Que retenir des programmes :

Cycle 4 (2016)

La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique, mais également mise au point d'un programme qui doit tourner sur un ordinateur ou pratique de jeux pour lesquels il faut développer une stratégie gagnante, individuelle ou collective, ou maximiser ses chances).

Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle). L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique (individuelle, collective, ou par groupes), mais aussi par l'exemple. C'est pourquoi il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. De nombreux résultats figurant dans ce programme peuvent être démontrés en classe, selon des modalités variées : certaines démonstrations peuvent être élaborées et mises au point par les élèves eux-mêmes (de manière individuelle ou collective), sous la conduite plus ou moins forte du professeur ; d'autres, inaccessibles à la recherche des élèves, tireront leur profit des explications et des commentaires apportés par le professeur. Certaines démonstrations possibles (aussi bien sur les nombres et le calcul qu'en géométrie) sont identifiées dans le programme. Les enseignants ont la liberté de choisir ceux des résultats qu'ils souhaitent démontrer ou faire démontrer, en fonction du niveau et des besoins de leurs élèves. Enfin, il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours (qui pourra d'ailleurs l'être ultérieurement), plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée.

En complément, dans le cadre du travail personnel soumis aux élèves, beaucoup d'exercices et de problèmes peuvent servir de support à la démonstration. De manière à encourager les élèves dans l'exercice de la démonstration, il est important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve et de ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme.

(…)

Une trace de cours claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, de découverte, d'appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, de débats, de mise au point, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. (…) Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique, rédactionnelle) des traces figurant au tableau ou dans les cahiers d'élèves. En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété - admise ou démontrée -, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques.

Seconde (2019) – 1ère Spé (2019) – Term Spé (2020)

« Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc. »

En Seconde :

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

Compléments au § *Vocabulaire ensembliste et logique* en Spé :

- employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ;
- utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ;
- formuler la négation de propositions quantifiées.

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.

Les programmes comprennent en outre de nombreux § « démonstration » : en Seconde

Le nombre rationnel 1/3 n'est pas décimal.

– Le nombre réel rac(*2)* est irrationnel.

– Pour une valeur numérique de *a*, la somme de deux multiples de *a* est multiple de *a*.

- Le carré d'un nombre impair est impair.

– Quels que soient les réels positifs *a* et *b*, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
– Si *a* et *b* sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
– Pour *a* et *b* réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

 Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

– Le projeté orthogonal du point *M* sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point *M*.
 Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.

Approfondissements possibles

 Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
 Expression de l'aire d'un triangle : . C sinab 21
 Formule d'Al-Kashi.
 Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

– En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

– Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x_2$, $y = x_3$, pour $x \geqslant 0$.
 Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée

Que retenir des documents ressources (hors exemples) :

Cycle 4 : Compétence « raisonner » (2016)

Rappel sur différentes phases de travail :

« L'apprentissage du raisonnement et de la démonstration est un processus long et délicat qui doit se faire de manière progressive, dans la durée, et tenir compte des deux contraintes suivantes :

- tout d'abord, la nécessité de séparer les tâches de résolution du problème (recherche et obtention de la preuve) de celle de la rédaction d'un texte qui traduit l'organisation de la démonstration ;
- ensuite, l'apprentissage de la rédaction se fait notamment lorsque l'élève est confronté à l'expérience de la communication de sa solution »

Rappel sur différents types de raisonnements courants dans les phases de recherche : inductif, abductif.

Rappel sur différents types de démonstration : déductif, disjonction des cas, absurde

« En revanche, certains théorèmes, énoncés de manière générale peuvent être démontrés uniquement sur des exemples choisis parce qu'ils donnent une bonne idée du cas général (on dit alors qu'ils sont « génériques »). Cela peut être par exemple le cas pour la démonstration des propriétés des opérations sur les fractions.
De même, il convient de systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. Les théorèmes traduisant une propriété caractéristique pourront être formulés en distinguant dans leur énoncé le sens direct et le sens réciproque.
Les notions mathématiques qui figurent au programme du cycle 4 offrent toutes des possibilités de raisonnement, soit dans l'accès à la preuve d'un énoncé, soit dans son utilisation. Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme, mais de déterminer en équipe pédagogique les démonstrations qui seront retenues sur toute la durée du cycle en raison de leur caractère formateur, de leur

accessibilité aux élèves et de l'intérêt qu'elles présentent pour faciliter l'accès au sens des notions mises en jeu. »

Eviter les démonstrations trop guidées et laisser du temps pour les phases de recherche :

« Les situations proposées doivent donc ménager à la fois des temps de recherche et d'expérimentation permettant de formuler des conjectures, des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées). Pour solliciter la curiosité de l'élève, susciter chez lui l'envie de relever un défi intellectuel et motiver sa recherche, il est souhaitable que l'énoncé du problème soit assez bref et facile à comprendre et qu'il n'induise ni une solution ni même une méthode de résolution ; un moyen de laisser à chaque élève l'initiative de sa démarche consiste à limiter les questions intermédiaires ou celles dont l'énoncé mentionne ce qu'il s'agit de trouver (« démontrer que… »). »

Raisonnement et démonstration

Ressource pour les classes de collège (2008)

Exactement les mêmes points :

Différentes phases :

« *[…] deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré. En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège* »

Différents types de raisonnement, certains étant démonstratifs :

« On peut distinguer, dans le domaine scientifique, deux types de raisonnement :
• le raisonnement par induction et présomption : de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale ;
• le raisonnement par déduction : à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété »

Ils n'utilisent pas le mot « abduction » ici, mais ils parlent de la même chose sous le nom de « chaînage arrière ». Le raisonnement abductif est mentionné page 4.

