Nombres relatifs et contexte interne aux mathématiques

Dans le projet du nouveau programme de 2025 du cycle 4, le contexte mathématique est clairement mis en avant pour introduire les opérations avec les nombres relatifs.
Ce document veut mettre à disposition des professeurs tous les éléments théoriques que le choix du contexte interne au mathématiques utilisent. Libre ensuite à chaque professeur de les utiliser ou pas dans ses cours. L'article qui se trouve dans la **revue repères Irem n°73** relate un exemple d'une telle approche dans les classes.

Rappelons la construction mathématique de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

> On quotiente l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par la relation d'équivalence
> $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Bien évidemment, on ne peut pas utiliser une telle construction avec des collégiens.
Voici une transposition de cette construction que j'utilise en classe depuis plus de 15 ans :

> Avec les nombres positifs, on ne peut pas résoudre le problème suivant 13 + …. = 7.
> En effet, avec les nombres positifs, il est impossible d'effectuer des différences où le nombre en second est supérieur au nombre en premier.
> Pour résoudre ce problème, les mathématiciens ont rendu possible la différence 7 - 13 ainsi que toutes les différences $a - b$ où a et b sont deux nombres positifs avec $a < b$.
> Par exemple, $7 - 13$, $12 - 18$, $10 - 16$, $14 - 20$, $0 - 6$ sont des écritures d'un seul et même nombre. Ce nombre est un nombre négatif que l'on notera désormais -6.

Ordonner deux nombres négatifs

De cette définition découle immédiatement, la comparaison de deux nombres négatifs.
-6 > -7 car -6 = $0 - 6$ et -7 = $0 - 7$

Opposé d'un nombre relatif

La définition découle du théorème suivant :

> Soit a un nombre relatif.
> Il existe un unique nombre dont la somme avec le nombre a est nulle.
> Ce nombre est appelé l'opposé du nombre a. On le note $Opp(a)$.

Il n'est pas évident d'après la définition d'un nombre négatif que l'opposé de 4 s'écrit -4.
On a besoin de la propriété suivante que l'on admet.

> Propriété :
> Pour tous les nombres a, b et c, on a : $a + b - c = a + (b - c)$

Exemple générique :

4 + (-4) = $4 + (0 - 4) = (4 + 0) - 4 = 4 - 4 = 0$

Addition de deux nombres négatifs

Pour l'addition de deux nombres relatifs, plusieurs démarches permettent de justifier les calculs. Contrairement à ce que l'on constate dans la quasi-totalité des ressources, la définition de l'opposé d'un nombre doit précéder l'addition de nombres relatifs car elle intervient dans la justification des transformations d'écriture des calculs.

Exemples génériques :

$5 + (-3) = [2 + 3] + (-3) = 2 + [3 + (-3)] = 2 + 0 = 2$

$5 + (-3) = 5 + (0 - 3) = (5 + 0) - 3 = 5 - 3 = 2$

$(-7) + 3 = (-7) + (7 - 4) = [(-7) + 7] - 4 = 0 - 4 = -4$

$(-7) + 3 = 3 + (-7) = 3 + (0 - 7) = (3 + 0) - 7 = 3 - 7 = -4$

$(-4) + (-9) = (-4) + (4 - 13) = [(-4) + 4] - 13 = 0 - 13 = -13$

$(-4) + (-9) = (-4) + [4 + (-13)] = [(-4) + 4] + (-13) = 0 + (-13) = -13$

$(-4) + (-9) = [(-13) + 9] + (-9) = (-13) + [9 + (-9)] = (-13) + 0 = -13$

Soustraction de deux nombres négatifs

La soustraction de deux nombres relatifs est à aborder qu'une fois que l'addition est bien comprise par les élèves. Il est donc recommandé de ne pas aborder ces deux opérations dans une même séquence.

Pour la soustraction de nombres relatifs, on utilise la définition des nombres opposés et la principe de conservation des écarts pour la soustraction.

Principe de conservation des écarts pour la soustraction :
Pour tous les nombres a, b et c, on a : $a - b = (a + c) - (b + c)$

Exemples génériques :

$5 - (-3) = [5 + 3] - [(-3) + 3] = 5 + 3$

$(-6) - 4 = [(-6) + (-4)] - [4 + (-4)] = (-6) + (-4)$

$(-7) - (-5) = [(-7) + 5] - [(-5) + 5] = (-7) + 5$

$6 - 9 = -3$ (par définition des nombres négatifs)

Remarque :

Le principe de conservation des écarts pour la soustraction et la propriété

$a + b - c = a + (b - c)$ sont à travailler en amont en calcul mental (questions flash).

Multiplication de deux nombres négatifs

Pour la multiplication de nombres relatifs, on a besoin de la propriété de la distributivité (à réactiver aussi en amont et dans un cadre numérique).

Exemples génériques :

$4{,}2 \times (-3{,}5) = 4{,}2 \times (0 - 3{,}5) = 4{,}2 \times 0 - 4{,}2 \times 3{,}5 = 0 - 4{,}2 \times 3{,}5 = 0 - 14{,}7 = -14{,}7$

$(-4{,}2) \times (-3{,}5) = (-4{,}2) \times (0 - 3{,}5) = (-4{,}2) \times 0 - (-4{,}2) \times 3{,}5 = 0 - (-14{,}7) = 0 + 14{,}7 = 14{,}7$