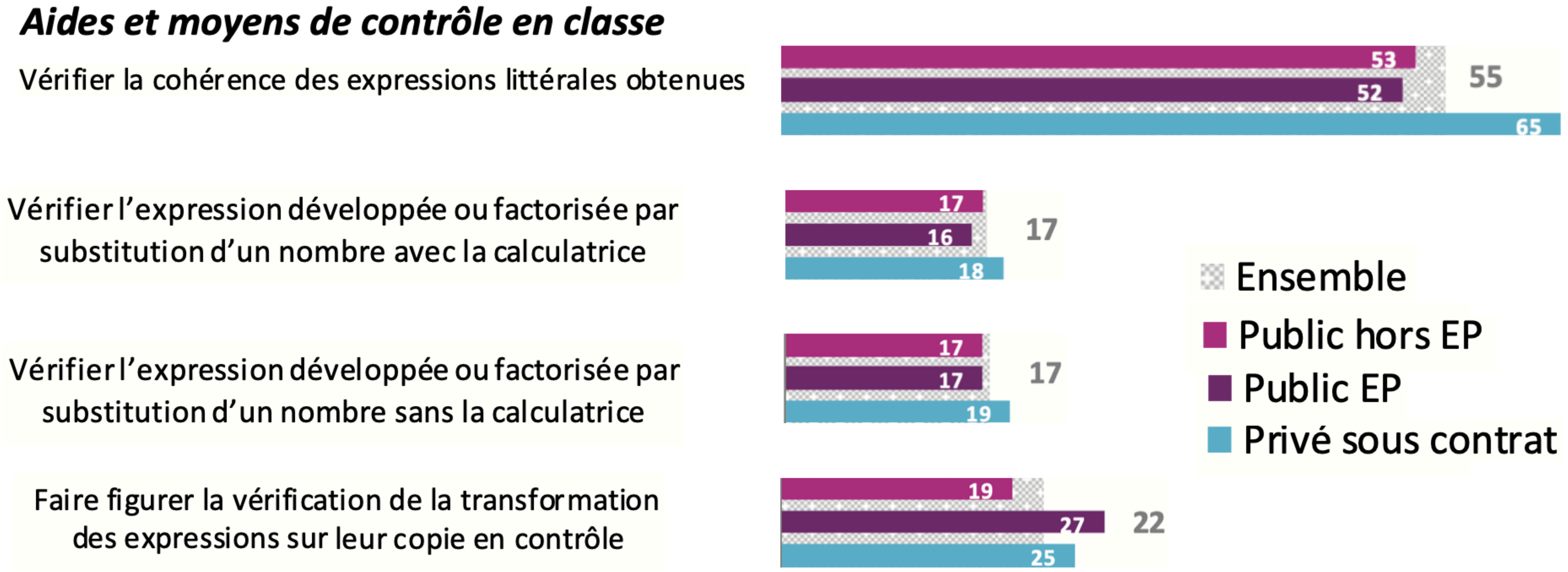
« *Dans une situation donnée, l'élève va évaluer rapidement l'intérêt (il varie selon les enjeux) qu'il a à faire une vérification (à condition de posséder les connaissances et les savoirs-faire nécessaires pour sa mise en œuvre) et même dans certains cas laquelle en allant des plus simples et des plus rapides à des vérifications plus longues nécessitant des connaissances mathématiques élaborées qui apportent peut-être une plus grande certitude* ».

