Mathématisation du mouvement chez Galilée (1564-1642)

Sources :
Galileo Galilei *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* (trad. M. Clavelin). Paris : Presses Universitaires de France, 1995. 1ère édition : 1638.
Galileo Galilei *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* (trad. R. Fréreux et F. de Gandt). Paris : éditions du seuil, 1992. 1ère édition : 1632.

Extraits du *Discours* : le mouvement uniforme

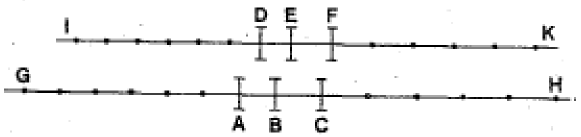
Définition : Par mouvement régulier et uniforme, j'entends celui où les espaces parcourus par un mobile en des temps égaux quelconques, sont égaux entre eux.
(…)

Théorème I — Proposition I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

Soit en effet un mobile animé d'un mouvement uniforme et qui parcourt avec la même vitesse les deux distances AB, BC ; soit DE le temps du mouvement le long de AB, et EF le temps le long de BC ; je dis que le rapport de l'espace AB à l'espace BC sera aussi celui du temps DE au temps EF.

Prolongeons de part et d'autre les distances et les temps, les distances vers G et H, les temps vers I et K ; divisons AG en un certain nombre d'intervalles spatiaux égaux à AB, et DI, pareillement, en un nombre égal d'intervalles de temps égaux à DE ; à nouveau divisons CH en un nombre quelconque d'intervalles spatiaux égaux à CB, et FK en un même nombre d'intervalles de temps égaux à EF : l'espace BG et le temps EI seront alors,



quel que soit le multiplicateur, des multiples égaux de l'espace BA et du temps ED, de même que l'espace HB et le temps KE vis-à-vis de l'espace CB et du temps FE [74].

Comme DE est le temps nécessaire pour traverser AB, EI en son entier représentera le temps nécessaire pour traverser BG en son entier, le mouvement étant uniforme et EI contenant autant d'intervalles de temps égaux à DE qu'il y a en BG d'intervalles d'espace égaux à BA ; et l'on conclura de même que KE est le temps nécessaire pour franchir HB. Mais puisque le mouvement est, par hypothèse, uniforme, si l'espace GB était égal à BH, le temps IE serait aussi égal au temps EK, et si GB était plus grand, ou moins grand que BH, | de même IE serait plus grand, ou moins grand, que EK.

On a donc quatre grandeurs, AB la première, BC la seconde, DE la troisième, et EF la quatrième, puis avec le temps IE et l'espace GB des multiples égaux et arbitraires de la première et de la troisième, à savoir l'espace AB et le temps DE ; or on a démontré que IE et GB sont soit égaux ensemble, soit plus petits ensemble, soit plus grands ensemble que le temps EK et l'espace BH, multiples égaux et arbitraires de la seconde et de la quatrième grandeurs ; la première a donc avec la seconde, c'est-à-dire la distance AB avec la distance BC, même rapport que la troisième avec la quatrième, c'est-à-dire le temps DE avec le temps EF ; ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II — *Proposition II*

Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

(…)

Théorème III — *Proposition III*

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

(…)

Théorème IV — *Proposition IV*

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.

(…)

Extraits du *Discours* : le mouvement naturellement accéléré

(…)

Quand donc j'observe qu'une pierre tombant d'une certaine hauteur à partir du repos acquiert successivement de nouvelles augmentations de vitesse, pourquoi ne croirais-je pas que ces additions ont lieu selon la proportion la plus simple et la plus évidente ? Or, tout bien considéré, nous ne trouverons aucune addition, aucune augmentation plus simple que celle qui toujours vient s'ajouter de la même façon. Ce que nous comprendrons aisément en considérant l'étroite affinité entre le temps et le mouvement : de même en effet que l'uniformité du mouvement se définit et se conçoit grâce à l'égalité des temps et des espaces (nous appelons un mouvement uniforme quand des espaces égaux sont franchis en des temps égaux), de même nous pouvons concevoir que dans un intervalle de temps semblablement divisé en parties égales des accroissements de vitesse aient lieu simplement ; | ce qui sera le cas si par « uniformément », et, du même coup, « continuellement » accéléré nous nous représentons un mouvement où en des temps égaux quelconques se produisent des additions égales de vitesse.

(...)

Salv. L'occasion ne me semble pas favorable pour rechercher la cause de l'accélération du mouvement naturel, problème sur lequel différents philosophes ont formulé différentes opinions,

(...)

