IREMS de Paris – Université Paris Cité

Groupe GLU – Groupe Lycée-Université

Sylvie Alory ; Iro Bartzia ; Dalila Belhaj ; **Renaud Chorlay** ; Benoit Mariou ; Zoé Mesnil ; Fabrice Vandebrouck

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

(Extrait du BO, programme de Seconde)

Différentes pistes explorées ces trois dernières années par le groupe GLU:

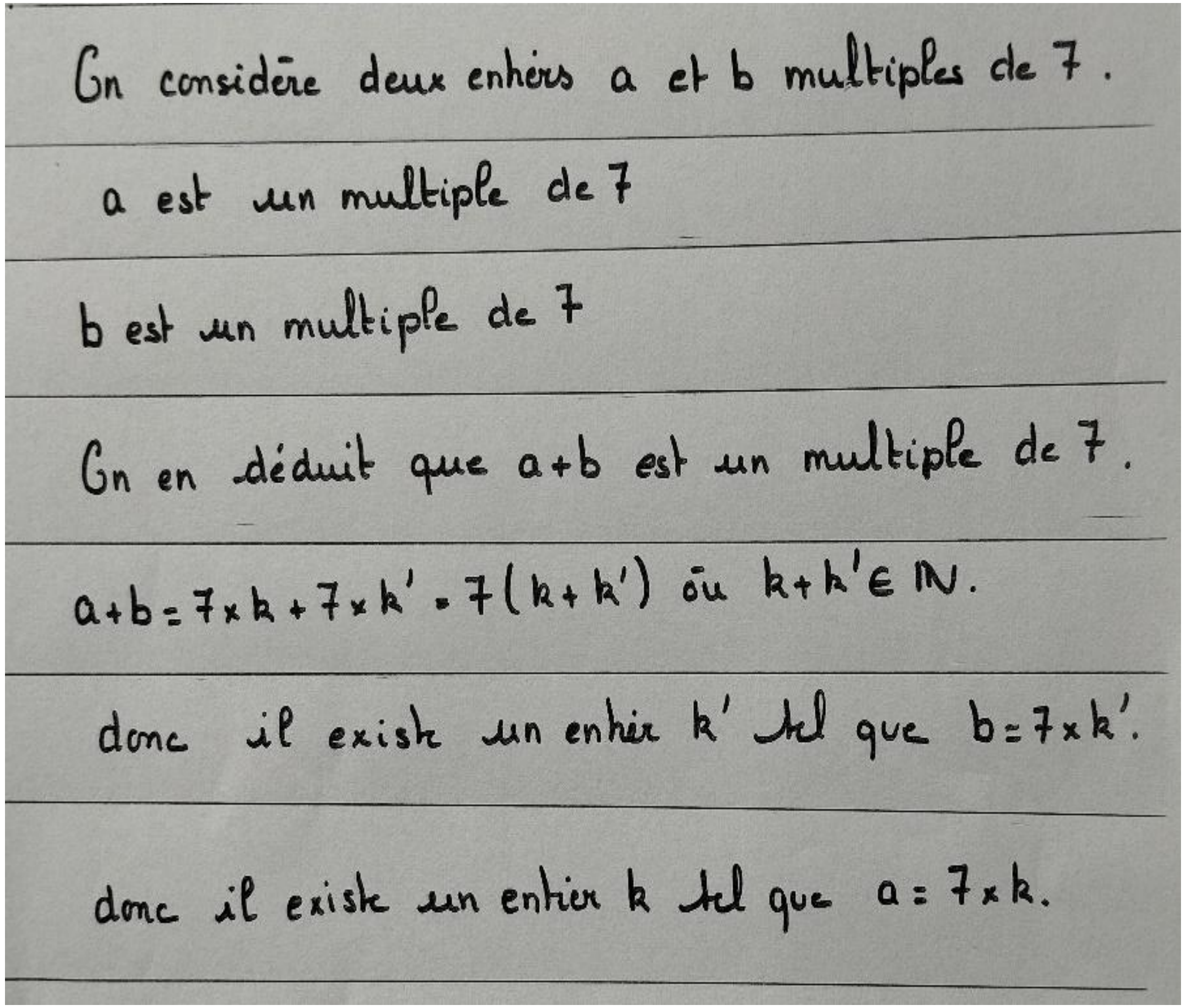
- Plan de la démonstration dégagé par le groupe classe puis rédaction de la démonstration en groupe
- Etude d’une démonstration en binôme puis analyse de la structure
- Démonstration faite par les élèves sous forme de vidéos
- Puzzle
- Vrai/Faux

Nouvelles pistes explorées cette année:

- Assistant de preuve (Lycée + Université)
- La classe *jigsaw*

Des puzzles pour apprendre à démontrer ?