Sylvie COPPE 1997

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$



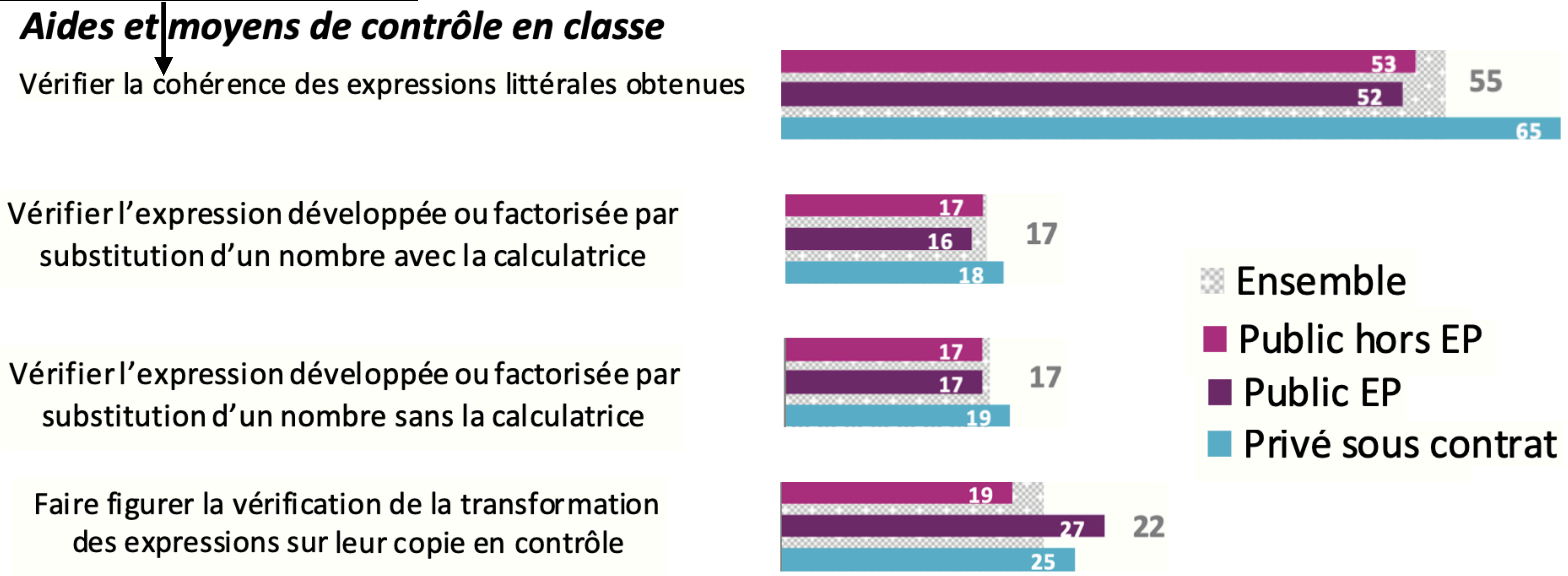
PRA.E.S.CO 2019

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b)=ka+kb$

Notion floue et inutilisable pour de nombreux élèves



PRA.E.S.CO 2019

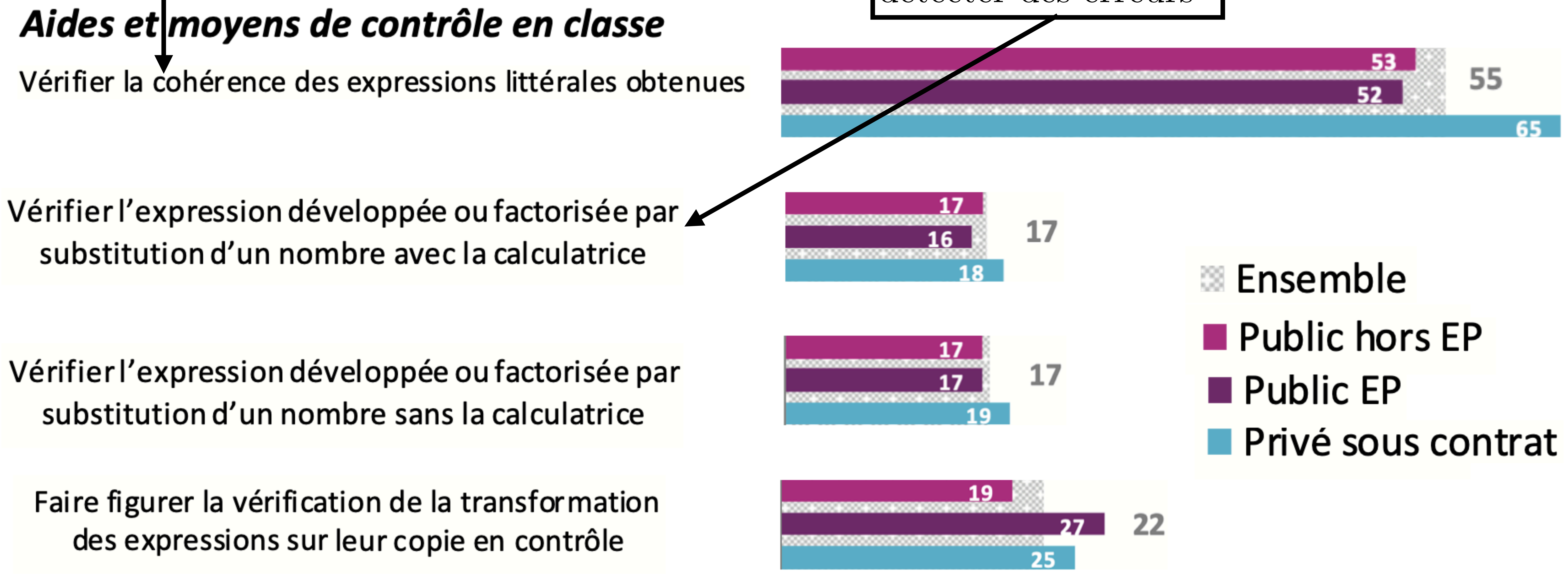
