renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Séance 3 :

Décimaux et rationnels aux cycles 3 et 4

Eléments de corrigé

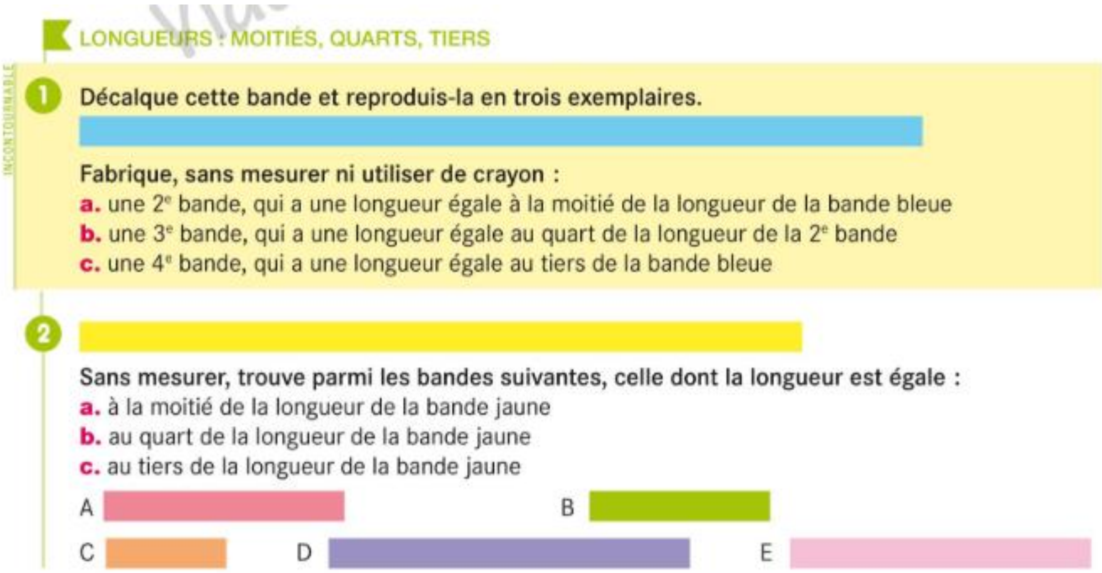
Mots-clés : fraction comme opérateur de partage et mesure de grandeur, demi-droite graduée, fractions équivalentes, relation d'équivalence « être dans le même rapport », ratio, nombre rationnel, fraction-quotient. Fraction décimale, obstacle épistémologique.

Document 1 : Découverte des fractions et des décimaux en CM1-CM2.

Extraits des manuels *Cap Maths* CM1 et CM2, édition Hatier (2017), et du *Dico Maths* (Hatier).

Les extraits ci-dessous sont reproduits dans l'ordre dans lequel on le trouve dans les manuels. En revanche, ils ne représentent qu'une partie de ce qu'on y trouve.

Doc.1.1



LONGUEURS : MOITIÉS, QUARTS, TIERS

INCONTOURNABLE

1 Décalque cette bande et reproduis-la en trois exemplaires.

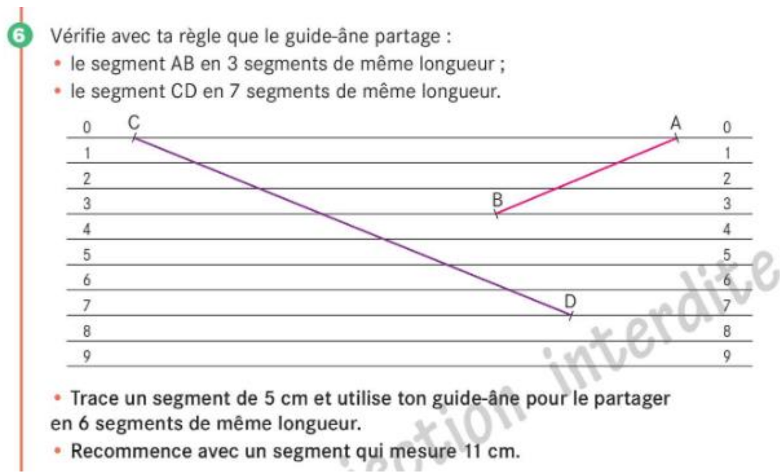
Fabrique, sans mesurer ni utiliser de crayon :

a. une 2e bande, qui a une longueur égale à la moitié de la longueur de la bande bleue
b. une 3e bande, qui a une longueur égale au quart de la longueur de la 2e bande
c. une 4e bande, qui a une longueur égale au tiers de la bande bleue

2 Sans mesurer, trouve parmi les bandes suivantes, celle dont la longueur est égale :

a. à la moitié de la longueur de la bande jaune
b. au quart de la longueur de la bande jaune
c. au tiers de la longueur de la bande jaune

En Annexe du manuel (édition 2010) : usage du guide-âne



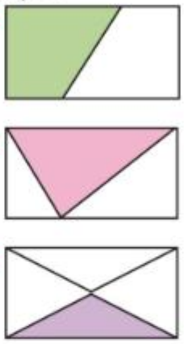
6 Vérifie avec ta règle que le guide-âne partage :
- le segment AB en 3 segments de même longueur ;
- le segment CD en 7 segments de même longueur.

- Trace un segment de 5 cm et utilise ton guide-âne pour le partager en 6 segments de même longueur.
- Recommence avec un segment qui mesure 11 cm.

Doc. 1.2

AIRES : MOITIÉS, QUARTS, TIERS

3 Dans chaque cas, indique si l'aire de la partie colorée représente bien ce qui est indiqué.



a. la moitié de l'aire du rectangle

b. le tiers de l'aire du rectangle

c. le quart de l'aire du rectangle

INCONTOURNABLE

7 Écris ces durées en minutes.
a. Un quart d'heure, c'est ... minutes.
b. Deux tiers d'heure, c'est ... minutes.
c. Quatre quarts d'heure, c'est ... minutes.
d. Deux demi-heures, c'est ... minutes.
e. Six quarts d'heure, c'est ... minutes.
f. Six tiers d'heure, c'est ... minutes.

8 ★ Gaïa a commencé un puzzle à 8 heures et il lui a fallu cinq quarts d'heure pour le terminer.
a. Exprime la durée en minutes.
b. À quelle heure a-t-elle terminé son puzzle ?

Doc. 1.3

UNITÉ 5 De nouveaux nombres

Je cherche QUELLE BANDE ?

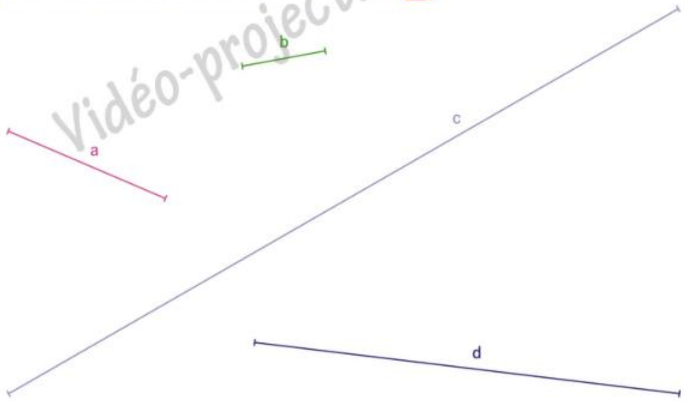
La longueur de la bande blanche est égale à 1 u.

1 u

A Sur ta fiche, choisis deux bandes : une bande parmi A, B, C et une autre parmi D, E, F.
Mesure-les avec l'unité qui t'a été remise.
Écris, sur une feuille, le nom de chaque bande et la mesure que tu as obtenue.
Tes mesures doivent permettre aux autres élèves de la classe de retrouver les deux bandes que tu as choisies.

