

Séance : Entiers relatifs, nombres relatifs.

Corrigé partiel

Vocabulaire : principe de permanence, différents sens du signe « - » : moins unaire (opposé) et moins binaire (soustraction), nombre comme opérateur.

Document 1 :

Extraits du document ressource *Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les nombres relatifs* (Eduscol, 2016). [C'est moi qui ai surligné certains passages en jaune]

Des objectifs :

L'introduction au cycle 4 des nombres décimaux relatifs vise plusieurs objectifs :

- étendre l'ensemble des décimaux positifs à un ensemble plus vaste (celui des décimaux positifs et négatifs), dans lequel toutes les soustractions sont possibles. Cette extension est réalisée de manière à maintenir les propriétés des opérations valables entre nombres décimaux positifs (**principe de permanence**) ;
- accorder le statut de nombres (en tant qu'objets mathématiques sur lesquels on peut effectuer des opérations et des comparaisons) à des réalités de la vie quotidienne situées « au-dessous de zéro » (températures, profondeurs, dettes, etc.) ;
- disposer de ces nouveaux outils pour modéliser et résoudre des problèmes de la vie courante ;
- étendre à la droite entière la graduation déjà connue de la demi-droite, repérer et se repérer sur une droite.

Des pistes et des mises en garde :

Beaucoup de situations en lien avec la vie courante peuvent illustrer l'addition de deux nombres relatifs. Celle-ci permet en effet de **modéliser soit le bilan de deux variations (gains et pertes, montées et descentes d'un ascenseur, déplacements vers la droite ou vers la gauche le long de la droite graduée), soit l'application d'une variation (augmentation, diminution) à un état (température, altitude, solde d'un compte financier, score d'un joueur)**. La variété des contextes utilisés évitera que la prégnance d'un modèle empêche la construction du statut de nombre.

Une pratique routinière, notamment sous forme de calcul mental, d'additions entre nombres relatifs permettra l'automatisation progressive de la règle d'addition, **sans qu'il soit nécessaire de la formaliser**. L'élève pourra alors s'affranchir du recours à un modèle concret ou à la droite graduée.

(...)

S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle « gain-perte », ou le modèle « montée-descente » peuvent constituer un réel **obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous deux négatifs**.

Les références à l'environnement familier des élèves et leur place dans la progression des apprentissages méritent donc d'être interrogées. Le professeur doit être conscient qu'une approche concrète, en référence à des grandeurs, peut engendrer des obstacles à plus ou moins long terme,

notamment parce qu'il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication. Par ailleurs, il faut savoir que certains élèves éprouvent des difficultés à s'affranchir du contexte d'introduction des nombres. Ceux-ci imposent en effet une image mentale dont il peut être difficile de se départir, empêchant *in fine* d'attribuer aux négatifs leur statut de nombre. Il importe donc de ne pas recourir à un unique modèle, par exemple celui des températures. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques.

Aucun mode d'introduction des nombres négatifs ne peut, à lui seul, permettre l'atteinte de tous les objectifs visés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir (par exemple les différents statuts du signe « moins »). Il importe toutefois que l'élève soit capable, en fin de cycle, d'appréhender un nombre négatif comme élément d'un nouvel ensemble de nombres, structuré par des opérations qui prolongent celles des décimaux positifs.

Enfin, l'apprentissage du calcul sur ces nombres ne saurait se confiner à l'application de règles formelles imposées d'emblée à l'élève sans aucune justification.

Une progression suggérée :

Etape 1 : introduction à partir des programmes de calcul

[le détail de cette approche est disponible en ligne

[PER-nombres-relatifs-5ème.pdf — Formations de formateurs - ifé \(ens-lyon.fr\)](#)]

Une introduction des nombres négatifs (d'abord entiers puis décimaux non entiers) sans référence à des contextes concrets peut se faire à partir de l'équivalence de programmes de calcul.

L'équivalence des programmes de calcul « ajouter 3 puis soustraire 5 », « ajouter 2 puis soustraire 4 », « ajouter 1 puis soustraire +3 », « ajouter 0 puis soustraire 2 » permet d'écrire : $3 - 5 = 2 - 4 = 1 - 3 = 0 - 2$. On convient alors de coder par (-2) le résultat commun à toutes ces soustractions (et à beaucoup d'autres encore...).