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Notion floue et inutilisable pour de nombreux élèves

Très efficace pour détecter des erreurs



PRA.E.S.CO 2019

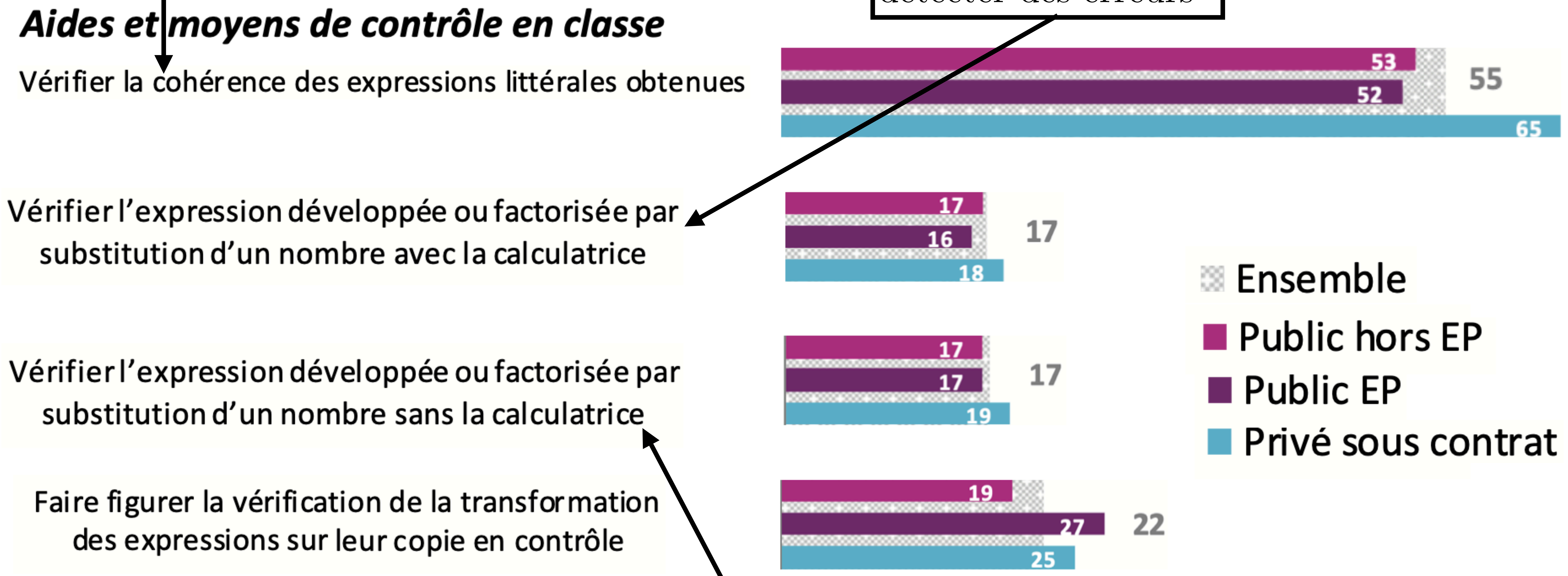
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Notion floue et inutilisable pour de nombreux élèves