Je m'entraine

EXPRIMER DES LONGUEURS À L'AIDE DE FRACTIONS DICO 9



INCONTOURNABLE

1 Mesure les segments a, b, c et d avec l'unité u.
Écris les résultats avec des fractions.

Doc. 1.4 (extraits du *Dico Maths*)

DICO 9

Comprendre une fraction

Le dénominateur de la fraction indique en combien de parts égales l'unité est partagée.
Le numérateur de la fraction indique combien de parts égales on a reportées.

1 u

$\frac{1}{4}$

$\frac{5}{4}$

4 est le dénominateur de ces deux fractions. Il indique qu'on a partagé l'unité en 4 parts égales.

1 est le numérateur de $\frac{1}{4}$.
Il indique qu'on a reporté 1 part.
$\frac{1}{4}$

5 est le numérateur de $\frac{5}{4}$.
Il indique qu'on a reporté 5 parts.
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

INCONTOURNABLE

2 Trace quatre segments de longueur :
a. $\frac{1}{2}$ u **c.** 1 u + $\frac{1}{2}$ u
b. $\frac{1}{4}$ u **d.** $\frac{1}{2}$ u + $\frac{1}{4}$ u

TROUVER DES ÉGALITÉS ENTRE EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES DICO 12

INCONTOURNABLE

3 **a.** Trace un segment de longueur $\frac{3}{2}$ u.
b. Écris sa longueur autrement.

INCONTOURNABLE

4 **a.** Trace un segment de longueur $\frac{5}{4}$ u.
b. Écris sa longueur autrement.

5 ★ **a.** Trace un segment de longueur 2 u + $\frac{1}{2}$ u.
b. La longueur de ce segment peut-elle aussi s'écrire :
• 1 u + $\frac{3}{2}$ u ? • $\frac{7}{4}$ u ? • $\frac{5}{2}$ u ?

EXPRIMER DES FRACTIONS AVEC DES MOTS ET AVEC DES CHIFFRES DICO 10

7 Écris ces fractions en utilisant des chiffres et la barre de fraction.
a. un demi **d.** quatre quarts
b. trois quarts **e.** neuf demis
c. cinq demis **f.** neuf quarts

8 Écris ces fractions avec des mots.
a. $\frac{3}{2}$ **b.** $\frac{1}{4}$ **c.** $\frac{5}{2}$ **d.** $\frac{2}{2}$ **e.** $\frac{7}{4}$

CONNAITRE ET UTILISER DES RELATIONS ENTRE FRACTIONS

INCONTOURNABLE

9 Pour obtenir une unité, combien faut-il :
a. de demi-unités ?
b. de quarts d'unité ?
c. de huitièmes d'unité ?

INCONTOURNABLE

10 Pour obtenir une demi-unité, combien faut-il :
a. de quarts d'unité ?
b. de huitièmes d'unité ?

Doc. 1.5

TROUVER DES RELATIONS ENTRE DES FRACTIONS ET L'UNITÉ DICO 13-14

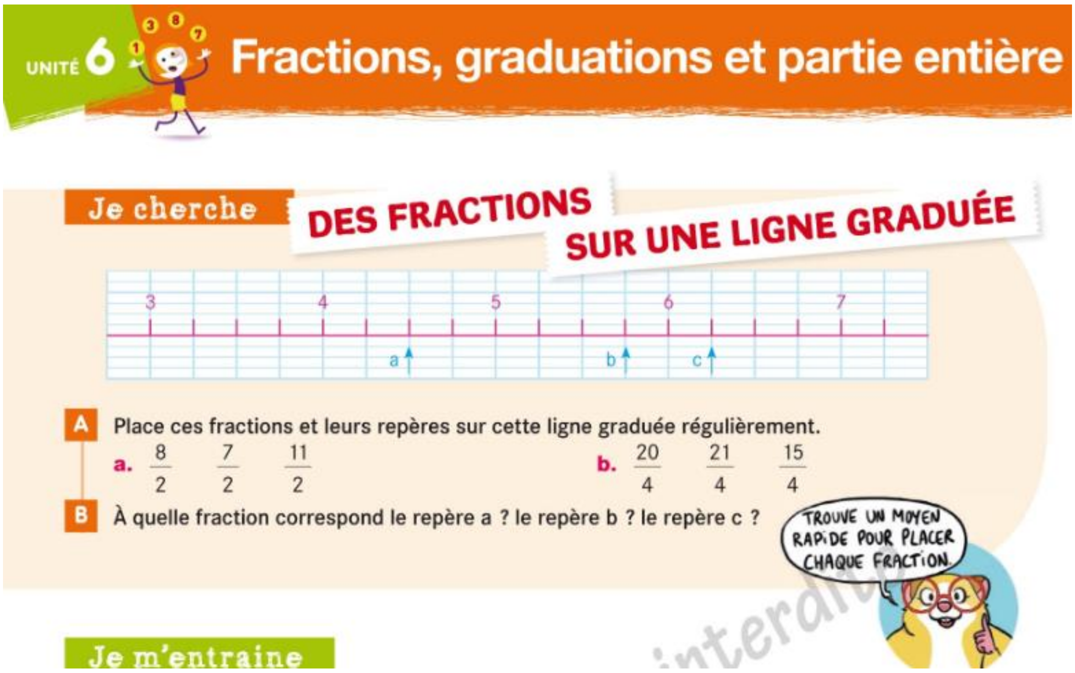
INCONTOURNABLE

5 Qui a raison ?

INCONTOURNABLE

6 Combien y a-t-il d'unités u dans :
a. $\frac{7}{2}$ u ? **b.** $\frac{13}{2}$ u ? **c.** $\frac{16}{2}$ u ? **d.** $\frac{7}{4}$ u ? **e.** $\frac{20}{4}$ u ? **f.** $\frac{25}{4}$ u ?

Doc. 1.6


UNITÉ 6 Fractions, graduations et partie entière

Je cherche DES FRACTIONS SUR UNE LIGNE GRADUÉE

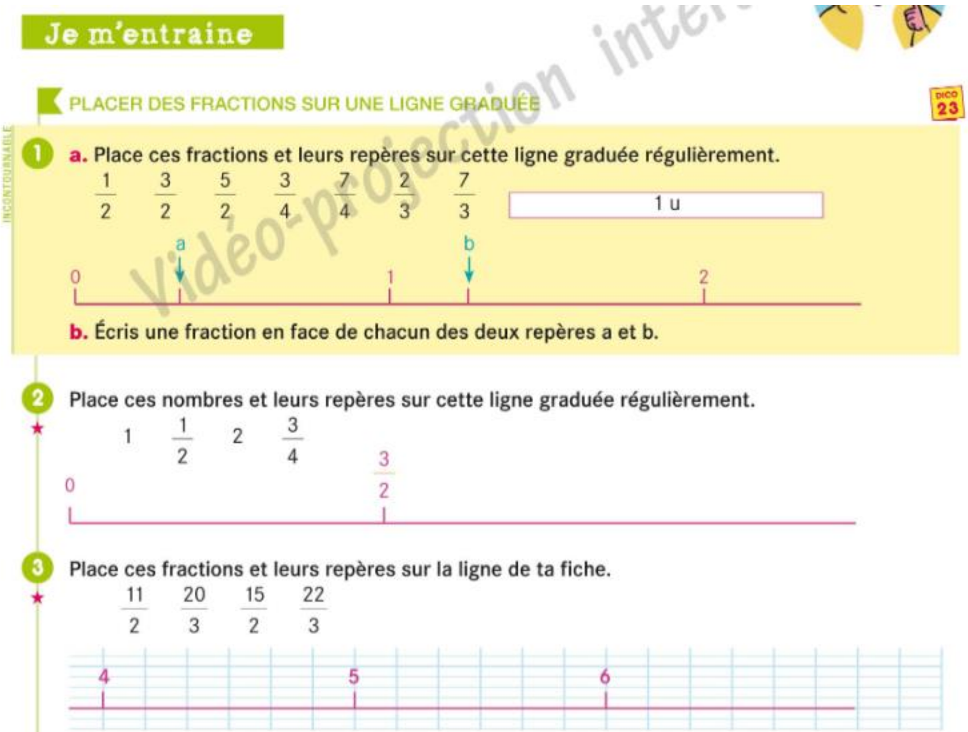
A Place ces fractions et leurs repères sur cette ligne graduée régulièrement.

a. $\frac{8}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{11}{2}$ **b.** $\frac{20}{4}$ $\frac{21}{4}$ $\frac{15}{4}$

B À quelle fraction correspond le repère a ? le repère b ? le repère c ?