En début d'apprentissage, l'utilisation de parenthèses englobant à la fois le signe « moins » et la valeur absolue permet d'éviter la confusion du signe « moins » intervenant dans le codage d'un nombre négatif avec le signe opératoire de la soustraction.

(...)

La définition de l'opposé d'un nombre permet de compléter le corpus d'égalités à trous par des égalités du type $7,1 + \dots = 0$ ou $(-7,1) + \dots = 0$.

Pour éviter les confusions, on peut convenir, en début d'apprentissage, de noter $op(7,1)$ l'opposé du nombre $7,1$.

Cette notation sera, un peu plus tard, remplacée d'abord par la notation $(-7,1)$, puis par $-7,1$ sans négliger d'aborder avec les élèves les différentes significations que prend alors le signe « moins » :

- marqueur d'un nombre négatif dans $(-7,1)$;
- signe de soustraction dans $0 - 7,1$ ou dans $20 - 27,1$;
- marqueur de l'opposé, par exemple dans l'écriture $-(-7,1)$.

(...)

Etape 2 : repérage sur la droite graduée

Si le classement des nombres relatifs ne pose pas de difficulté particulière lorsqu'ils sont exprimés sous forme chiffrée, la difficulté apparaît lorsqu'ils sont désignés sous forme littérale, les élèves ayant du mal à concevoir que $-a$ puisse, sous certaines conditions, désigner un nombre positif.

Etape 3 : addition et soustraction

L'introduction de la soustraction suppose que soient bien installées l'addition et la notion d'opposé, $a - b$ étant défini comme égal à $a + \text{op}(b)$. Il est alors possible d'interpréter le résultat d'une addition à trou comme la différence de deux nombres relatifs.

Etape 4 : multiplication et division

La multiplication des décimaux relatifs pourra être approchée en plusieurs étapes, conduites par le professeur, sur des exemples génériques simples, une fois que la compréhension et l'utilisation de l'addition et de la soustraction aura été stabilisée :

1. la multiplication d'un entier naturel par un entier négatif sollicite le sens premier de la multiplication comme addition itérée : $2 \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$ (verbalisée en « deux fois (-3) ») ;
2. le principe de permanence permet d'étendre aux nombres relatifs une égalité du type $2 \times 3 = 3 \times 2$ et de définir $(-3) \times 2$ comme étant égal à $2 \times (-3)$;
3. la justification de l'égalité $(-2) \times (-3) = 6$ repose sur le fait que $(-2) \times (-3) + 2 \times (-3) = ((-2) + 2) \times (-3) = 0 \times (-3) = 0$, à condition d'admettre l'extension aux nombres relatifs de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, connue chez les décimaux positifs, et le résultat de la multiplication par 0.

La règle permettant de calculer le produit de deux nombres relatifs pourra alors être institutionnalisée, notamment au niveau du signe du produit.

Questions :

1. A propos du « principe de permanence » :
 - a. Citer plusieurs propriétés des nombres relatifs qui sont sélectionnées en vertu de ce principe. Vous explicitez la propriété que l'on souhaite conserver.

L'addition et la soustraction conservent l'ordre dans \mathbf{N} , on souhaite qu'il en aille de même dans \mathbf{N} . Donc (-2) et (-3) sont rangés comme $(-2)+3$ et $(-3)+3$, on a donc $(-2) > (-3)$. On peut penser en termes de translations sur la file numérique (si on se limite au entiers) ou la droite numérique.

La définition de la soustraction dans l'ensemble des relatifs par $A - B = A + \text{op}(B)$ (cette égalité est la *définition* de l'opération notée en rouge) prolonge l'addition des relatifs (elle-même ramenée à la soustraction des entiers naturels). En effet, si A et B sont entiers naturels et $A \geq B$ on a $A - B = A + \text{op}(B) = A - B$.

Dans \mathbf{N} , on connaît le principe de conservation des écarts :

- Quels que soient les entiers naturels a, b, c tels que $a \geq b$, on a $a - b = (a+c) - (b+c)$
- En le prolongeant à \mathbf{Z} on justifie, par exemple, $5 - (-2) = (5+2) - ((-2)+2) = 7 - 0 = 7$.

Produit par un entier positif comme addition itérée et commutativité de la multiplication :

- Si l'addition des relatifs est définie, alors le produit d'un relatif par un naturel l'est aussi : $3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5)$.

Le raisonnement qui justifie dans \mathbf{N} la distributivité de la multiplication sur l'addition le justifie aussi pour le produit d'un naturel par un relatif.