Très efficace pour détecter des erreurs



Long et l'élève doit savoir bien calculer

PRA.E.S.CO 2019

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

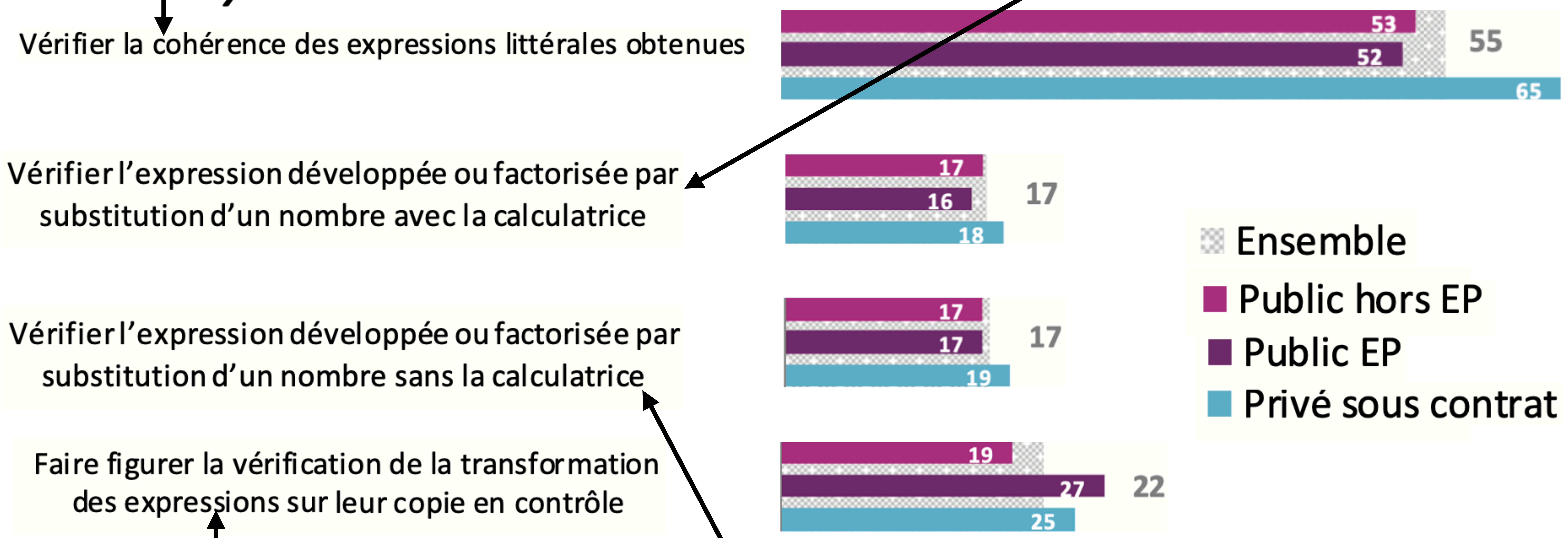
Moyens de vérification

$k(a+b) = ka + kb$

Notion floue et inutilisable pour de nombreux élèves

Très efficace pour détecter des erreurs

Aides et moyens de contrôle en classe



Très efficace pour corriger des erreurs

Long et l’élève doit savoir bien calculer

PRA.E.S.CO 2019