Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Académie de Paris

SORBONNE UNIVERSITÉ

DU Maths 2nd degré

TD 3 DE GÉOMÉTRIE

QUELLE PLACE POUR LES DÉMONSTRATIONS ?

MATHÉMATIQUES > Repères annuels de progression pour le cycle 4

ESPACE ET GÉOMÉTRIE (suite)

Géométrie plane

Figures et configurations

La caractérisation angulaire du parallélisme (angles alternes-internes et angles correspondants) est énoncée. La valeur de la somme des angles d'un triangle peut être démontrée et est utilisée. L'inégalité triangulaire est énoncée. Le lien est fait entre l'inégalité triangulaire et la construction d'un triangle à partir de la donnée de trois longueurs. Des constructions de triangles à partir de la mesure d'une longueur et de deux angles ou d'un angle et de deux longueurs sont proposées.

Le parallélogramme est défini à partir de l'une de ses propriétés : parallélisme des couples de côtés opposés ou intersection des diagonales. L'autre propriété est démontrée et devient une propriété caractéristique. Il est alors montré que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur grâce aux propriétés de la symétrie.

Les propriétés relatives aux côtés et aux diagonales d'un parallélogramme sont mises en œuvre pour effectuer des constructions et mener des raisonnements.

Les élèves consolident le travail sur les codages de figures : interprétation d'une figure codée ou réalisation d'un codage.

Les élèves découvrent de nouvelles droites remarquables du triangle : les hauteurs. Ils poursuivent le travail engagé au cycle 3 sur la médiatrice dans le cadre de résolution de problèmes. Ils peuvent par exemple être amenés à démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

En 5ème

Les cas d'égalité des triangles sont présentés et utilisés pour résoudre des problèmes. Le lien est fait avec la construction d'un triangle de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle). Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration des triangles emboîtés sont énoncés et utilisés, ainsi que le théorème de Pythagore (plusieurs démonstrations possibles) et sa réciproque. La définition du cosinus d'un angle d'un triangle rectangle découle, grâce au théorème de Thalès, de l'indépendance du rapport des longueurs le définissant.

Une progressivité dans l'apprentissage de la recherche de preuve est aménagée, de manière à encourager les élèves dans l'exercice de la démonstration. Aucun formalisme excessif n'est exigé dans la rédaction.

En 4ème

Une définition et une caractérisation des triangles semblables sont données. Le théorème de Thalès et sa réciproque dans la configuration du papillon sont énoncés et utilisés (démonstration possible, utilisant une symétrie centrale pour se ramener à la configuration étudiée en quatrième). Les lignes trigonométriques (cosinus, sinus, tangente) dans le triangle rectangle sont utilisées pour calculer des longueurs ou des angles.

Deux triangles semblables peuvent être définis par la proportionnalité des mesures de leurs côtés. Une caractérisation angulaire de cette définition peut être donnée et démontrée à partir d'un cas d'égalité des triangles et d'une caractérisation angulaire du parallélisme.

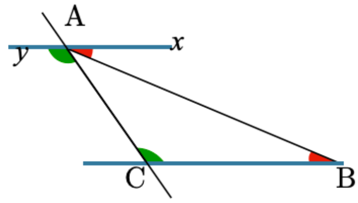
En 3ème

Consigne 1 :

Pour chaque démonstration, argumenter pour savoir si vous la feriez devant vos élèves, si vous la donneriez à faire à vos élèves ou bien si vous admettriez le théorème.

Théorème :

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.



Démonstration :

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAx}$ sont alternes-internes et $(xy)//(BC)$.

Deux angles alternes-internes délimités par des droites parallèles sont égaux.

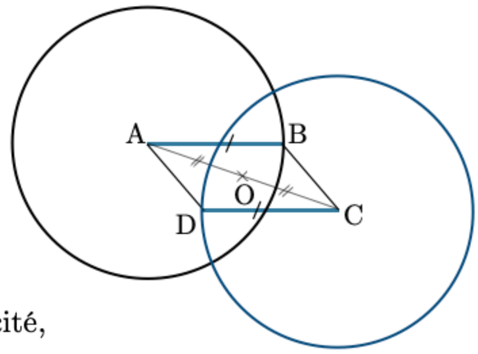
$\widehat{ABC} = \widehat{xAB}$.