Un premier exemple en seconde : La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7



On considère deux entiers a et b multiples de 7.

a est un multiple de 7

b est un multiple de 7

On en déduit que a+b est un multiple de 7.

$a+b=7\times k+7\times k'=7(k+k')$ où $k+k'\in\mathbb{N}$.

donc il existe un entier k' tel que $b=7\times k'$.

donc il existe un entier k tel que $a=7\times k$.

- Partie 1 : Les élèves doivent découper le puzzle et recoller les pièces dans le bon ordre. Nous avons veillé à ce que chaque élève relise le texte qu'il proposait avant de le coller et de le rendre (environ 20min).
  Une correction est proposée et les puzzles relevés.
- Partie 2 : Nous leur demandons de faire la démonstration de la propriété :

Soit a un entier naturel. Montrer que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Partie 1 : les puzzles

13 élèves ont réussi l'exercice et ont rendu le texte ci-contre :

On considère deux entiers a et b multiples de 7.

a est un multiple de 7

donc il existe un entier k tel que $a = 7 \times k$.

b est un multiple de 7

donc il existe un entier k' tel que $b = 7 \times k'$.

$a+b = 7 \times k + 7 \times k' = 7(k+k')$ où $k+k' \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $a+b$ est un multiple de 7.

Mais :

On considère deux entiers a et b multiples de 7.

a est un multiple de 7

$a+b = 7 \times k + 7 \times k' = 7(k+k')$ où $k+k' \in \mathbb{N}$.

donc il existe un entier k tel que $a = 7 \times k$.

b est un multiple de 7

donc il existe un entier k' tel que $b = 7 \times k'$.

On en déduit que a+b est un multiple de 7.

On considère deux entiers a et b multiples de 7.

a est un multiple de 7

b est un multiple de 7

$a+b = 7 \times k + 7 \times k' = 7(k+k')$ où $k+k' \in \mathbb{N}$.

On en déduit que a+b est un multiple de 7.

donc il existe un entier k tel que $a = 7 \times k$.

donc il existe un entier k' tel que $b = 7 \times k'$.

Partie 2 : Les élèves ont travaillé au brouillon, ils n'ont pas eu le temps de recopier leur démonstration au propre. Ce sont les brouillons que nous avons relevés.

On considère c et d deux multiples de a.

c est un multiple de a
donc on considère un réel k tel que $c = a \times k$
d est un multiple de a
donc on considère un réel k' tel que $d = a \times k'$
$c + d = a \times k + a \times k' = a(k+k')$ où $k + k' \in \mathbb{N}$

On en déduit que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

~~On considère~~ On considère $a \in \mathbb{N}$.

~~Soient k et k' deux multiples de a~~

~~On note : $k \times a + k' \times a = a(k+k')$~~

~~On en déduit que la somme de 2 mult. de a est un multiple de a.~~

Soient x et y deux multiples de a.

On note : $x = k \times a$

$y = k' \times a$

Calculons : ~~$xy = (k \times a)(k' \times a)$~~

$x + y = (k \times a) + (k' \times a)$

$\Leftrightarrow x + y = a(k + k')$

On en déduit que la somme de deux multiples de a est un multiple de a, car ~~...~~ elle est égale à $k + k'$ fois ~~...~~ la valeur a.

on considère b et c 2 entiers naturels

b est un multiple de a

donc il existe un entier k tel que b = a × k

c est un multiple de a

donc il existe un entier naturel k' tel que c = a × k'

on en conclut que b + c = (a × k) + (a × k')

a(k+k') donc b + c est un multiple de a

car a est multiple par 2 et par k

donc la somme de 2 multiple de a est un multiple de a

Premier bilan :