Principe de permanence : on souhaite que la multiplication dans \mathbf{Z} possède plusieurs propriétés qu'elle possédait dans \mathbf{N} : commutativité, distributivité de \times sur $+$, caractère absorbant de la multiplication par 0.

En vous inspirant du document ressource cité plus haut, justifiez $(-4) \times (-5) = 20$. Explicitiez les propriétés utilisées :

On va montrer que $(-4) \times (-5)$ est l'opposé de -20 . Cela revient à montrer que sa somme avec 20 est nulle.

$$\begin{aligned} \text{Or } (-4) \times (-5) + (-20) &= (-4) \times (-5) + (-4) \times 5 && \text{(on sait multiplier un négatif par un positif)} \\ &= (-4) \times ((-5) + 5) && \text{(conservation de la distributivité de } \times \text{ sur } +) \\ &= (-4) \times 0 && \text{(définition de l'opposé ou addition dans } \mathbf{Z}) \\ &= 0 && \text{(0 est absorbant pour la multiplication)} \end{aligned}$$

Variante, avec la double distributivité :

$$(10 - 4) \times (10 - 5) = 6 \times 5 = 30 \quad \text{Ce calcul a entièrement lieu dans } \mathbf{N}$$

Mais on peut calculer autrement :

$$\begin{aligned} (10 - 4) \times (10 - 5) &= (10 + \text{op}(4)) \times (10 + \text{op}(5)) && \text{(propriété de l'addition dans } \mathbf{Z}) \\ &= 10 \times 10 + 10 \times \text{op}(5) + \text{op}(4) \times 10 + \text{op}(4) \times \text{op}(5) && \text{(permanence de la distributivité)} \\ &= 100 - 50 - 40 + \text{op}(4) \times \text{op}(5) && \text{(produit d'un relatif par un naturel)} \\ &= 10 + \text{op}(4) \times \text{op}(5) \end{aligned}$$

On a donc $30 = 10 + \text{op}(4) \times \text{op}(5)$, d'où $\text{op}(4) \times \text{op}(5) = 20$.

La règle des signes pour la multiplication garantit celle pour le quotient : $(-4) / (-3)$ est positif, car son produit par (-3) est négatif (c'est (-4)).

2. En quoi l'entrée par le « codage de programmes de calculs équivalents » renvoi-t-elle à la construction savante de \mathbf{Z} à partir de \mathbf{N} ?

La construction standard de symétrisation d'un monoïde (c'est le cas de $(\mathbf{N}, +)$: loi de composition interne, associative, à élément neutre) consiste à partir de l'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et de quotienter par la relation d'équivalence $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$. Cette relation peut s'appeler « même écart ». Elle est l'équivalent additif de la relation « même rapport » qui sert à construire \mathbf{Q} à partir de \mathbf{Z} (pour mémoire, sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \times d = b \times c$). On a ainsi dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $(4,3) \sim (10,9) \sim (1,0)$ etc. Dans l'ensemble quotient, on note la classe de ces couples « 1 », en identifiant a et la classe de $(a,0)$. On a de même $(4,6) \sim (8, 10) \sim (0,2)$... dans l'ensemble quotient la classe de ces couples est notée « -2 » ou « (-2) ». Il existe une sur \mathbf{Z} une unique structure de groupe ordonné telle que l'une injection de \mathbf{N} dans \mathbf{Z} ($a \rightarrow$ classe de $(a,0)$) soit à la fois croissante (morphisme pour la structure d'ordre) et un morphisme de monoïdes.

3. A propos de l'addition des relatifs :

Ce document d'accompagnement suggère que l'addition des relatifs peut faire l'objet d'une longue appropriation par calcul réfléchi et/ou usage de différents modèles, plutôt que d'une réduction rapide à des règles (par ailleurs difficiles à énoncer).

- a. Calculer $3 + (-2)$ $(-2) + 3$ $4 + 3$ et $(-3) + (-5)$ en vous appuyant sur deux modèles :

- Celui de la droite graduée et du modèle « position + déplacement »
- Celui de la droite graduée et du modèle « composition de déplacements »
- Citer deux avantages du second modèle sur le premier.

Le second modèle fait jouer des rôles symétriques aux deux termes de la somme, ce qui (1) va dans le sens de la commutativité de l'addition, (2) permet de ne pas faire évoluer le sens des termes dans une longue somme ($2 + (-3) + 7$) d'une manière qui dépend en outre de l'ordre choisi pour les opérations.