De la même manière, $\widehat{ACB} = \widehat{CAy}$

Donc on a : $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = \widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAy} = 180°$

Théorème :

Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



Démonstration par la symétrie centrale :

Soit ABCD un quadrilatère non croisé tel que (AB)//(DC) et AB = DC. On note O le milieu de la diagonale [AC].

L'image de (AB) par la symétrie de centre O est la droite parallèle à (AB) passant par C.

C étant l'image du point A par la symétrie de centre O, par unicité, l'image de (AB) par la symétrie de centre O est la droite (CD).

L'image du cercle de centre A et de rayon AB par la symétrie de centre O est le cercle de centre C et de rayon AB .

Comme AB = DC, ce cercle passe par le point D.

B étant le point d'intersection du cercle de centre A de rayon AB et de la droite (AB), son image par la symétrie de centre O est l'intersection du cercle de centre C et de rayon DC et de la droite (DC).

ABCD étant un quadrilatère non croisé, le point B et son image par la symétrie de centre O sont de part et d'autre de la droite (AC).

Donc D est l'image du point B par la symétrie de centre O.

Par conséquent, l'image de la droite (AD) par la symétrie de centre O est la droite (CB).

Donc les droites (AD) et (CB) sont parallèles.

Support pour une démonstration du théorème de Pythagore :

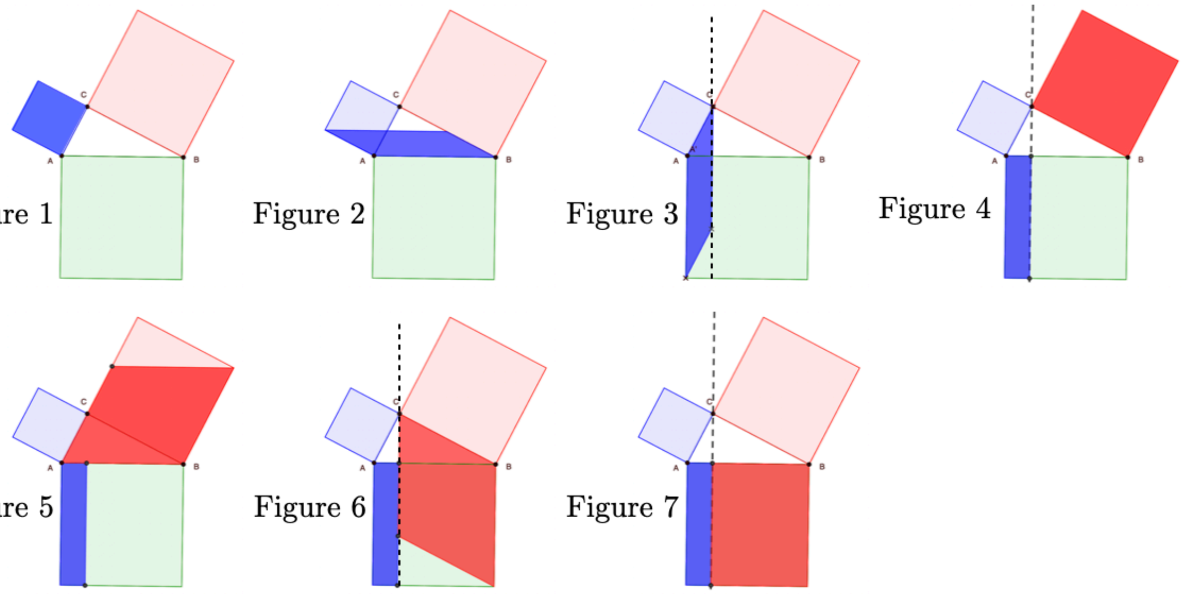


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

Figure 5 Figure 6 Figure 7

Support pour une démonstration du théorème de Pythagore :