Je m'entraine

Doc. 1.7


Je m'entraine

PLACER DES FRACTIONS SUR UNE LIGNE GRADUÉE

1 **a.** Place ces fractions et leurs repères sur cette ligne graduée régulièrement.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{3}$

b. Écris une fraction en face de chacun des deux repères a et b.

2 Place ces nombres et leurs repères sur cette ligne graduée régulièrement.

1 $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{3}{4}$

3 Place ces fractions et leurs repères sur la ligne de ta fiche.

$\frac{11}{2}$ $\frac{20}{3}$ $\frac{15}{2}$ $\frac{22}{3}$

Doc. 1.8

Je cherche UNITÉS, DIXIÈMES, CENTIÈMES

1 u

La bande bleue sert d'unité de longueur. Sa longueur est égale à 1 u.

A Exprime la longueur de la bande rouge et celle de la bande noire à l'aide de l'unité u.

B Utilise ces bandes pour construire les segments suivants.

	segment a	segment b	segment c	segment d
longueur	$\frac{8}{10}$ u	$\frac{10}{10}$ u	$\frac{15}{10}$ u	$\frac{15}{100}$ u

C Parmi les segments a, b, c, d, lesquels ont aussi pour longueur :

- $\frac{4}{5}$ u ?
- 1 u + $\frac{1}{2}$ u ?
- $\frac{80}{100}$ u ?
- $\frac{1}{10}$ u + $\frac{5}{100}$ u ?

Réponds d'abord sans construire de nouveaux segments.
Vérifie tes réponses en construisant les segments.

Doc. 1.9

PLACER DES FRACTIONS SUR UNE LIGNE GRADUÉE

3 a. Place les fractions sur la ligne graduée de ta fiche : $\frac{2}{10}$ $\frac{12}{10}$ $\frac{25}{100}$ $\frac{160}{100}$

b. À quelles fractions correspondent les repères A, B et C ?

UTILISER LES RELATIONS ENTRE DIZAINES, UNITÉS, DIXIÈMES, CENTIÈMES...

4 Complète.
a. Pour obtenir une unité, il faut ... dixièmes.
b. Pour obtenir une unité, il faut ... centièmes.
c. Pour obtenir un dixième, il faut ... centièmes.

Pour répondre aux questions 5 à 8, tu peux utiliser cette unité.

5 Complète.
a. $\frac{1}{10} = \frac{...}{100}$
b. $4 = \frac{...}{10}$
c. $1 = \frac{100}{...}$
d. $\frac{5}{10} = \frac{...}{100}$

6 Pour obtenir une dizaine, combien faut-il réunir :
a. de dixièmes ? b. de centièmes ?

7 Combien faut-il de centièmes pour obtenir :
a. $\frac{4}{10}$? b. $\frac{17}{10}$? c. 4 ? d. 17 ?

8 Dans 2 unités et 2 dixièmes :
a. combien y a-t-il de dixièmes au total ?
b. combien y a-t-il de centièmes au total ?

9 Dans 2 dizaines, 5 unités et 3 dixièmes :
a. combien y a-t-il de dixièmes au total ?
b. combien y a-t-il de centièmes au total ?

TROUVER DES ÉGALITÉS ENTRE FRACTIONS ET NOMBRES ENTIERS

10 Quelles sont les fractions égales à un nombre entier ?
a. $\frac{10}{10}$ b. $\frac{2}{10}$ c. $\frac{50}{10}$ d. $\frac{25}{10}$ e. $\frac{100}{10}$

11 $\frac{9}{10}$ $\frac{13}{10}$ $\frac{10}{10}$ $\frac{30}{10}$ $\frac{25}{100}$ $\frac{103}{100}$ $\frac{200}{100}$ $\frac{100}{100}$

Quelles fractions sont plus grandes que 1 ? égales à 1 ? plus petites que 1 ?

TROUVER DES FRACTIONS ÉGALES

12 Vrai ou faux ? Explique ta réponse.
a. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ b. $\frac{2}{5} = \frac{5}{2}$ c. $\frac{2}{5} = \frac{5}{10}$

ÉNIGME

Parmi toutes les photos de l'album de Sofia, $\frac{3}{10}$ sont des photos de paysages et $\frac{20}{100}$ sont des photos d'animaux.
Dans l'album de Sofia, il y a 30 photos de paysages de plus que de photos d'animaux.
Combien y-a-t-il de photos dans l'album ?

renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Doc. 1.10

UNITÉ 8

Nombres décimaux : écriture à virgule

Je cherche DES NOMBRES AVEC UNE VIRGULE

Pour cette recherche, tu peux utiliser les surfaces d'aires 1 u, $\frac{1}{10}$ u et $\frac{1}{100}$ u à découper sur tes fiches, mais tu peux aussi répondre directement.

A Lucas doit fabriquer les surfaces A, B, C, D et E. Ces surfaces ne sont pas obligatoirement rectangulaires.

surface	A	B	C	D	E
aire	$\frac{346}{10}$ u	$\frac{346}{100}$ u	$\frac{57}{10}$ u	$\frac{608}{100}$ u	$\frac{43}{100}$ u

Pour construire chaque surface, il peut utiliser autant qu'il veut de surfaces d'aire 1 u, mais il ne peut pas utiliser plus de 9 surfaces d'aire $\frac{1}{10}$ u et plus de 9 surfaces d'aire $\frac{1}{100}$ u.

Combien de surfaces d'aires 1 u, $\frac{1}{10}$ u et $\frac{1}{100}$ u doit-il utiliser pour chaque surface ?
Pour chaque surface, écris la décomposition qui t'a permis de répondre.

B Il y a plus de 400 ans, les mathématiciens ont simplifié l'écriture des fractions décimales en utilisant une virgule. Les nombres qui peuvent s'écrire avec une virgule sont appelés « nombres décimaux ».

fraction	décomposition	écriture à virgule	lecture
$\frac{346}{10}$	$34 + \frac{6}{10}$	34,6	trente-quatre et six dixièmes
$\frac{346}{100}$	$3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$	3,46	trois et quatre dixièmes et six centièmes

Trouve l'écriture à virgule qui permet d'exprimer l'aire des surfaces C, D et E.

Doc. 1.11

ÉCRITURES À VIRGULE ET FRACTIONS DÉCIMALES

3 Recopie et complète ce tableau (comme dans la question B de la recherche).

fraction	décomposition	écriture à virgule	lecture
$\frac{102}{100}$			
	$13 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$		
	$3 + \frac{8}{100}$		
	$\frac{9}{100}$		
		5,09	
		50,9	
		0,59	
			seize et trois dixièmes et huit centièmes
			six centièmes
			dix et cinq centièmes

UTILISER LES CENTAINES, DIZAINES, UNITÉS, DIXIÈMES, CENTIÈMES (DICO 18)

4 Combien de fois y a-t-il :
a. 0,1 dans 1 ?
b. 0,01 dans 1 ?
c. 0,01 dans 0,1 ?
d. 0,1 dans 10 ?

5 26,3 — 205,56 — 60,08 — 0,08 — 56,65
Pour chacun de ces nombres, quel est :
a. son chiffre des dixièmes ?
b. son chiffre des dizaines ?
c. son chiffre des centièmes ?
d. son chiffre des unités ?