- b. Calculer les deux premières sommes sans modèles, en utilisant l'associativité de l'addition et la définition de l'opposé d'un nombre.

$$3 + (-2) = 1 + 2 + (-2) = 1 \quad (-2) + 3 = (-2) + 2 + 1 = 1$$

- c. Une élève écrit le calcul réfléchi suivant :

$$193 + (-171) + 7 + (-9) = 200 + (-180) = 20 + 180 + (-180) = 20$$

A-t-elle utilisé d'autres propriétés que l'associativité de l'addition et la définition de l'opposé ?

Oui : la commutativité de l'addition et l'addition de deux entiers relatifs (pour $(-171) + (-9) = (-180)$).

- d. Une élève écrit le calcul réfléchi suivant :

$$123 + (-171) + 7 + (-9) = 130 + (-180) = 130 + (-130) + (-50) = (-50)$$

A-t-elle utilisé d'autres propriétés que l'associativité de l'addition et la définition de l'opposé ?

Idem

4. A propos de la distinction entre le « - » unaire (aussi noté « op » pour « opposé ») et le « - » binaire :

- a. En utilisant le vocabulaire mathématique du supérieur, énoncer les principales propriétés de ces deux opérateurs.

Op est une application de \mathbf{Z} dans \mathbf{Z} , morphisme de groupe $(\mathbf{Z}, +)$, décroissant, involutif (propriété fondamentale : $\forall a \in \mathbf{Z}, \text{op}(\text{op}(a)) = a$).

Le - binaire est une loi de composition interne, non commutative, non associative ($(3 - 2) - 5 = -4$ mais $3 - (2 - 5) = 0$), sans élément neutre (0 est neutre à droite mais pas à gauche : $5 - 0 = 5$ mais $0 - 5 \neq 5$) etc.

- b. Dans la progression suggérée par le document ressource, lequel des deux est introduit en premier ? Les deux sont-ils indépendants l'un de l'autre ?

Le - binaire dans \mathbf{N} est connu depuis l'école primaire (CP ou CE1).

Lorsqu'on aborde les entiers relatifs : op est introduit d'abord, à l'occasion de l'addition des relatifs. Op sert à définir le - binaire dans \mathbf{Z} : $a - b = a + \text{op}(b)$. On vérifie que cette opération dans \mathbf{Z} prolonge bien la soustraction dans \mathbf{N} : $12 - 4 = 12 + \text{op}(4) = 8 + 4 + \text{op}(4) = 8$.

- c. Que dire à un élève qui a retenu que « - est le symbole du négatif » ?

Deux problèmes : pas de distinction entre les deux « – »

$-(-2)$ et $-a$ ne sont pas ou pas nécessairement (resp.) négatifs.

5. A propos de la multiplication des relatifs :

- a. Le document ressource suggère distinguer deux étapes dans l'exposé (voire la justification) des entiers relatifs, lesquelles ?

Tant que l'un des deux facteurs est un entier naturel (non nul), la multiplication peut-être définie comme addition itérée (quitte à admettre la commutativité). Pour justifier la règle de multiplication de deux négatifs, on ne peut se ramener à cette définition de la multiplication, et faire intervenir d'autres propriétés à prolonger (en l'occurrence : la distributivité de \times sur $+$).

- b. Le document ressource suggère que les modèles utilisés pour donner une interprétation aux nombres entiers relatifs et guider dans les tâches de comparaison, rangement, addition et soustraction d'entiers relatifs peuvent ne pas aider, voire peuvent faire obstacle à la conceptualisation de la multiplication dans \mathbb{Z} . Illustrer ce point en rappelant les principaux modèles.

Modèle « températures » : à peu près OK pour l'ordre (même si dire que $-17 < -5$ car -17°C c'est « moins chaud » que -5°C est inhabituel (on dit plutôt que c'est « plus froid »). Aspect additif : l'addition des températures n'a pas de sens (ce qui pose problème pour la définition de l'opposé), par contre les sémantiques « état + transformation » et « composition de transformation » ont un sens. Pas d'interprétation dans ce modèle pour la multiplication de deux négatifs.

Modèle « droite graduée » : idem.