- Le choix a été fait de demander aux élèves de découper les pièces du puzzle et de les remettre dans l'ordre en collant les pièces sur une feuille. Il nous semblait important pour que les élèves s'impliquent, de ne pas leur demander de recopier dans l'ordre le texte, tâche qui les rebute. Les élèves pouvaient ainsi étaler devant eux les pièces et les bouger facilement jusqu'à ce qu'ils soient satisfaits de l'ordre avant de les coller. Le travail des élèves était focalisé sur la tâche principale : remettre en ordre la démonstration.
- L'utilisation d'un puzzle permet à chaque élève de s'impliquer dans la première démonstration (démonstration générique) contrairement à une démonstration faite au tableau en cours dialogué où seuls quelques élèves participent à l'élaboration de la démonstration. On peut penser que ce premier exercice a aidé les élèves à proposer une démonstration de la propriété générale.
- C'est aussi un exercice où la différenciation est facile. On peut donner à certains élèves uniquement le puzzle, demander la démonstration de la propriété générale qu'à certains, ne pas donner les mêmes pièces à tous.
- On note que, dans toutes les copies de seconde, la quantification universelle n'apparait pas. La quantification existentielle est fluctuante.
- La réussite à la tâche « puzzle » ne garantie pas la compréhension de l'idée de la démonstration -> importance des prolongements, reformulations, demande d'idée principale…

Un deuxième exemple en terminale

Objectif : Découvrir une démonstration du théorème

Soient a et b deux réels, a non nul.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = ay + b$$

sont les fonctions $x \longmapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

- Classe de spécialité Math (27 élèves)
- Contexte:

La démonstration du cas de l'équation $y' = ay$ venait d'être étudié.

A vos ciseaux !

On a montré que, pour tout réel k , les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0'(x) = 0$ *et* $af_0(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$ donc f_0 est solution de (E).
Soit k un nombre réel.
Autrement dit $(f - f_0)' = a(f - f_0)$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af(x) + b = a \times \left(ke^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b = a \times ke^{ax} - b + b = a \times ke^{ax}$
Soit f une solution quelconque de l'équation différentielle (E).
On a montré que si une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ alors il existe un réel k tel que, pour tout réel x $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x) + b$.
On a $f' = af + b$ et $f_0' = af_0 + b$ donc en soustrayant membre à membre : $f' - f_0' = a(f - f_0)$.
On en déduit que la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Considérons la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
On a donc pour tout réel x $f(x) = ke^{ax} + f_0(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = k \times ae^{ax} = a \times ke^{ax}$.
Donc f est solution de l'équation différentielle (E).
On a montré que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.
On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\frac{b}{a}$.
Il existe donc un réel k tel que, pour tout réel x, $(f - f_0)(x) = f(x) - f_0(x) = ke^{ax}$

Copie 1 : A & A

- Travail préliminaire de repérage de balises textuelles :

Introduction d’objets:	« On a montré que »
	« Soit »
Conclusions :	« Considérons »
	« On a donc »

- Une inversion dans la partie 2: confusions entre conclusions partielles et conclusion globale.

Autre exemple de pré-repérage des deux parties:

8 A	On a montré que, pour tout réel k , les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
B	Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = 0$ et $af_0(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$ donc f_0 est solution de (E).
2 A	Soit k un nombre réel.
B	Autrement dit $(f - f_0)' = a(f - f_0)$.
4 A	Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af(x) + b = a \times \left(ke^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b = a \times ke^{ax} - b + b = a \times ke^{ax}$
1 A	Soit f une solution quelconque de l'équation différentielle (E).
B	On a montré que si une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ alors il existe un réel k tel que, pour tout réel x $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
6 A	On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x) + b$.
B	On a $f' = af + b$ et $f_0' = af_0 + b$ donc en soustrayant membre à membre : $f' - f_0' = a(f - f_0)$.
	On en déduit que la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle

Copie 2 : E & M

- Les deux volets de la démonstration ne sont pas bien identifiés
- Une grosse maladresse dès le départ : « la » fonction *f* définie de deux manières différentes en E2 et E3 (étiquettes 2 et 3). Du coup, pour lancer la réciproque, il manque le point de départ (E3).
- La réciproque est un grand fouillis : rôle de f_0 pas compris (E15 vient bien après E9-E10), usage de la lettre *k* <u>avant</u> son introduction (E11-E12), incompréhension des reformulation (E13 devrait être une reformulation de E14, donc échange)
- La réciproque contient cependant des ilôts cohérents : E9-E10.