6 Pour chacun des nombres de l'exercice 5, trouve combien il contient :
a. de dixièmes
b. de dizaines
c. de centièmes
d. d'unités

7 Combien de fois y a-t-il :
a. 0,5 dans 1 ?
b. 0,2 dans 1 ?
c. 0,05 dans 1 ?
d. 0,02 dans 1 ?

DIFFÉRENTES EXPRESSIONS D'UN NOMBRE

8 Ces égalités sont-elles justes ou fausses ? Explique pourquoi.
a. 0,4 = 0,40
b. 0,4 = 0,04
c. 2,06 = 2,6
d. 2,06 = 2,60
e. 2,6 = 2,60
f. 0,08 = 0,80

ÉNIGME

Qui suis-je ?
- Je suis un nombre décimal écrit avec deux chiffres de chaque côté de la virgule.
- Mon chiffre des unités est la moitié de mon chiffre des dixièmes.
- Mon chiffre des centièmes est le triple de mon chiffre des dixièmes.
- Mon chiffre des dizaines est le double de mon chiffre des unités.

Doc. 1.12 (*Dico Maths*)

DICO **11** **Les fractions décimales**

- Une fraction décimale est une fraction qui a pour dénominateur 10, 100, 1 000…
$\frac{27}{100}$ est une fraction décimale. Elle se lit « vingt-sept centièmes ».

- 

Ce segment représente l'unité de longueur.

- $\frac{1}{10}$ représente une des parts obtenues si on partage l'unité en 10.
10 dixièmes = 1 unité ou $\frac{10}{10} = 1$

- $\frac{1}{100}$ représente une des parts obtenues si on partage l'unité en 100.
100 centièmes = 1 unité ou $\frac{100}{100} = 1$ | 10 centièmes = 1 dixième ou $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

- $\frac{1}{1\,000}$ représente une des parts obtenues si on partage l'unité en 1 000.
1 000 millièmes = 1 unité : $\frac{1\,000}{1\,000} = 1$ | 100 millièmes = 1 dixième : $\frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10}$ | 10 millièmes = 1 centième : $\frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100}$

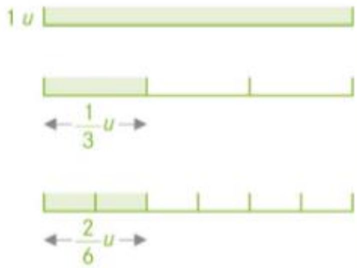
Doc. 1.13 (*Dico Maths*)

DICO 12 Les fractions égales

Pour savoir si deux fractions sont égales, il faut réfléchir à ce qu'elles représentent.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

car dans 1 tiers d'unité
il y a 2 sixièmes d'unité



$\frac{12}{10} = \frac{120}{100}$

car
dans 1 dixième d'unité
il y a 10 centièmes d'unité

donc
dans 12 dixièmes
il y a
120 centièmes.

$\frac{9}{5} = \frac{18}{10}$

car
dans 1 cinquième d'unité
il y a 2 dixièmes d'unité

donc
dans 9 cinquièmes
il y a
18 dixièmes.

Doc. 1.14 (*Dico Maths*)

DICO 15 Lire et écrire les nombres décimaux

Il faut tenir compte de la valeur des chiffres, en particulier de ceux situés à droite de la virgule.

24,12 peut se lire
- 24 et 12 centièmes
- 24 et 1 dixième et 2 centièmes

24,12 = **24** + **0,12**

- **24 est la partie entière**
- **0,12 est la partie décimale**

24,032 peut se lire
- 24 et 32 millièmes
- 24 et 3 centièmes et 2 millièmes

24,032 = **24** + **0,032**

- **24 est la partie entière**
- **0,032 est la partie décimale**

Doc. 1.15 (*Dico Maths*)

DICO 16

La valeur des chiffres dans un nombre décimal

- **La valeur d'un chiffre dépend du rang qu'il occupe dans l'écriture du nombre. La virgule indique quel est le chiffre des unités : c'est celui qui est placé juste à gauche de la virgule.**

1 unité = 10 dixièmes	1 dixième = 10 centièmes
1 unité = 100 centièmes	1 dixième = 100 millièmes
1 unité = 1 000 millièmes	1 centième = 10 millièmes

Si tu as oublié la valeur d'un chiffre, tu peux utiliser un tableau de numération.

...	centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	,	dixièmes $\left(\frac{1}{10}\right)$	centièmes $\left(\frac{1}{100}\right)$	millièmes $\left(\frac{1}{1\,000}\right)$	...
		2	4		1	2		
		2	4		0	3	2	

24,12

ce chiffre 2 vaut 2 dizaines

ce chiffre 2 vaut 2 centièmes

24,032

ce chiffre 2 vaut 2 dizaines

ce chiffre 2 vaut 2 millièmes

Doc. 1.16 (*Dico Maths*)

DICO 18

Décomposer un nombre décimal en unités, dixièmes, centièmes...

- **Pour décomposer un nombre, tu peux utiliser le tableau de numération.**

...	centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	,	dixièmes $\left(\frac{1}{10}\right)$	centièmes $\left(\frac{1}{100}\right)$	millièmes $\left(\frac{1}{1\,000}\right)$	...
		2	4		1	2		

- Voici trois décompositions du nombre 24,12 :

24,12 = 2 dizaines, 4 unités, 1 dixième, 2 centièmes

$= (2 \times 10) + 4 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = 20 + 4 + 0,1 + 0,02$

24,12 = 24 unités, 12 centièmes

$= 24 + \frac{12}{100} = 24 + 0,12$

24,12 = 241 dixièmes, 2 centièmes

$= \frac{241}{10} + \frac{2}{100} = 24,1 + 0,02$

Doc. 1.17 (*Dico Maths*)

DICO 19

Comparer des nombres décimaux

- Pour comparer deux nombres décimaux, il faut :
  – les écrire les uns sous les autres, en mettant les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les dixièmes sous les dixièmes, etc. ;
  – regarder les chiffres en commençant par le rang le plus élevé. Si à ce rang un des deux nombres ne comporte pas de chiffre, on considère que le chiffre est 0 ;
  – s'arrêter dès que deux chiffres de même rang sont différents. Le nombre qui a le chiffre le plus important est le plus grand des deux nombres.

- **Comparer 0,538 et 0,54**

0,538 → 5 dixièmes, **3 centièmes**, 8 millièmes
0,54 → 5 dixièmes, **4 centièmes**

0,538 contient moins de centièmes que 0,54.
Donc 0,538 est plus petit que 0,54.

Tu peux donc écrire : $0{,}538 < 0{,}54$.
On dit aussi : 0,538 est inférieur à 0,54.

Doc. 1.18 (*Dico Maths*)

DICO 36

Multiplier et diviser un nombre par 10, 100...