Modèle « gains et pertes » : l'aspect « bilan » fait rencontrer la relation d'équivalence « même écart » (le bilan est le même pour « gains 3 pertes 5 » et « gains 10 pertes 12 », bilan qu'on peut résumer par « pertes 2 » ou « -2 »). Cette opération « bilan » permet aussi d'introduire les notions d'opposé et l'addition des relatifs. Pas de sémantique pour le produit de deux négatifs : on ne multiplie pas des pertes par des pertes.

Modèle : résumé de programmes de calculs additifs. Même chose que pour gains et pertes.

- c. A l'école primaire, la multiplication des entiers naturels peut-être défini de deux manières : soit par addition itérée, soit d'une autre manière. Quelle est cette autre manière ? S'adapte-t-elle à la multiplication de deux entiers négatifs ?

Sémantique du dénombrement des produits cartésiens d'ensembles finis (i.e. des collections admettant un arrangement rectangulaire). Pas adapté aux négatifs, à moins d'introduire une sémantique « segments orientés - aires orientés ».

- d. Si vous n'avez pas encore enseigné la règle des signes, que pouvez-vous dire à un élève qui avance l'idée suivante : « L'opposé de $(-2) + (-3)$ est $2+3$, donc l'opposé de $(-2) \times (-3)$ est 2×3 » ?

Plusieurs manières pour infirmer la fin de l'affirmation :

- Si je connais la règle des signes, $(-2) \times (-3) = 6$ et pas (-6)
- Si je connais le lien entre « opposé » et produit par « -1 », je peux écrire « l'opposé de $(-2) \times (-3)$ est $(-1) \times (-2) \times (-3) = 2 \times (-3) = -6$ »
- $(-2) \times (-3) + (-2) \times 3 = (-2) \times (-3+3) = 0$, donc l'opposé de $(-2) \times (-3)$ c'est $(-2) \times 3$ c'est-à-dire -6 .

- e. Dans la partie « exercice » du Manuel *Transmaths 4^{ème}* (Nathan, 2016) on trouve l'exercice suivant :
Vous semble-t-il pertinent ?

84 Analyser des informations

Chercher - Raisonner - Communiquer

A est le produit de 45 nombres relatifs (non nuls) comportant 25 facteurs négatifs.

B est le produit de 21 nombres relatifs (non nuls) comportant 9 facteurs positifs.

Donner, lorsque c'est possible, le signe de chaque résultat, sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible.

- a. $A \times B$ b. $A : B$ c. $A + B$
d. $A - B$ e. $B - A$ f. A^2

Document 3 : Une approche par les suites logiques (peu utilisée en France)

Document 3.1 : source¹ <https://variationtheory.com/2018/02/14/adding-negative-numbers-pattern-spotting/>

1. Pattern spotting

$3 + 5 =$	$(-3) + 5 =$
$3 + 4 =$	$(-3) + 4 =$
$3 + 3 =$	$(-3) + 3 =$
$3 + 2 =$	$(-3) + 2 =$
$3 + 1 =$	$(-3) + 1 =$
$3 + 0 =$	$(-3) + 0 =$
$3 + (-1) =$	$(-3) + (-1) =$
$3 + (-2) =$	$(-3) + (-2) =$
$3 + (-3) =$	$(-3) + (-3) =$
$3 + (-4) =$	$(-3) + (-4) =$
$3 + (-5) =$	$(-3) + (-5) =$

Question 1 : Pourquoi est-il plus difficile de remplir la colonne de droite que celle de gauche ?

Pour compléter la liste il faut savoir compléter une ligne et connaître le lien « logique » entre deux lignes successives. A gauche les deux se font à partir de l'addition – connue – entre positifs. A droite :

- aucune ligne ne fournit de point de départ évident : soit il faut utiliser la définition de l'opposé pour savoir que $(-3) + 3$ vaut 0, soit reprendre ce résultat de la colonne de gauche. Du coup, on ne commence par la ligne du haut, il est plus difficile pour les élèves de démarrer.

¹ Consulté le 8/12/2020

- Pour trouver le lien « logique » on ne peut, comme à gauche, partir de plusieurs valeurs connues et qui s'enchaînent ; il faut repérer des liens entre des calculs avant de connaître le résultat des calculs (ici : $(-3) + 5$ c'est 1 de plus de $(-3) + 4$).

