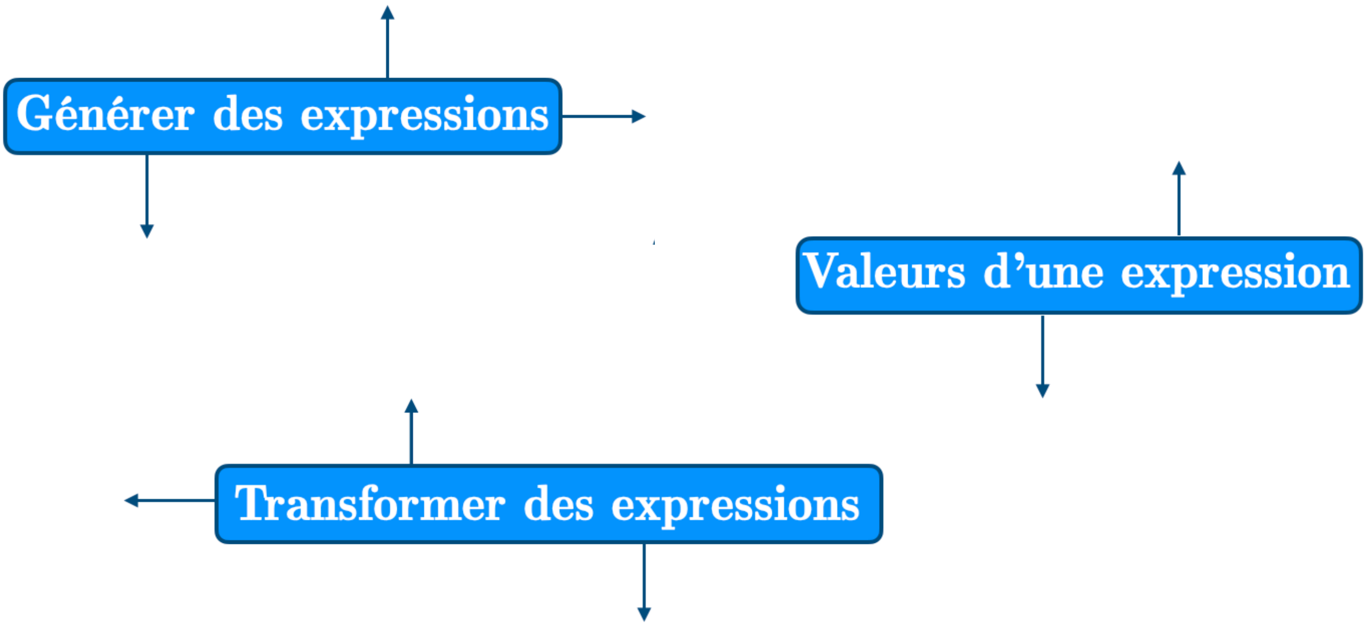
Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

SORBONNE UNIVERSITÉ

DU Maths 2nd degré

TD 1 SUR LE CALCUL LITTÉRAL

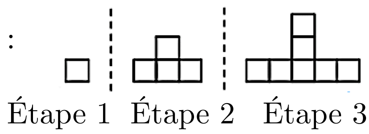


<u>Consigne 1 :</u>

Voici une liste de huit exercices.

Analyser les exercices et compléter le tableau suivant.

<u>Exercice 1</u> Voici des figures construites selon le même procédé :
Écrire un calcul valable pour toutes les étapes permettant de déterminer le nombre de petits carrés.



<u>Exercice 2</u> Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4.

<u>Exercice 3</u> Calculer la valeur de l'expression $4\left(3x^2+1\right)-5x$ pour $x=-4$

<u>Exercice 4</u> Développer puis réduire l'expression $4x\left(5x-3\right)-\left(5-2x\right)$

<u>Exercice 5</u> Calculer cinq sommes de trois nombres entiers consécutifs.
Que remarques-tu ? Démontre ta remarque.

<u>Exercice 6</u> Dans un parc pour enfants, il y a trois fois plus de roues que de tricycles.
Écrire une égalité traduisant cette phrase.

<u>Exercice 7</u> Factoriser l'expression $16x^2+36$

<u>Exercice 8</u> Montrer que les expressions $(4x+3)\left(3+5x\right)$ et $2x(10x+11)+\left(9+5x\right)$ sont égales

Tâche principale	Exercice
	N°3
	N°4
	N°7
	N°8
	N°2
	N°6
	N°1
	N°5

éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

Utiliser le calcul littéral

Objectifs

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants:

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- introduire les concepts de variable et de fonction.

La transformation d'expressions littérales (d'une somme en produit ou vice versa) s'effectue dans le même esprit, à partir de la distributivité simple de la multiplication par rapport à l'addition.