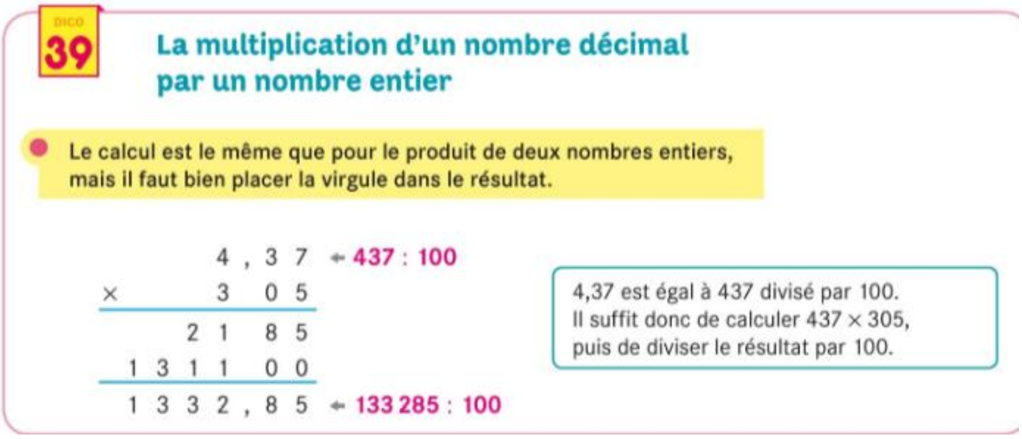
- Lorsqu'on multiplie un nombre par 10, 100, 1 000..., chacun de ses chiffres prend une valeur 10 fois, 100 fois, 1 000 fois... plus grande.

	milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
207 × 10 = 2 070		2	0	7			
	2	0	7	0			
2,458 × 100 = 245,8				2	4	5	8
		2	4	5	8		
13,4 × 100 = 1 340			1	3	4		
	1	3	4	0			

- Lorsqu'on divise un nombre par 10, 100, 1 000..., chacun de ses chiffres prend une valeur 10 fois, 100 fois, 1 000 fois... plus petite.

	milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
4 500 : 10 = 450	4	5	0	0			
		4	5	0			
257 : 100 = 2,57		2	5	7			
				2	5	7	
2,8 : 100 = 0,028				2	8		
				0	0	2	8

Doc. 1.19 (*Dico Maths*)



DICO 39

La multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

Le calcul est le même que pour le produit de deux nombres entiers, mais il faut bien placer la virgule dans le résultat.

```
      4 , 3 7   ← 437 : 100
×       3 0 5
-------------
    2 1   8 5
1 3 1 1   0 0
-------------
1 3 3 2 , 8 5   ← 133 285 : 100
```

4,37 est égal à 437 divisé par 100.
Il suffit donc de calculer 437 × 305,
puis de diviser le résultat par 100.

Questions - Bilan : Le manuel ci-dessus est conforme aux programmes du cycle 3 et suit les recommandations des documents d'accompagnement des programmes et autres documents ressources. En vous appuyant sur ce dossier documentaire, vous pouvez répondre à ces questions :

- Au cycle 3, quel lien est fait entre fractions et nombres décimaux ? Les nombres décimaux sont des fractions particulières, les fractions décimales. Les décimaux sont introduits après les fractions (simples), ils sont d'abord introduits en notation fractionnaire, la notation « à virgule » vient ensuite.
- Au cycle 3, la fraction est rencontrée comme opérateur de partage, comme mesure de grandeurs et comme repère sur une demi-droite graduée :
  - Illustrer le lien entre ces aspects. Prendre les ¾ de … (une longueur, une aire) c'est d'abord partager en quatre (parts égales) puis prendre trois parts ; cela permet d'exprimer des mesures non entières : prendre les ¾ *de l'unité* c'est former une grandeur dont la mesure est ¾ ; pour des grandeurs diverses : longueurs, aires (avec des surfaces variées), durées. Lorsqu'on travaille sur les longueurs, cela permet de repérer des points sur la droite graduée.
  - Qu'est-ce qui permet, au cycle 3, de produire des égalités du type $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$? Unicité du repère sur une demi-droite graduée (demande qu'on sache lire une même graduation de plusieurs manières : une graduation en 6èmes permet de lire des tiers et des demis). Plus généralement : unicité de la mesure d'une grandeur par rapport à un étalon.
  - Peut-on rencontrer, au cycle 3, des égalités du type $4 \times \frac{7}{4} = 7$? Oui, quatre quarts de quoi que ce soit donne le quoi que ce soit : si je partage une chose en quatre parts égales, puis que je prends quatre parts, je retrouve la chose. Cette égalité résume aussi l'addition itérée $\frac{7}{4} + \frac{7}{4} + \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = 7$.
  - Comment, au cycle 3, peut-on calculer $\frac{4}{3} \times 18$? Le tiers de 18 c'est 6, donc le quadruple c'est 24. Le calcul est donc $\frac{4}{3} \times 18 = 4 \times (18 \div 3)$.
  - Peut-on rencontrer, au cycle 3, des égalités du type $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$? oui : dans des repérages sur la demi-droite, ou éventuellement pour reformuler le résultat de la division euclidienne de 3 par 2.
- Peut-on rencontrer, au cycle 3, des égalités du type $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$? non, pas vraiment. Par contre 0,5 x 0,5 = 0,25 est au programme en 6ème.

- Citer six manières d'écrire avec des chiffres, au cycle 3, le nombre qu'on peut désigner par « trois et quarante-sept centièmes ». 3,47 3 + 47/100 347/100 3 + 4/10 + 7/100 300/100 + 40/100 + 7/100 tableau de numération
- Rappeler en quoi la technique opératoire de multiplication de deux nombres décimaux (non entiers) se distingue de toutes les autres techniques opératoires étudiées aux cycles 2 et 3. Non-respect des colonnes du tableau de numération.

Document 2 : Comparaisons au cycle 3 – Lien avec la proportionnalité

Source : CRPE 2003 (Guyane).

Banque d'annales corrigées en ligne sur le site de l'ARPEME : http://www.arpeme.fr/index.php?id_page=27

Le problème suivant a été proposé à des élèves de fin de cycle 3 :

On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait.
La recette A mélange 3 parts de chocolat à 2 parts de lait.
La recette B mélange 2 parts de chocolat à 1 part de lait.

Mélange A Mélange B

Complète par A ou B la phrase suivante :

Le mélange qui a le plus le goût du chocolat est le mélange : ....

Explique brièvement.

Les productions de cinq élèves ont été transcrites en annexe 2.

1) A quelle notion mathématique cette situation fait elle référence ?

2) Préciser les étapes principales d'un raisonnement permettant de résoudre ce problème.

3) Analyser les procédures de chaque élève.

LINDA

Réponse : le mélange A.

Explications : « Parce que dans la recette A, il y a 3 parts de chocolat qu'on mélange et dans la recette B, il y a 2 parts de chocolat, alors dans la recette A il y a plus de goût.. »

NATHALIE

Réponse : le mélange B.

Explications : « Si le A serait égal, il y aurait 4 parts de chocolat. »

CELIA

Réponse : A et B ont le même goût.

Explications : « Si pour 2 parts de chocolat il y a 1 part de lait et que pour la recette A on rajoute 1 part de chaque, les deux auront le même goût. »

Document 3 : Des entiers aux décimaux, rupture et continuité.

Source : Document ressource *Fractions et nombres décimaux au cycle 3* (en ligne sur Eduscol). Extraits.

Ce document contient un descriptif de la progression recommandée sur tout le cycle en ce qui concerne les fractions et les décimaux, avec des explicitations des motivations mathématiques et didactiques. Les extraits donnés ci-dessous ne portent que sur certains aspects.

Différents aspects de la fraction : opérateur de partage, mesure de grandeur, fraction comme nombre (i.e. comme quotient).

Au cycle 1, les nombres entiers sont liés aux objets qu'ils ont servi à dénombrer, puis ils s'en détachent progressivement pour prendre pleinement leur statut de nombres, indépendants des collections. De la même façon, les fractions sont tout d'abord liées aux partages physiques dont elles rendent compte, avant de s'en détacher progressivement à travers des comparaisons, des rangements, des repérages sur une demi-droite graduée, des calculs, pour prendre pleinement leur **statut de nombres**. Les nombres que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction sont appelés **les nombres rationnels**[3]. En dernière année de cycle 3, la fraction $\frac{a}{b}$, où a est un nombre entier et b est un nombre entier non nul, est définie comme le nombre qui, multiplié par b, donne a[4].