Document 3.2 :

Sebastian Rezat (2019). *Extension of number systems: continuities and discontinuities revisited*. 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht University.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436283/document>

<p>a)</p> $\begin{array}{r} 3 - 2 = \underline{\quad} \\ 3 - 1 = \underline{\quad} \\ 3 - 0 = \underline{\quad} \\ 3 - \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ 3 - \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ 3 - \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ \dots \end{array}$	<p>e)</p> $\begin{array}{r} 3 - (-1) = \underline{\quad} \\ 2 - (-1) = \underline{\quad} \\ 1 - (-1) = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} - (-1) = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} - (-1) = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} - (-1) = \underline{\quad} \end{array}$
--	---

Fig. 3: Pattern generalization tasks for the subtraction of integers

Question : Comparer avec les deux séries du document précédent.

Le document précédent porte sur l'addition, celui-ci sur la soustraction.

Dans le 1^{er} document le terme de gauche est constant et celui de droite variable, ici ça change entre les 2 colonnes.

La colonne de gauche du doc 2 est semblable à la colonne de gauche du doc 1 : on part d'une série embrayée par des calculs explicites dans **N**.

La colonne de droite du doc 2 est semblable à celle de droite du doc 1 : il faut repérer un point départ qui n'est pas sur la 1^{ère} ligne (mais $(-1) - (-1) = 0$, si le sens fondamental de la soustraction est conservé dans le passage de **N** à **Z**), et repérer un lien numérique entre des calculs dont on ne connaît pas – au départ – le résultat.

In our empirical investigation of students' behavior when working on these tasks we find both, students who solve the tasks correctly based on the pattern (Fig. 4, left) and students, who solve each task separately and show a natural number bias, which relates to the lowering effect of subtraction (Fig. 4, middle and right):

$\begin{array}{r} 3 - 2 = \underline{1} \\ 3 - 1 = \underline{2} \\ 3 - 0 = \underline{3} \\ 3 - (-1) = \underline{4} \\ 3 - (-2) = \underline{5} \\ 3 - (-3) = \underline{6} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 - 2 = \underline{1} \\ 3 - 1 = \underline{2} \\ 3 - 0 = \underline{3} \\ 3 - (-1) = \underline{2} \\ 3 - (-2) = \underline{1} \\ 3 - (-3) = \underline{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 - 2 = \underline{1} \\ 3 - 1 = \underline{2} \\ 3 - 0 = \underline{3} \\ 3 - (-1) = \underline{-4} \\ 3 - (-2) = \underline{-5} \\ 3 - (-3) = \underline{-6} \end{array}$
--	--	---

Fig. 4. Three exemplary student solutions of the task in Fig. 3.

Question 2 : A quel obstacle didactique S. Rezat fait-il allusion lorsqu'il parle de « *lowering effect* » ?

Question 3 : Plus généralement, quel lien entre ces activités et le principe de permanence.

Le principe de permanence est utilisé « en acte » et conduit à des conjectures : si certaines propriétés connues des nombres entiers et de leurs opérations se prolongeaient aux relatifs, alors on aurait ... Cela permet de mener en classe un travail (1) de formulation de certaines propriétés, (2) de montrer leur caractère plausible (en tout cas plus qu'un « règle » concurrente).

Question 4 : Ces activités fournissent-elles des outils de conjecture ? de justification ? de mémorisation ?

Question 5 : Proposer une activité sur ce modèle permettant de conjecturer la règle des signes.

$$3 \times 3 = \quad 3 \times 2 = \quad 3 \times 1 = \quad 3 \times 0 = \quad 3 \times (-1) = \quad 3 \times (-2) = \quad 3 \times (-3) = \dots$$

$$3 \times (-3) = \quad 2 \times (-3) = \quad 1 \times (-3) = \quad 0 \times (-3) = \quad (-1) \times (-3) = \quad (-2) \times (-3) = \dots$$

Réponse :

$$3 \times 3 = 9 \quad 3 \times 2 = 6 \quad 3 \times 1 = 3 \quad 3 \times 0 = 0 \quad 3 \times (-1) = -3 \quad 3 \times (-2) = -6 \quad 3 \times (-3) = -9 \dots$$

$$3 \times (-3) = -9 \quad 2 \times (-3) = -6 \quad 1 \times (-3) = -3 \quad 0 \times (-3) = 0 \quad (-1) \times (-3) = 3 \quad (-2) \times (-3) = 6 \quad \dots$$

Pour répondre à la 2^{ème} série, on peut récupérer la 1^{ère} réponse dans la 1^{ère} série : $3 \times (-3) = -9$. Il en faut une deuxième : soit on utilise $0 \times (-3) = 0$ (compliqué), soit on utilise une autre série sur le modèle de la première pour obtenir $2 \times (-3) = -6$.