Le travail technique de développement ou de factorisation est accompagné d'une réflexion sur le choix de la forme de l'expression (somme ou produit) la mieux appropriée au problème à résoudre.

De manière générale, les tâches d'exécution (développement, factorisation, réduction) sont articulées avec des activités qui développent l'intelligence des stratégies de calcul comme l'anticipation, l'organisation, le contrôle. Les stratégies de contrôle peuvent s'appuyer sur des arguments de signe, d'homogénéité, des tests sur des valeurs numériques adéquates, etc.

Calcul littéral pour démontrer

Progressivement, l'élève perçoit les limites du calcul numérique et la nécessité de passer au calcul littéral pour prouver qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de la variable.

Formules et expressions littérales pour généraliser, modéliser ou démontrer

Le travail initié au cycle 3 sur la production et l'utilisation de formules devient, en classe de 5^{e}, un objectif de formation. Une formule (expression d'une relation entre des variables) ou une expression littérale (résultat d'un programme de calcul) permettent de décrire une situation générale, le recours à la lettre étant un moyen de s'abstraire de valeurs numériques particulières.

Consigne 2 :

Voici une série de sept exercices.
Pour chaque erreur, identifier l'obstacle qui est sans doute à son origine.

Exercice 1 :

Développer et réduire l'expression $4x\left(6-9x\right)+(13-x)$

$G = 4x(6-9x)+(13-x)$
$G = 4x \times 6 + 4x \times (-9x) + 4x \times 13 + 4x \times (-x)$
$G = 24x + (-36x^2) + 52x + (-4x^2)$
$G = 76x + (-40x^2)$

Exercice 2 :

Développer et réduire l'expression $(4-3x)(8+9x)$

$C = (4-3x)(8+9x)$
$C = (4-3x) \times (8+9x)$
$C = (1x) \times (17x)$
$C = 17$

Exercice 3 :

Développer et réduire l'expression $(7x-3)\left(6x-8\right)$

$A = (7x-3)(6x-8)$
$A = 7x - 3 \times 6x - 8$
$A = 7x \times 6x - 8 - 3$
$A = 42x - 11$

Exercice 4 :

Les expressions $(3x-2)\left(5-4x\right)$ et $6x(4-2x)-(x+10)$ sont-elles égales ?

Exercice 2 :
1) Soit $x = 3$
$A = (3x-2)(5-4x)$ et $B = 6x(4-2x)-(x+10)$
$= (3\times3-2)(5-4\times3)$ $\quad = 6\times3(4-2\times3)-(3+10)$
$= 7 \times (-7)$ $\quad = 18\times(-2)-13$
$A = -49$ $\quad B = -49$
Les expressions A et B sont égales.

Exercice 5 :

Factoriser

l'expression $16x - 24$

$A = 16x - 24$
$A = 4 \times 4x + 4 \times (-6)$
$A = 8\,(4x - 6)$

Exercice 6 :

Voici un programme de calcul s'appliquant à tous les nombres.

1ère étape : Soustraire 3
2ème étape : Multiplier par le nombre initial
3ème étape : Ajouter le triple du nombre initial.

L'affirmation suivante est-elle vraie ?
Quel que soit le nombre initial, le nombre obtenu est le carré du nombre initial.

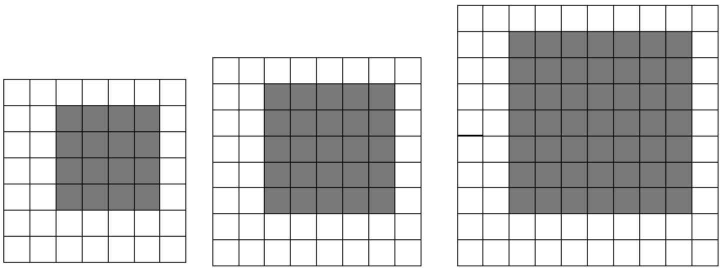
Nombre choisi	Etape 1	Etape 2	Etape 3
10	7	70	100
45	42	1890	2025
7.	4	28	49
9	6	54	81

Ces exemples nous prouvent que l'affirmation est vraie

Non on ~~on~~ veut montrer que c'est vraie pour tous les nombres

Exercice 7 :

Voici trois figures construites selon le même modèle :



Écrire une formule donnant le nombre de carrés gris à partir du côté du grand carré blanc.

Formule carré gris.

1 $(10 - 3) \times (10 - 3) = 16$
2 $(8 - 3) \times (8 - 3) = 25$
3 $(7 - 3) \times (7 - 3) = 49.$

$(x \times x) - (x - 4) + x - 4$
si $x = 4$, on obtient 16.

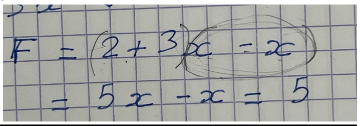
$(x \times x) - (x - 5)$
si $x = 5$, on obtient 25.