Question : Citer un aspect des fractions qui n'est pas mentionné dans ce texte. La fraction comme *ratio*, en lien avec la proportionnalité, les fréquences etc.

(…)

En dernière année de cycle 3, la fraction $\frac{a}{b}$ où a est un nombre entier et b est un nombre entier non nul est définie comme étant le nombre qui multiplié par b donne a ; il s'agit du quotient de a par b. En poursuivant le travail sur les différentes représentations d'un même nombre, on amène les élèves à distinguer un nombre de l'une de ses écritures (par exemple, $\frac{1}{4}$, 0,25, $\frac{6}{24}$ sont plusieurs représentations du même nombre). Les nouveaux nombres rencontrés au cycle 3 sont utilisés pour résoudre des problèmes.

(…) Sur l'ordre et les décimaux en écriture à virgule :

Par exemple, pour comparer deux nombres décimaux ayant la même partie entière, plusieurs conceptions erronées sont assez fréquentes :

- Conception 1 : « Comme pour les entiers, le nombre le plus long est le plus grand », qui conduit à écrire que 17,3<17,12.
- Conception 2 : « Les nombres décimaux sont deux entiers séparés par une virgule ; si le nombre avant la virgule est le même, je compare les nombres après la virgule », qui conduit à écrire que 17,3<17,12 car 3<12 et que 17,2<17,07 car 2<7.
- Conception 3 : « Les nombres décimaux sont deux entiers séparés par une virgule ; si le nombre avant la virgule est le même, je compare les nombres après la virgule, sauf s'il y a un zéro juste après la virgule, car le zéro rend le nombre plus petit », qui conduit à écrire que 17,3<17,12 car 3<12, tout en donnant la bonne réponse pour 17,07<17,2.
- Conception 4 : « Les dixièmes sont plus grands que les centièmes », qui conduit à penser que 5 dixièmes est plus grand que 72 centièmes et donc 17,72<17,5.

Question : On voit que des erreurs sur l'ordre dans les décimaux (donnés en écriture à virgule) sont liées au fait que les élèves ont tendance à lire l'écriture à virgule comme juxtaposant deux nombres entiers indépendants. Citer une erreur que cette conception peut engendrer à propos de l'addition. Exemple : 1,8 + 2,5 = 3,13

(…)

L'enseignant doit avoir conscience **des ruptures** qui existent entre les nombres entiers et les nombres décimaux ; en effet, certaines connaissances, valides pour les nombres entiers, ne le sont plus pour les nombres décimaux :

- les nombres décimaux s'étendent au-delà des nombres entiers qui servent à dénombrer des collections d'objets ;
- l'unité devient une entité que l'on peut partager ;
- on ne peut pas parler du successeur d'un nombre décimal, par exemple : quel nombre viendrait après 7,3 ? ;
- lorsqu'on compare deux nombres décimaux, celui dont l'écriture à virgule s'écrit avec le plus de chiffres n'est pas nécessairement le plus grand ;
- entre deux nombres décimaux on peut intercaler une infinité d'autres nombres décimaux ;
- la multiplication d'un nombre décimal par un nombre décimal ne peut plus être conçue comme une addition itérée ;
- lorsqu'on multiplie un nombre par un nombre décimal on n'obtient pas toujours un nombre plus grand que le nombre de départ (4 x 0,7 = 2,8 et 2,8 est inférieur à 4)…

Question : Citer deux questions auxquelles les élèves répondraient « c'est impossible » ou « il n'y a pas de réponse » s'ils ne sont pas conscients des points 5 et 7 de la liste ci-dessous.

Un élève n'ayant pas compris le point 5 pense qu'il ne peut répondre à $5{,}7 < \ldots < 5{,}8$.

Un élève n'ayant pas compris le point 7 pense qu'il ne peut répondre à $10 \times \ldots = 5$.

Vous trouverez des conseils pour repérer ces erreurs et des pistes de remédiations dans le document ressource :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fractions_et_decimaux/24/8/RA16_C3_MATH_frac_dec_doc_maitre_tableaux_676248.pdf

Document 4 : Préparer la partie « cours » sur les fractions au cycle 4

Extrait du programme 2016, cycle 4 (BOEN n°11, 26/11/2015) : (extrait)

Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. En 5^{e}, les élèves calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité de deux quotients, reconnaissent un nombre rationnel. À partir de la 4^{e}, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, à passer d'une représentation à une autre d'un nombre, à justifier qu'un nombre est ou non l'inverse d'un autre. Ils n'abordent la notion de fraction irréductible qu'en 3^{e}.

Une précision en 2018 (BOEN n°30 du 26/7/2018) : (extrait)

Connaissances

- égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) ;

Repères annuels de progression pour le cycle 4 (sur Eduscol) : (extrait)

5ème	4ème	3ème
Fractions, nombres rationnels		
La conception d'une fraction en tant que nombre, déjà abordée en sixième, est consolidée. Les élèves sont amenés à reconnaître et à produire des fractions égales (sans privilégier de méthode en particulier), à comparer, additionner et soustraire des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.	Un nombre rationnel est défini comme quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul, ce qui renvoie à la notion de fraction. Le quotient de deux nombres décimaux peut ne pas être un nombre décimal. La notion d'inverse est introduite, les opérations entre fractions sont étendues à la multiplication et la division. Les élèves sont conduits à comparer des nombres rationnels, à en utiliser différentes représentations et à passer de l'une à l'autre.	La notion de fraction irréductible est abordée, en lien avec celles de multiple et de diviseur qui sont travaillées tout au long du cycle.

NOMBRES ET CALCULS (suite)		
Fractions, nombres rationnels (suite)		
Au moins une des propriétés suivantes est démontrée, à partir de la définition d'un quotient : • $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ • $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ • $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ • $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ Il est possible, à ce niveau, de se limiter à des exemples à valeur générique. Cependant, le professeur veille à spécifier que la vérification d'une propriété, même sur plusieurs exemples, n'en constitue pas une démonstration.	Une ou plusieurs démonstrations de calculs fractionnaires sont présentées. Le recours au calcul littéral vient compléter pour tout ou partie des élèves l'utilisation d'exemples à valeurs génériques.	

1. Quelle est la définition des fractions finalement retenue pour l'enseignement dans le cycle 4 ? Repose-t-elle sur un théorème ?
Si *a* et *b* sont des entiers naturels, *b* non nul, la notation fractionnaire *a/b* désigne *le nombre* qui, multiplié par *b* donne *a*. La relation $b\times\frac{a}{b}=a$ est considérée comme définitoire ou caractéristique. Elle cache un théorème d'existence et un théorème d'unicité, aucun des deux n'étant explicité (encore moins démontré) au collège.
2. Comment définir la notion de « nombre rationnel » ? Un nombre rationnel est un nombre qui *peut* s'écrire comme une fraction d'entier. Ce « peut » est fondamental : 47 et 2,703 sont des nombres rationnels. Un enjeu important est de savoir jongler entre les différentes représentations d'un même nombre.
3. Pourquoi utiliser indifférent « nombre rationnel » et « fraction » est-il un abus de langage ?
Si l'on parle de « numérateur » et de « dénominateur » d'une fraction, on ne parle pas d'un nombre rationnel ; on devrait parler de « représentation d'un nombre rationnel comme fraction d'entiers ». Quand on parle de « fractions équivalentes » et de « nombres rationnels égaux » on distingue les deux : des couples d'entiers considérés selon une relation d'équivalence, ou des éléments de l'ensemble quotient considérés du point de vue de l'égalité.
En outre, la « notation fractionnaire » ou « fraction » renvoie implicitement à « fraction d'entiers », mais on pourrait ne pas s'y restreindre : $\frac{2,7}{3}$ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ …
4. A propos de l'égalité de fractions :
   a. Le manuel *Transmaths 5ème* (éd. 2016) propose, avant le cours, l'activité d'introduction suivante :

Activité 3

Expliquer l'égalité de fractions

Voici trois demi-droites graduées avec la même unité de longueur.