SAGR. Il me vient à l'esprit que peut-être la définition aurait été plus claire, et sans voir son sens altéré, si l'on avait dit : un mouvement uniformément accéléré est un mouvement où la vitesse croît en proportion de l'espace traversé ; de sorte, par exemple, que le degré de vitesse acquis par un mobile au terme d'une descente de quatre coudées serait le double de celui qu'il aurait acquis au terme de deux coudées, et celui-là le double du degré atteint après la première coudée. Car il n'est pas douteux, me semble-t-il, qu'un grave tombant d'une hauteur de six coudées possède une force de percussion double de celle qu'il avait après trois, triple de celle qu'il avait après deux, et sextuple de celle qu'il avait après une coudée.

SALV. Je me sens consolé d'avoir eu un compagnon d'erreur tel que vous, et je dois vous dire que votre raisonnement a tellement de vraisemblance et de probabilité que notre Auteur lui-même ne nia pas, quand je le lui demandai, avoir partagé la même erreur pendant un certain temps. Mais ce qui m'étonna le plus ensuite fut de voir démontrer, de façon très simple, non seulement la fausseté, mais l'impossibilité de deux propositions pourtant si vraisemblables que parmi les nombreuses personnes à qui je les ai proposées, je n'en ai jamais vu aucune les écarter.

SIMP. Je suis à coup sûr de ceux qui les acceptent : qu'un grave en descendant acquiert de la force, tandis que sa vitesse croît proportionnellement à l'espace, et que son pouvoir de percussion soit deux fois plus élevé quand il vient d'une hauteur double, me paraissent des propositions que l'on peut accorder sans hésitation ni discussion.

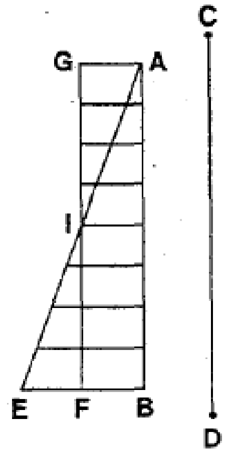
SALV. Et cependant elles sont aussi fausses et impossibles que si le mouvement avait lieu instantanément ; en voici une démonstration très claire. Quand les vitesses ont la même proportion que les espaces traversés ou devant être traversés, ces espaces sont franchis en des temps égaux ; si donc les vitesses avec lesquelles le mobile a traversé la distance de quatre coudées avaient été le double des vitesses avec lesquelles il a traversé les deux premières coudées (comme le premier espace est le double du second), alors les temps de passage auraient été égaux. Mais pour un même mobile, franchir dans le même temps les quatre coudées et les deux coudées est chose impossible, à moins que le mouvement | ne soit instantané ; or nous voyons qu'un grave, quand il tombe, accomplit son mouvement dans le temps, et traverse les deux coudées en moins de temps que quatre ; il est faux par conséquent que la vitesse croisse comme l'espace. La fausseté

(...)

Théorème I — Proposition I

Le temps pendant lequel un espace donné est franchi par un mobile, partant du repos, avec un mouvement uniformément accéléré, est égal au temps pendant lequel le même espace serait franchi par le même mobile avec un mouvement uniforme, dont le degré de vitesse serait la moitié du plus grand et dernier degré de vitesse atteint au cours du précédent mouvement uniformément accéléré.

Représentons par la ligne AB le temps pendant lequel un mobile, partant du repos en C, franchira d'un mouvement uniformément accéléré l'espace CD; on représentera le plus grand et dernier des degrés de la vitesse accrue dans les instants du temps AB par la ligne EB, formant avec AB un angle quelconque ; menons AE : toutes les lignes parallèles à BE, tirées des différents points de la ligne AB, représenteront les degrés de vitesse croissants après l'instant initial A. Divisons BE en son milieu par le point F, et menons FG et AG respectivement parallèles à AB et FB ; on aura construit le parallélogramme AGFB égal au triangle AEB, et dont le côté GF coupe AE en son milieu I ; si ensuite les parallèles du triangle AEB sont prolongées jusqu'à GI, nous aurons l'agrégat de toutes les parallèles contenues dans le quadrilatère égal à l'agrégat des parallèles comprises dans le triangle AEB : en effet celles qui se trouvent dans le triangle IEF correspondent à celles que contient le triangle GIA, et celles qui sont dans le trapèze AIFB sont communes. Comme d'autre part à tous les instants, pris un à un, de l'intervalle de temps AB correspondent tous les points, pris un à un, de la ligne AB, et comme les parallèles menées à partir de ces points et comprises dans le triangle AEB représentent les degrés croissants de la vitesse grandissante, tandis que de leur côté les parallèles contenues dans le parallélogramme représentent autant de degrés de la vitesse non croissante, mais égale, il est clair qu'autant de moments de vitesse seront consumés dans le mouvement accéléré d'après les parallèles croissantes du triangle AEB, que dans le mouvement uniforme d'après les parallèles du parallélogramme GB : en effet, ceux des moments qui font défaut dans la première moitié du mouvement accéléré (c'est-à-dire ceux qui sont représentés par les parallèles du triangle AGI) sont compensés par les moments que représentent les parallèles du triangle IEF. Il est donc manifeste que des distances égales seront parcourues en un même temps par deux mobiles dont l'un, partant du repos, se meut d'un mouvement uniformément accéléré, et l'autre d'un mouvement uniforme que caractérise un moment de vitesse égal à la moitié du plus grand moment de vitesse atteint par le premier. C.Q.F.D. [86].