« En revanche, une preuve apportée sur un exemple générique est une forme de raisonnement déductif, car il s'agit d'une démonstration faite sur un exemple mais transférable. »

Les exemples illustrent différents types de raisonnement :

- Disjonction de cas
- Infirmation par production d'un contre-exemple
- Raisonnement par l'absurde
- Justification de la correction d'une construction géométrique

[Remarque : ils ne mentionnent pas les figures impossibles.]

Quelques conseils de mise en œuvre :

- La validation d'une démonstration peut être faire (1) par le professeur, (2) par l'élève lui-même, (3) par les élèves en groupes.

Raisonnement et démonstration en Seconde (2019)

Rappel de la distinction entre raisonnement et démonstration, à la suite des programmes de CLG :

« Il est notamment intéressant de reprendre la distinction qu'on y trouve entre raisonnement et démonstration : le raisonnement est une forme de cheminement plus ou moins complexe pouvant comprendre recherche, découverte, conjecture, production d'une preuve peut être partielle ; la démonstration est une forme de communication d'une preuve aboutie, qui repose sur des résultats acquis antérieurement et sur les règles de la logique. »

Rappel de la distinction entre abduction et déduction, ainsi que des « preuves sur un exemple générique ». Le document suggère même comme pratique recommandée (voir ci-dessous) :

Pistes d'action :

Des démonstrations différentes

Pour prendre en compte la diversité des publics et des fonctionnements intellectuels, il est profitable lorsque c'est possible d'envisager plusieurs démonstrations d'un même résultat. Cela peut être mis en pratique avec des raisonnements différents, en choisissant des registres variés (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel), en recourant à des outils logiciels diversifiés. L'élève peut alors se voir proposer de choisir celle des démonstrations qu'il notera dans son cahier de cours.

Des démonstrations en plusieurs niveaux de détail

Il peut être intéressant également de donner les démonstrations en plusieurs niveaux de détail :

- niveau 1 : seulement le plan et les idées générales ;
- niveau 2 : démontrer chaque étape du plan (avec un partage des tâches différencié au sein de la classe, suivi d'une mise en commun) ;
- niveau 3 : démonstration complète, en évitant une longueur excessive.

Là encore, l'élève, qui autoévalue sa propre aptitude de compréhension, peut choisir le niveau de détail pour la démonstration qu'il note dans son cahier de cours.

Commencer une démonstration avec un exemple générique

Une autre piste consiste à démontrer un résultat sur un exemple générique. Il s'agit d'un exemple numérique ou d'un cas particulier dont le traitement n'entache pas une démonstration générale, en ce sens que les outils mobilisés et les modes de raisonnement sont assez facilement transférables au cas général. Dans certains cas, on peut s'en tenir à cet exemple en précisant qu'on admet le cas

[Remarque : ils n'évoquent pas les tâches de lecture, d'évaluation de démonstration. On peut les lire entre les lignes dans l'évocation du travail sur l'esprit critique, et sur la pluralité des « niveaux de détail »]

Un complément :

As indicated in the last section, justifying has to do with revealing an underlying structure or relationship that links I KNOW with I WANT. Once you think that you have found that link, it is a matter of stating it carefully and clearly. As with conjectures about WHAT, your conjecture about WHY may need several modifications, and I recommend three stages:

convince yourself
convince a friend
convince a sceptic

The first step is to convince yourself. Unfortunately that is all too easy!

The second step is to convince a friend or a colleague. This forces you to articulate and externalize what may seem obvious to you, so that the friend is provided with convincing reasons for why what you say is true. It is often helpful to rehearse the most illuminating examples from your specializing, in order to provide your friend with similar background experience to your own. Examples are, of course, not enough by themselves. They may convince your friend that your statements are plausible, but you must justify every step of your argument. For example, it is not enough to say of *Goldbach's Conjecture* or of *Iterates*:

'Do lots of examples and you will see.'

You have to state the structural links which indicate why your conjecture is valid.

Even if your friend is convinced, it is not enough! The third step is to attempt to convince someone who doubts or questions every statement you make. I like to add force by using the word 'enemy'. Learning to play the role of enemy to yourself is an extremely important skill, if only because other suitable enemies may be hard to find!

Source : Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (*2nd edition*). Pearson. pp. 87–88.