Julie remarque : « $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, parce que $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$. »

a. Expliquer pourquoi $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{20}{8}$.

b. Recopier et compléter : • $\frac{3}{2} = \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{8}$ • $\frac{14}{8} = \frac{\dots}{4}$ • $\frac{24}{8} = \frac{\dots}{4} = \frac{\dots}{2} = \dots$

En quoi respecte-elle l'esprit du programme ?
On n'utilise pas ici une règle formelle de réécriture ni un critère général d'équivalence de fractions ou d'égalité de rationnels, mais on s'appuie sur le sens : si au dénominateur on multiplie par 2 on passe d'un partage en demis à un partage en quarts. Pour conserver la quantité (ou la mesure), il faut aussi doubler le nombre de parts. Bien sûr le but est de faire conjecturer ou formuler la règle générale formelle.

b. Le même manuel présente, dans sa partie « cours », une propriété sur l'égalité de quotients et la de simplification de fraction :

2 Égalité de quotients

Propriété Un quotient ne change pas quand on **multiplie** ou quand on **divise** son numérateur et son dénominateur par un **même nombre** différent de 0.

Exemples

•  $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$ 

• $\frac{100}{230} = \frac{100 : 10}{230 : 10} = \frac{10}{23}$ ← On a simplifié le quotient $\frac{100}{230}$.

Définition **Simplifier** une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

i. Du point de vue logique, cette propriété exprime-t-elle une implication ou une équivalence ? Une implication : si *a*,*b*,*k* sont trois entiers naturels, k et b non nuls, alors a/b = (ka) / (kb). La réciproque serait : si a/b = c/d alors il existe k tel que …

ii. Pouvez-vous, comme le suggère le programme, démontrer cette propriété à partir de la définition de la fraction-comme-quotient ?

Démo de $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$: (ac)x(b/c) = ax (c x b/c) par associativité de x = a x b par définition de b/c ; donc A = b/c est solution de (ac) x A = ab, donc par définition A = (ab)/(ac). Cela généralise l'exemple donné dans les *Repères de progression*, où l'on illustre sur l'égalité 15/10 = 3/2. Le travail littéral fait apparaître la forme produit (ab) et (ac), cachée dans « 10 » et « 15 », ainsi que le rôle de l'associativité de x.

iii. Quelle propriété fondamentale de l'égalité des fractions n'est pas énoncés dans ces extraits de manuels ?

$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$. Cette égalité (celle des produits croisés) est – elle – une condition nécessaire et suffisante, contrairement à la règle de réécriture du point i. En outre, elle renvoie à la relation d'équivalence de la construction savante. Outre son double intérêt théorique (logique, construction), elle a des intérêts pratiques, par exemple passer d'une équation quotient à une équation produit (exemple $\frac{2}{1+x} = \frac{1+x}{50}$).

iv. La démontrer à partir de la définition de la fraction-comme-quotient.

Démo de : $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. On a : a/b = (ad)/(bd) = (bc)/(bd) = c/d

Démo de : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$. Ici on travaille sur une condition nécessaire d'égalité de quotients, elle ne peut découler de la règle de réécriture. a/b = c/d ⇒ (bxd) x (a/b) = d x (b x (a/b)) = da = (bxd) x (c/d) = b x (d x c/d) = bc.

5. Le faux peut-être aussi intéressant (à étudier) que le vrai.

a. Sans utiliser la formule d'addition des rationnels en écriture fractionnaire, prouver de 7 manières que l'égalité $\frac{4}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ est fausse.

- si on s'autorise des écritures décimales, éventuellement illimitées, c'est faux.
- Si la multiplication par un entier était distributive sur cette addition (et elle l'est, car cette addition est associative et commutative, et la multiplication par un entier est alors distributive car elle est une addition itérée) 24 x (ce calcul) = 4x4 + 12x1 = 3x5 donc 28 = 15, ce qui est faux.
- Si cette addition était juste, on devrait pouvoir remplacer chaque fraction par une fraction équivalente et obtenir un résultat équivalent, or

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

  Or 5/8 n'est pas égal à 2/5 (preuve : 5x5 = 25 ≠ 8x2 = 16).
- C'est incompatible avec des sémantiques en termes de mesure (demi-droite graduée en 24èmes)
- C'est incompatible avec l'ordre : 4/6 > ½ donc 4*6 + ½ > 1 or 5/8 <1
- Si la règle illustrée ci-dessus était valide en toute généralité, on produirait des égalités fausses entre entiers :

$$3 = 2 + 1 = \frac{4}{2} + \frac{3}{3} = \frac{7}{5} \text{ donc } 3\text{x}5 = 7$$

$$2 = 2+2 = \frac{4}{4} + \frac{2}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

- Si cette règle était valide en toute généralité, on aurait

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{2b}$$

Ce qui est incompatible avec la règle $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ qui, elle, prolonge l'addition des entiers (et des décimaux), est compatible avec le changement de fraction équivalente, compatible avec l'ordre, avec les mesures de grandeur, avec la distributivité de x sur +

b. Dans cette question, toutes les lettres désignent des entiers naturels non-nuls.
Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont des identités, lesquelles non ? Justifier.
Pour celles qui n'en sont pas, faire une hypothèse sur ce qui peut pousser un élève à l'écrire.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{2b}$ $\quad$ $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$ $\quad$ $\frac{a+b}{b} = a$ $\quad$ $\frac{a+b}{b} = a + 1$

$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{1+b}$ $\quad$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = \frac{a \times c}{b}$ $\quad$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = 1$ $\quad$ $\frac{\frac{a}{b}}{2} = \frac{a}{2b}$ $\quad$ $\frac{a}{\frac{b}{2}} = \frac{2a}{b}$

Documents 5 : Analyser des « activités d'introduction ».

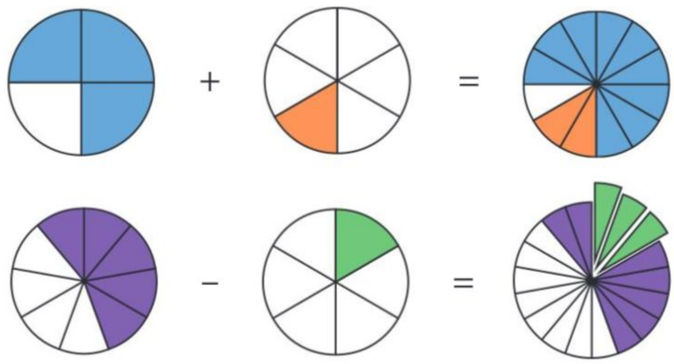
Les documents suivants sont extraits des pages « activité d'introduction » d'un manuel du cycle 4 : *Mission Indigo*, Hachette 2017.

Dans chaque cas, faire une hypothèse sur ce qu'il cherche à introduire, puis discuter sa pertinence.

Doc. 5.1

Diagrammes circulaires — Activité 5

1. Traduire avec des nombres les deux égalités suivantes.



2. Utiliser trois autres diagrammes circulaires pour traduire avec précision l'égalité de son choix.

On est sur la recherche de dénominateur commun pour réaliser une addition ou une soustraction de nombres rationnels en écriture fractionnaire. Ici, les dénominateurs ne sont ni égaux, ni multiples l'un de l'autres, ni premiers entre eux.