$(x \times x) - (x - 7) + x - 7$
si $x = 7$, on obtient 49.

Consigne 3 :

Voici un exercice donné lors d'un contrôle de 5e :

Réduire l'expression $2 + 3x - x$.

Un élève a écrit sur sa copie : 

Identifier ce qui fait obstacle pour cet élève.

Consigne 4 :

Voici un exercice donné lors d'un contrôle de 5e :

Réduire l'expression $2 + 3x - x$.

Que doit faire un élève pour réussir cet exercice ?

<u>Critères pour reconnaître une bonne situation d'introduction :</u>

- l'introduction de la lettre est à la charge de l'élève ;
- le cadre numérique n'est plus pertinent ;
  en particulier les raisonnements arithmétiques sont mis en échec ;
- les expressions littérales sont introduites comme un outil pour résoudre un problème ;
- la lettre a le rôle d'une variable ou une indéterminée ;
- l'égalité entre deux expressions littérales peut être abordée ;
- la validation et l'invalidation des réponses des élèves peut être faite par les élèves.

Consigne 5 :

Analyser ces trois situations d'introduction.

On s'intéressera aux points suivants :

- l'introduction de la lettre (Par qui ? Pour quoi faire ?)
- la motivation du calcul littéral
- l'insuffisante du cadre numérique
- le statut de la lettre
- la validation et l'invalidation du travail produit par les élèves

Activité 1 Rectangles cousins

Dans cette activité, on s'intéresse uniquement aux rectangles dont le périmètre est 40 cm.

1. Un rectangle a pour longueur L = 16,5 cm. Calcule sa largeur l puis son aire.
2. Donne les mesures d'un autre rectangle de même périmètre.
3. La longueur peut-elle valoir 8 cm ? Et 21 cm ?
   Justifie et donne toutes les valeurs possibles pour la longueur.
4. Écris une expression pour calculer la largeur l en fonction de la longueur L.
5. En voulant exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de sa longueur L, des élèves ont donné les réponses suivantes.

   Gaël : $\mathcal{A} = L \times 20 - L$ Hamid : $\mathcal{A} = L \times (20 - L)$ Karen : $\mathcal{A} = 20\,L - L^2$

   Inès : $\mathcal{A} = 2 \times L + 2 \times (20 - L)$ José: $\mathcal{A} = L \times 20 - 2 \times L$ Liam: $\mathcal{A} = L^2 - 20 \times L$

   Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Y a-t-il plusieurs bonnes réponses ?

Introduction de la lettre	
Motivation de l'algèbre	
Insuffisance du numérique	
Statut de la lettre	
Erreurs/ Moyens de contrôle	

Danaé a écrit le programme de calcul ci-contre.

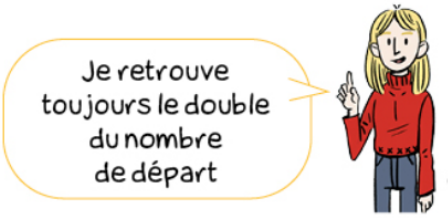
- Choisir un nombre.
- Ajouter 4.
- Multiplier par 2.
- Soustraire 8.

a. Quel nombre obtiendra Danaé si elle choisit comme nombre de départ :

• 5 ? • 2,3 ? • 13 ?

Que remarque-t-on ?

b. On se propose de vérifier que l'affirmation ci-contre de Danaé est vraie.

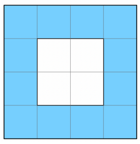


On note x le nombre choisi au départ et D le résultat obtenu.

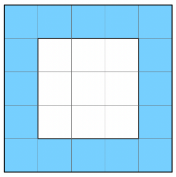
- Vérifier que $D = 2(x + 4) - 8$.
- Distribuer le nombre 2 sur les termes entre parenthèses ; pour cela recopier et compléter $D = 2x + \dots - 8$.
- Conclure sur l'affirmation de Danaé.

Introduction de la lettre	
Motivation de l'algèbre	
Insuffisance du numérique	
Statut de la lettre	
Erreurs/ Moyens de contrôle	

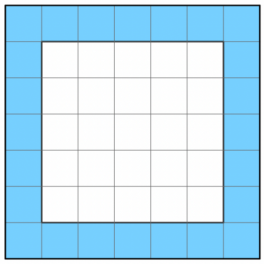
A chaque étape, la figure est constituée d'un grand carré blanc entouré de petits carrés bleus.