Copie 3: T & R

- Tentative pour respecter la structure bi-partite, mais des problèmes de structure
- La première partie commence par « Soit f une solution de E » et conclut par « Donc f est solution de E » : ce n’était pas la peine de se fatiguer autant pour démontrer l’hypothèse !
- Les calculs ne sont pas bien répartis dans les deux parties : la fonction f_0 est utilisée dans les deux parties.

Bilan du puzzle ED:

- Tous les groupes ont cherché la démonstration, rassurés de ne pas partir de rien ; séance très dynamique.

- Entre 3 et 5 groupes sur les 13 ont réussis complètement l’exercice.

- Tous les groupes sauf 2 ont repéré la structure de la démonstration (la dimension organisatrice dont parle Batie ou le *proof-scheme* des Selden).

Bilan du puzzle ED:

- Un sens est beaucoup plus facile que l'autre.
  - Facile: vérifier que f (donnée par une formule) est solution
  - Le sens difficile demande de comprendre qu'on utilise le théorème sur $y' = ay$ après introduction d'une fonction auxiliaire f_0.
- Des réflexes par encore acquis par tous:
  - Quel pas de déduction derrière un « donc » (propriété, définition, point établi plus haut) ?
  - Introduire un objet avant de le manipuler, de calculer avec.

Prolongement du travail : presque tous seuls

Généralisation :

Exemple 1 : On considère l'équation différentielle (E) $y' = -y + x$.

1. Vérifier que la fonction $f_0 : x \longmapsto x - 1$ est solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation (E') : $y' + y = 0$.
3. En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle (E) $y' = 2y + e^x$.

1. Vérifier que la fonction $f_0 : x \longmapsto -e^x$ est solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation (E') : $y' - 2y = 0$.
3. En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Généraliser en écrivant une propriété sur les solutions de $y' = ay + f$ et proposer une démonstration

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I. Si l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$ admet une solution f_0 alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + f_0(x)$.

Exemple 3 : Le double puzzle

On suppose que n est impair.
Soit n un entier naturel.
Puisque n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $n \in \mathbb{N}$, $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Donc il existe $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$. C'est-à-dire que n^2 est impair.
Donc n est pair.
On a donc montré que pour tout entier naturel n, si n est impair alors n^2 est impair.
Montrons que n^2 est impair.
On suppose que n^2 est pair.
Par contraposée, on a ainsi également montré que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.
Raisonnons par l'absurde et supposons que n est impair.
Soit n un entier naturel.
On a ainsi montré que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.
Puisque n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Puisque $n \in \mathbb{N}$, $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Donc il existe $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$. C'est-à-dire que n^2 est impair.
Montrons que n est pair.
On a donc une contradiction, puisque par hypothèse n^2 est pair.

Objectifs

- Travailler deux types de raisonnement :

  La démonstration par l'absurde

  La démonstration par contraposition

- Dégager le principe de ces deux types de raisonnement

Théorème 1 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$y' = ay$ sont les fonctions $x \longmapsto ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration : On doit prouver qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ si, et seulement si, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ke^{ax}$.

1) Si pour tout réel x , $f(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$ alors f est solution de $y' = ay$.
2) Si f est solution de $y' = ay$ alors il existe un réel k tel que, pour tout réel x , $f(x) = ke^{ax}$.

1) Soit $k \in \mathbb{R}$. Posons $f_k(x) = ke^{ax}$. f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f_k'(x) = k \times ae^{ax} = a \times (ke^{ax}) = af_k(x)$
   Pour tout réel k, les fonctions $f_k : x \longmapsto ke^{ax}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.
   Considérons la fonction auxiliaire $g(x) = f(x)e^{-ax}$.
   g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = e^{-ax}\big(f'(x) - af(x)\big) = 0$
   On en déduit qu'il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel x, $g(x) = k$.
   Pour tout réel x, $k = f(x)e^{-ax}$ soit $f(x) = ke^{ax}$.
   On a montré que si f est solution de $y' = ay$ alors il existe un réel k tel que, pour tout réel x , $f(x) = ke^{ax}$.