On s'appuie non sur une règle formelle mais sur une sémantique de partage de grandeurs. Pour une fois on travaille sur des aires et non des longueurs.

La question 2 invite à rendre l'élève actif, ceci étant, les attentes quant à la construction des diagrammes sont floues : à main levé ? construction précise à la règle et au compas ? au rapporteur ?

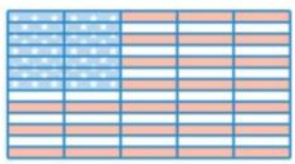
Variable didactique : les exemples se limitent à des fractions inférieures à 1. Il serait intéressant de demander aux élèves de représenter 3/2 + 5/3.

Doc. 5.2

Drapeau américain — Activité 2

Le drapeau des États-Unis est surnommé Stars and Stripes (littéralement : « étoiles et bandes »). Il est composé de treize bandes horizontales rouges et blanches de largeurs égales, représentant les 13 États fondateurs, et d'un canton de couleur bleue parsemé de cinquante petites étoiles blanches représentant les 50 États membres de l'Union.

La largeur du rectangle bleu représente les sept treizièmes de la largeur du drapeau ; sa longueur représente les deux cinquièmes de la longueur du drapeau.



1. Recopier et compléter la phrase suivante :

« L'aire du rectangle bleu représente les $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du drapeau. »

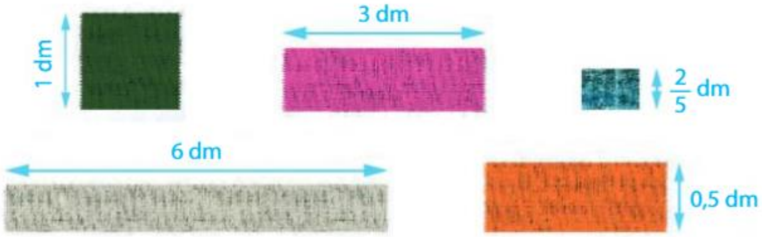
2. Quel calcul permet de retrouver ce résultat ?

On vise une rencontre avec la multiplication par une approche classique : une même mesure de grandeur est calculée de deux manières différentes. Ici : 7/13 x 2/5 = (7x2) / (13x5).

Doc. 5.3

Patchwork — **Activité 4**

Oihana veut fabriquer une grande tenture en patchwork pour recouvrir une partie du mur de sa chambre : elle a trouvé dans l'atelier de couture de sa grand-mère des rectangles de tissu de même aire. Elle voudrait connaitre les dimensions exactes de chaque rectangle pour savoir quelle longueur de fil est nécessaire pour réaliser son patchwork.



- Sachant que l'aire de chaque rectangle est égale à 1 dm^2, trouver les dimensions de chaque rectangle, puis recopier et compléter les égalités suivantes.

a. $1 \times \ldots = 1$ **b.** $3 \times \ldots = 1$ **c.** $\frac{2}{5} \times \ldots = 1$ **d.** $6 \times \ldots = 1$ **e.** $0{,}5 \times \ldots = 1$

On vise la rencontre avec la notion d'inverse, puisque la recherche d'un côté du rectangle connaissant l'autre côté et l'aire (1 dm) invite à résoudre des problèmes numériques du type *connu* x … = 1.

Le fait que 6 x 1/6 = 1 et 3 x 1/3 = 1 permet de revenir sur la définition de la fraction-quotient.

Le fait de mettre 0,5 invite à revenir sur la multiplicité des écritures d'un même nombre : ½ = 0,5.

Le cas 2/5 est intéressant aussi : si les élèves ont déjà vu la multiplication des fractions (vraisemblable), alors 5/2 répond à la question. Mais 2/5 = 0.4, on peut donc chercher (par essais-erreur, par calcul mental) à répondre à 0,4 x … = 1 avec un décimal (2,5) puis chercher d'autres écritures de 2,5.

Par contre la formulation explicite de la question sous la forme 3 x … = 1 fait que la sémantique « aire de rectangle » n'est pas vraiment utilisée. Elle risque même de troubler les élèves, d'autant plus que le patchwork évoqué dans l'énoncé ne joue en fait aucun rôle dans l'exercice.

Point de cours : Construction de Q à partir de Z (i.e. corps des fractions d'un anneau intègre).

Vous devez savoir démontrer tous les théorèmes énoncés ci-dessous.

Point de départ : (**Z**, +, x, <) est un anneau (commutatif unifère) intègre ordonné.

Définition : Sur **ZxZ***, on définit la relation R « être dans le même rapport » par : quels que soient (*n*,*d*) et (*n'*,*d'*) dans **ZxZ***, (*n*,*d*) R (*n'*,*d'*) ⇔ *nd'* = *n'd*

Théorème : C'est une relation d'équivalence.

Définition : On note **Q** l'ensemble quotient de **ZxZ*** par R.

Remarque : il s'agit de la différence entre une **fraction** et un **nombre rationnel**. La notation fractionnaire $\frac{5}{3}$ peut servir

- soit à désigner le couple (5,3) dans un contexte où l'on raisonne dans **Z**x**Z*** au moyen de la relation « être dans le même rapport » ; on parle alors de « fractions équivalentes », car (5,3) R (10,6) ; une fraction étant ici un élément de **Z**x**Z***, elle a bien un numérateur (première composante du couple) et un dénominateur ;
- soit à désigner l'élément de l'ensemble quotient **Q**, c'est-à-dire la classe d'un couple. Les notions de numérateur et de dénominateur n'ont plus de sens, et l'on doit parler de nombres rationnels égaux (pas « équivalents » ou « dans le même rapport »).

Théorème : Les opérations définies sur **Z**x**Z*** par $(a,b) + (c,d) = (ad+bc\,,\, cd)$ et $(a,b)\,.\,(c,d) = (ac\,,\, bd)$ sont compatibles avec R. Elles munissent **Q** d'une structure de corps, ordonné (i.e. l'addition est croissante).

Théorème : La composée de $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}x\mathbf{Z}^*$ $n \to (n,1)$ et de la surjection canonique $\mathbf{Z}x\mathbf{Z}^* \to \mathbf{Q}$ est une injection, un morphisme d'anneau, et une application croissante[1].

Remarque : Par abus de langage, on note de la même manière un entier et son image dans **Q**. Autrement dit $\frac{3}{1}$ se note aussi 3, même quand on travaille dans **Q**.

Remarque : Un élément de **Z**x**Z*** considéré selon la relation d'équivalence R se nomme aussi un *ratio*. On le note parfois (3 : 5) ou simplement 3 : 5 .

Cette notion se généralise aux *n*-uplets. Elle est maintenant dans les programmes du cycle 4 (ajustements de 2018). Extraits :

La notion de ratio vient enrichir le lexique de la proportionnalité pour traduire la proportionnalité de deux suites de nombres.

(…)

- Notion de ratio

On dit, par exemple,

- *que deux nombres a et b sont dans le ratio 2 : 3 (notation standardisée) si* $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$
- *que trois nombres a, b, c sont dans le ratio 2 : 3 : 7 (notation standardisée) si* $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

(…)

Compétences associées

- Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité
- Calculer une quatrième proportionnelle
- Partager une quantité (par exemple une somme d'argent) en deux ou trois parts selon un ratio donné

Du point de vue sémantique, les *ratios* servent en général à représenter des rapports entre parts dans un partage, plutôt que des rapports entre la part et le tout. Par exemple, si la recette d'un cocktail demande d'utiliser 2 volumes de jus de citron, 3 volumes de sirop de grenadine et 7 volumes de jus de pamplemousse, le goût est le même lorsqu'on respecte le ratio 2 : 3 : 7. Dans tous les mélanges respectant ce *ratio*, le citron représente alors les 2/12 du volume total.

[1] Elle est strictement croissante, ce qui implique l'injectivité.