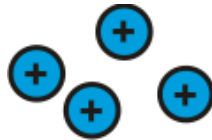
Document 4. Deux approches par couples d'entiers naturels et relation « même écart »

Document 4.1 Une proposition sur le site britannique Nrich <https://nrich.maths.org/5947>

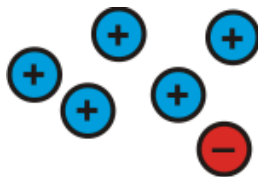
Counters Model

This model was introduced to us by Don Steward.

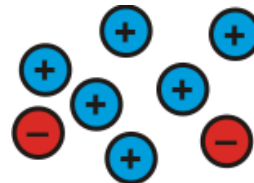
Let this be 4



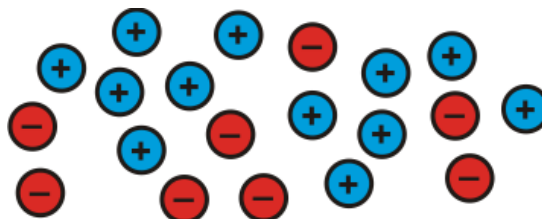
and this



and this

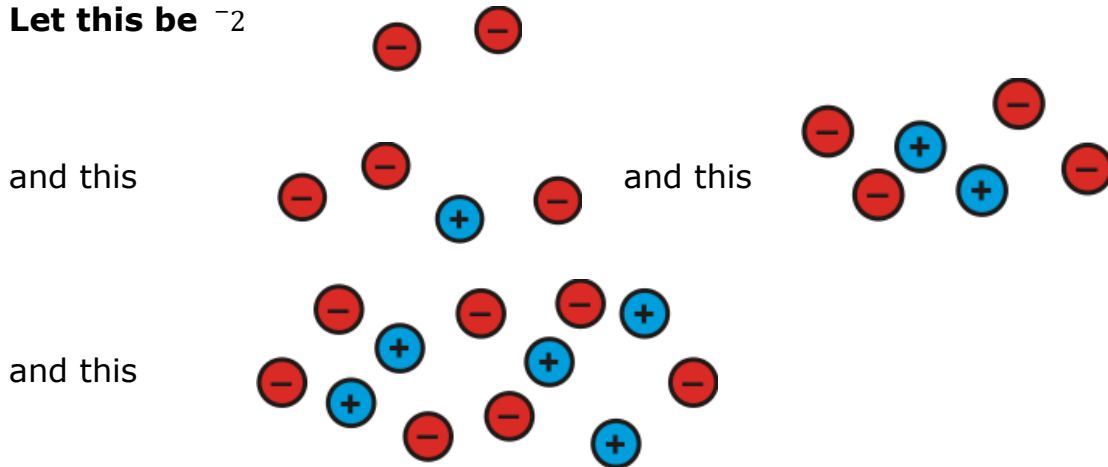


and this

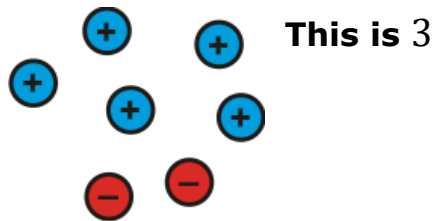


Students could be asked to suggest some other possibilities.
 Can they explain why they all represent 4?