Théorème II — Proposition II

Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.

(…)

Corollaire I

De là résulte clairement que si nous prenons successivement un nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, à compter du premier instant du mouvement, tels que AD, DE, EF, FG, pendant lesquels sont parcourus les espaces HL, LM, MN, NI, ces espaces seront entre eux comme les nombres impairs à partir de l'unité, soit 1, 3, 5, 7 ; tel est en effet le rapport des différences entre les carrés de lignes se dépassant d'une même quantité égale à la plus petite d'entre elles, et tel est le rapport entre les carrés des nombres entiers à partir de l'unité. Alors donc que les degrés de vitesse augmentent en des temps égaux comme la simple série des nombres, les accroissements que subissent les espaces franchis pendant les mêmes intervalles de temps sont comme la série des nombres impairs *ab unitate*.

(…)

Simp. J'ai pris plus de plaisir à ce raisonnement facile et évident du seigneur Sagredo qu'à la démonstration, pour moi plus obscure, de l'Auteur ; et je suis bien convaincu que les choses doivent se passer ainsi, une fois énoncée et acceptée la définition du mouvement uniformément accéléré. Mais que l'accélération dont se sert la nature dans le mouvement de chute des graves soit bien telle, je persiste à en douter ; il serait donc opportun, me semble-t-il, pour m'éclairer et aussi tous ceux qui pensent comme moi, de rapporter maintenant l'une de ces nombreuses expériences qui, avez-vous dit, concordent de différentes manières avec les conclusions démontrées.

Salv. Votre demande, qui est d'un véritable homme de science, est tout à fait raisonnable ; car c'est ainsi qu'il convient de procéder dans les sciences appliquant à l'analyse de la nature les démonstrations mathématiques, telles la perspective, l'astronomie, la mécanique, la musique, et d'autres encore, qui toutes confirment par des expériences judicieuses leurs principes, fondements de tout l'édifice ultérieur. Je ne voudrais donc pas que cela semble du temps perdu si nous consacrons une longue discussion à ce premier et décisif fondement sur lequel s'appuie l'immense machine des conclusions, infiniment nombreuses, dont notre Auteur au reste n'a donné qu'un petit nombre dans ce livre où il aura tant contribué à ouvrir une voie jusqu'ici fermée aux esprits spéculatifs. S'agissant donc des expériences, il n'a nullement négligé de les faire ; et afin de rendre certain que l'accélération des graves descendant naturellement s'opère bien selon la proportion énoncée plus haut, je me suis retrouvé plus d'une fois, en sa compagnie, à en établir la preuve de la façon suivante.

(…)

Dans une règle, ou plus exactement un chevron de bois, long d'environ 12 coudées, large d'une demi-coudée et épais de 3 doigts, nous creusions un petit canal d'une largeur à peine supérieure à un doigt, et parfaitement rectiligne ; après l'avoir garni d'une feuille de parchemin bien lustrée pour le rendre aussi glissant que possible, nous y laissions rouler une boule de bronze très dure, parfaitement arrondie et polie. | Plaçant alors l'appareil dans une position inclinée, en élevant l'une de ses extrémités d'une coudée ou deux au-dessus de l'horizon, nous laissions, comme je l'ai dit, descendre la boule dans le canal, en notant, selon une manière que j'exposerai plus loin, le temps nécessaire à une descente complète ; l'expérience était recommencée plusieurs fois afin de déterminer exactement la durée du temps, mais sans que nous découvrîmes jamais de différence supérieure au dixième d'un battement de pouls. La mise en place et cette première mesure étant accomplies, nous faisions descendre la même boule sur le quart du canal seulement : le temps mesuré était toujours rigoureusement égal à la moitié du temps précédent. Nous faisions ensuite varier l'expérience, en comparant le temps requis pour parcourir la longueur entière du canal avec le temps requis pour parcourir sa moitié, ou les deux tiers, ou les trois quarts, ou toute autre fraction ; dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés des temps, et cela quelle que soit l'inclinaison du plan, c'est-à-dire du canal, dans lequel on faisait descendre la boule. Nous avons aussi observé que les temps de descente, pour les différentes inclinaisons du plan, avaient exactement entre eux la proportion que l'Auteur, comme nous le verrons plus loin, avait prédite et démontrée. Pour mesurer le temps, nous prenions un grand seau rempli d'eau que nous attachions assez haut ; par un orifice étroit pratiqué dans son fond s'échappait un mince filet d'eau que l'on recueillait dans un petit récipient, tout le temps que la boule descendait dans le canal. Les quantités d'eau ainsi recueillies étaient à chaque fois pesées à l'aide d'une balance très sensible, et les différences et proportions entre les poids nous donnaient les différences et proportions entre les temps ; la précision était telle que, comme je l'ai dit, aucune discordance significative n'apparut jamais entre ces opérations, maintes et maintes fois répétées.