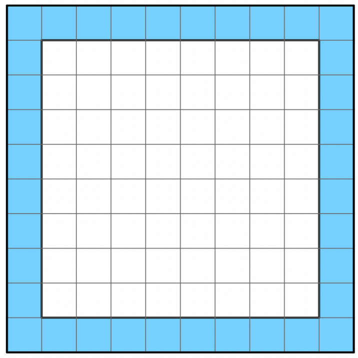
Etape 2



Etape 3



Etape 5



Etape 8

1) Pour les étapes 2, 3, 5 et 8, quel est le nombre de petits carrés bleus ?
2) Quel est le nombre de petits carrés bleus à l'étape 13 ?
3) Quel est le nombre de petits carrés bleus à l'étape 65 ?
4) Ta méthode de calcul pour déterminer le nombre de petits carrés bleus est-elle valable quelle que soit l'étape ? Si oui, la décrire à l'aide de mots.
5) Choisir une méthode de votre choix puis l'écrire à l'aide un calcul mathématique. qui resterait valable pour toutes les étapes.

Introduction de la lettre	
Motivation de l'algèbre	
Insuffisance du numérique	
Statut de la lettre	
Erreurs/ Moyens de contrôle	

Consigne 6 :

Durant la phase de recherche de la question 3, en circulant dans la salle, vous avez vu les productions suivantes d'élèves :

$65 \times 4 + 4 = 264$

$67 \times 4 - 4 = 264$

$(65+1) \times 4 = 264$

$2 \times 67 + 2 \times 65 = 264$

$65 \times 65 = 4225$
$67 \times 67 = 4489$
$4489 - 4225 = 264$

1) Lors la correction, quelle(s) production(s) choisiriez-vous d'exploiter ? Justifier.

2) Que feriez-vous lors de la correction si vous avez constaté que les élèves avaient utilisé uniquement deux méthodes de calcul différentes ?

Consigne 7 :

Lors de la mise en commun de la question 4, les productions suivantes d'élèves ont été écrites au tableau. Comment vous y prendriez-vous pour convaincre votre classe que ces méthodes sont valables ?

4/ Oui ma démarche peut marcher sur différents carrées car elle constitue à ~~faire~~ multiplier le nombre de carrées du côté par 4 puis on additionne 4 on trouve le résultat !

Oui elle est valable quelque soit le nombre de de petits carrés sur un coté du grand carré blanc.
Nombre de carrés blanc sur un côté+2
Nombre obtenue x2
Nombre obtenue + Nombre de carrés blancs d'un côté x2

on fait le côté blanc plus 1 puis fois 4 et on trouve le nombre des petits carrés gris.

- on multiplie le nombre de petit carré blanc d'un côté du grand carré blanc par lui-même
- On ajoute 2 au nombre de petits carrés blancs d'un côté du grand carré blanc
- On multiplie le résultat obtenu par lui-même
- On soustrait les résultats des 2 multiplications.

Consigne 8 :

Lors de la mise en commun de la question 5, les productions suivantes d'élèves ont été écrites au tableau. Que demanderiez-vous à la classe pour améliorer ces écritures ?

$(x + g) \times y = s$
x = un nombre
g = 1
y = 4
s = résultat

A = coté du petit carré
B = A + 2
$B^2 - A^2 =$

$x \times 4 + 4$
nombre de carrés d'un côté blanc

c + b + c + b
c = nombre de petits carrés blancs
b = nombre de petits carrés gris

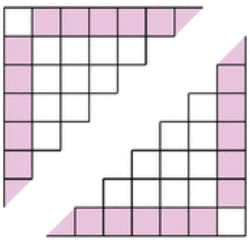
$(a \times 4) - 4 = b$ / $a = c + 2$

$A \times 4 = B$
$B + 4 = C$
A = nombre des petits carrés sur le côté du grand carré blanc.
B = résultat de la multiplication

Consigne 9 :

Comparer cette activité avec celle que l'on vient d'étudier.

Activité 2 : Un carré sans coins



On a représenté ci-contre deux parties d'un carré. Il est constitué de petites cases ayant pour côté un carreau. Celles qui se trouvent sur les bords sont coloriées en rose, sauf les quatre coins.

1. Réalise une figure de 3 carreaux de côté. Indique le nombre de cases roses. Recommence avec un carré de 4 carreaux de côté puis avec un carré de 5 carreaux de côté.

2. Quel est le nombre de cases roses pour un carré de 6 carreaux de côté ? Et pour 12 carreaux ? Et pour 100 ?

3. Le professeur appelle x le nombre de carreaux d'un côté du carré et G le nombre de cases roses. Des élèves ont obtenu les expressions suivantes :

Anis: G = $x \times 4 - 2$	Chloé: G = $4 \times (x - 2)$	Enzo: G = $4 \times x - 8$
Basile: G = $x - 2 \times 4$	Dalila: G = $(x - 2) \times 4$	Florian: G = $4 \times x - 4$

Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Pourquoi ? Y a-t-il plusieurs bonnes réponses ? Justifie.

4. Calcule le nombre de cases roses lorsque $x = 6$ puis $x = 24$ et enfin pour $x = 100$.