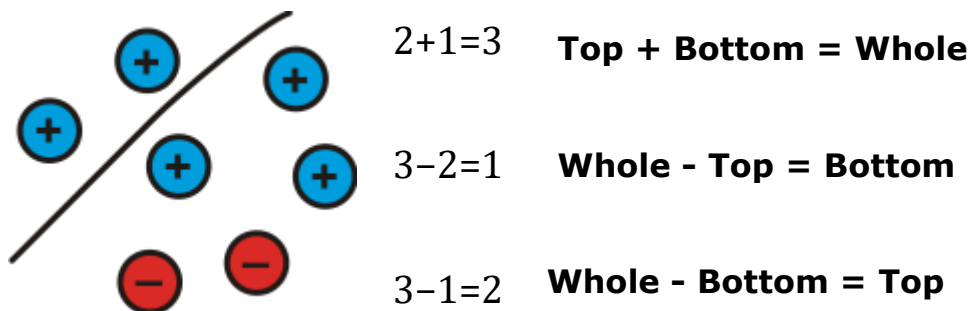
Let this be -2



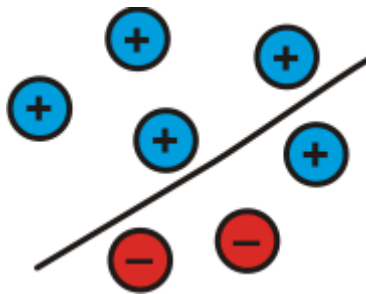
Students could be asked to suggest some other possibilities.
 Can they explain why they all represent -2 ?



When we partition it we can make different sums:

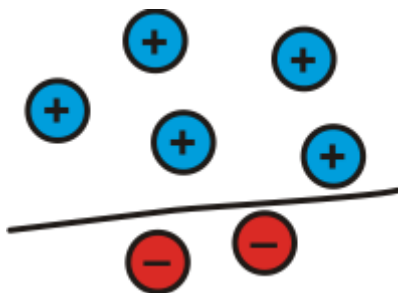


If we partition it differently we can make different sums:



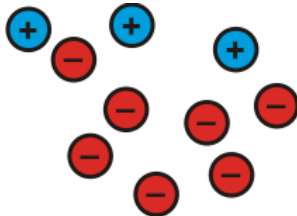
$4 + (-1) = 3$ **Top + Bottom = Whole**
 $3 - 4 = -1$ **Whole - Top = Bottom**
 $3 - (-1) = 4$ **Whole - Bottom = Top**

And we can partition it differently again:

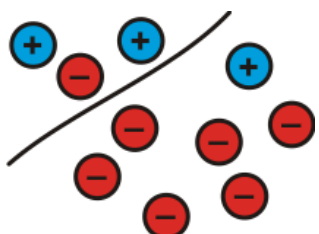


$5 + (-2) = 3$ **Top + Bottom = Whole**
 $3 - 5 = -2$ **Whole - Top = Bottom**
 $3 - (-2) = 5$ **Whole - Bottom = Top**

This is -4



When we partition it we can make different sums:



$1 + (-5) = -4$ **Top + Bottom = Whole**
 $-4 - 1 = -5$ **Whole - Top = Bottom**
 $-4 - (-5) = 1$ **Whole - Bottom = Top**

Question 1: Quelle est la principale originalité de cette approche par rapport à celles déjà rencontrées ?

Le début n'est pas entièrement original : approche par les « bilans » et usage en acte de la construction par classes d'équivalences dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; utilisation d'une notation différente pour le – unaire et le – binaire.

L'originalité est de traité simultanément l'addition et la soustraction à partir d'une sémantique « partie / tout ».

Document 4.2 : Une variante

Le programme suivant a été utilisé en 2019-2020 par un professeur stagiaire dans l'académie de Paris, pour introduire les entiers relatifs en classe de 5ème

<https://scratch.mit.edu/projects/378516865>

Question 2 : en quoi peut-on regarder cette approche comme variante de celle avec « ronds rouges / ronds bleus » ?

Les deux reposent sur l'approche « bilan » et les classes d'équivalences.

L'enseignant souhaite que les élèves s'appuient sur le « jeu » présenté dans le programme Scratch

pour produire des égalités du type : $1 \text{ loup} + 2 \text{ mouton} = 1 \text{ loup}$ puis $(+1) + (-2) = (-2)$.

Question 3 : Citer plusieurs inconvénients de la sémantique proposée dans le programme.

- La règle de base « loup + mouton donne rien » ne respecte pas la réalité (loup + mouton donne loup (au ventre bien rempli)).
- Rien ne justifie de coder la « rencontre » entre loups et moutons par un « + » ; le contexte additif n'a pas été mis en place.
- Rien ne justifie que le codage numérique de l'un des deux utilise le signe « - », qui a déjà un sens en mathématiques, celui de la soustraction.
- Rien ne justifie de coder négativement les loups plutôt que les moutons. C'est une des conséquences de cette introduction qui, sous son habillage, est en fait purement formelle : structure algébrique définie par générateurs (loup, mouton) (monoïde commutatif libre à deux générateurs) et relation « loup + mouton = 0 ». Le remplacement de loup par mouton et de mouton par loup est un isomorphisme de la structure.