Extraits du *Discours* : du mouvement des projectiles

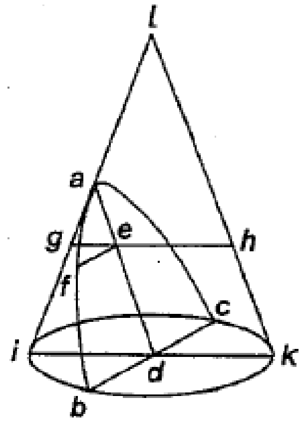
J'imagine qu'un mobile a été lancé sur un plan horizontal d'où l'on a écarté tout obstacle ; il est déjà certain, d'après ce qu'on a dit ailleurs plus longuement, que son mouvement se poursuivra uniformément et éternellement sur ce même plan, pourvu qu'on le prolonge à l'infini. Supposons en revanche qu'il soit limité et situé à une certaine hauteur : le mobile que j'imagine doué de gravité, parvenu à l'extrémité du plan et continuant sa course, ajoutera à son précédent mouvement uniforme et indélébile la tendance vers le bas que lui confère sa gravité [98] : le résultat sera ce mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas que j'appelle projection. Nous démontrerons maintenant quelques-unes de ses propriétés, dont voici la première. |

Théorème I — Proposition I

Un projectile qu'entraîne un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas, décrit au cours de son déplacement une trajectoire semi-parabolique.

SAGR. Il s'impose, seigneur Salviati, dans mon intérêt et aussi, je crois, dans celui du seigneur Simplicio, de marquer ici un temps d'arrêt ; mes études de géométrie n'ont pas été si loin, en effet, que j'aie travaillé Apollonius, dont je sais tout juste qu'il traite de la parabole et des autres sections coniques :

(…) [Toujours serviable, Salviati redémontre deux propositions d'Apollonius]



Représentons-nous un cône droit avec le cercle *ibkc* pour base et pour sommet le point *l* : si on le coupe par un plan parallèle au côté *lk*, on obtiendra la section *bac*, appelée *parabole* ; sa base *bc* coupe à angle droit le diamètre *ik* du cercle *ibkc*, et son axe *ad* est parallèle au côté *lk*. Prenons un point quelconque *f* sur la ligne *bfa* et menons la droite *fe* parallèle à la base *bd* : je dis que le carré de *bd* a au carré de *fe* même rapport que l'axe *da* à sa partie *ae*. Par le point *e* faisons passer un plan parallèle au cercle *ibkc*, qui produira dans le cône une section circulaire dont le diamètre sera la ligne *geh* : comme *bd* est perpendiculaire au diamètre *ik* du cercle *ibk*, le carré de *bd* sera égal au rectangle formé par *id* et *dk* ; et de même dans le cercle supérieur, qui passe par les points *g*, *f*, *h*, le carré de *fe* sera égal au rectangle formé par *ge* et *eh* : par conséquent le carré de *bd* aura au carré de *fe* le même rapport que le rectangle *idk* au rectangle *geh*. Mais puisque *ed* est parallèle à *hk*, *eh* et *dk* qui sont également parallèles seront égaux ; le rectangle *idk* aura ainsi avec le rectangle *geh* | même rapport que *id* avec *ge*, c'est-à-dire que *da* avec *ae* : par conséquent entre le rectangle *idk* et le rectangle *geh*, c'est-à-dire entre le carré de *bd* et le carré de *fe*, existera le même rapport qu'entre l'axe *da* et sa partie *ae*, ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la deuxième proposition nécessaire à la présente étude, nous l'établirons comme suit. Traçons une parabole dont l'axe *ca* est prolongé vers l'extérieur jusqu'en *d*, et par un point *b* quelconque menons la ligne *bc* parallèle à la base de la parabole ; si nous prenons *da* de même longueur que la partie *ca* de l'axe, je dis alors que la droite tirée par les points *d* et *b* ne tombe pas à l'intérieur de la parabole, mais à l'extérieur, et de telle façon qu'elle lui est tangente au point *b*.