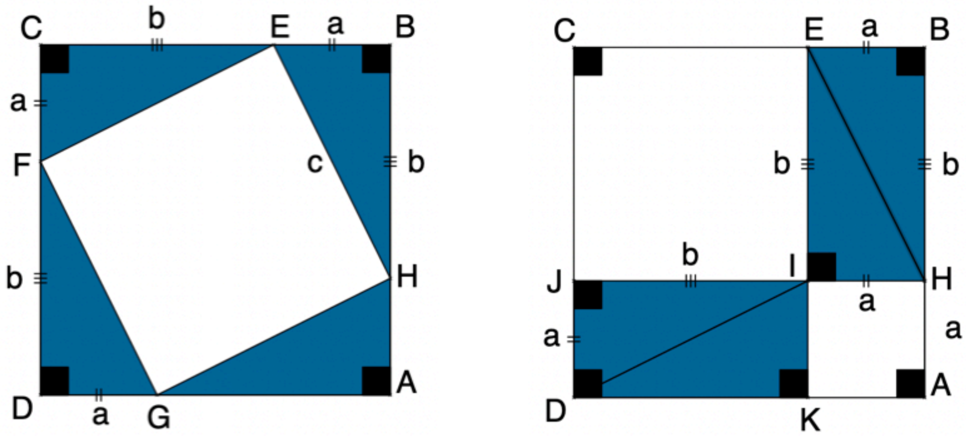


Figure 1 Figure 2

Cas de similitude AA :

Si deux angles d’un triangle sont égaux à deux angles d’un second triangle alors ces triangles sont semblables.

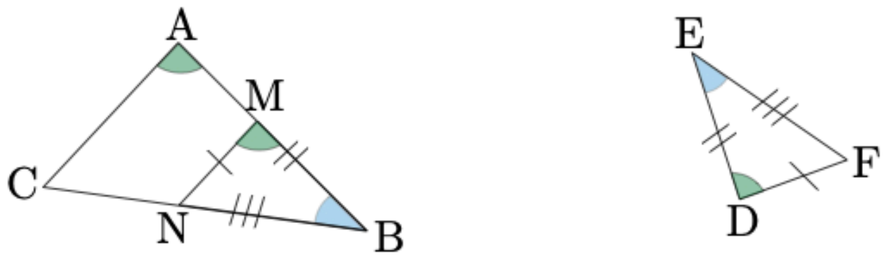
Démonstration :

Soient ABC et DEF deux triangles tels que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$.

Sans perdre de généralité, on peut supposer, par exemple, que l’on a $AB > DE$.

Dans le triangle ABC, on peut donc construire les points M et N tels que :

$BM = ED$, $BN = EF$, $M \in [BA]$ et $N \in [BC]$



Ainsi on a : $\widehat{MBN} = \widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Dans les triangles BMN et EDF, on a :

BM = ED ; BN = EF ; $\widehat{MBN} = \widehat{DEF}$

D'après le cas d'égalité CAC des triangles,

les triangles BMN et EDF sont isométriques.

D'où $\widehat{BMN} = \widehat{EDF}$, $\widehat{MNB} = \widehat{DEF}$

et MN = DF

Donc on a : $\widehat{BMN} = \widehat{EDF} = \widehat{BAC}$.

Comme les angles $\widehat{NMB}$ et $\widehat{CAB}$ sont des angles correspondants égaux, les droites (AC) et (MN) sont parallèles.

Dans les triangles BMN et BAC, d'après le théorème de Thalès, on a :

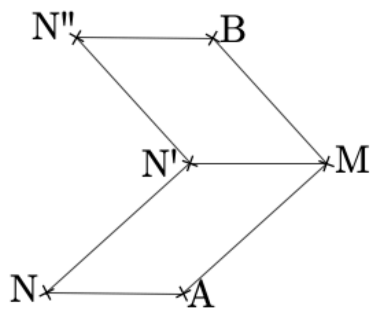
$\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{MN}{CA}$ c'est-à-dire $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DF}{CA} = \dfrac{ED}{BA}$

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Relation de Chasles :

Soit A et B deux points plan.

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$



Démonstration :

Soit N un point du plan.

On note N' l'image du point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$

Ainsi AMN'N est un parallélogramme. Par conséquent, on a : $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{N'M}$

On note N" l'image du point N' par la translation de vecteur $\overrightarrow{MB}$

Ainsi N'MBN" est un parallélogramme. Par conséquent, on a : $\overrightarrow{N'M} = \overrightarrow{N''B}$

D'où : $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{N''B}$ Par conséquent, ABN"N est un parallélogramme.

Autrement dit, N" est l'image du point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Par conséquent, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

Résoudre des problèmes au collège

Les mathématiques émergent historiquement à travers les problèmes eux-mêmes et il est essentiel, d'un point de vue didactique, de ne pas séparer l'un de l'autre, car l'activité de résolution de problèmes va bien au-delà d'une perspective applicative destinée à s'assurer que l'élève mobilise à bon escient une notion ou des stratégies étudiées durant la phase de cours. Elle participe pleinement à la construction même des notions et de leur ancrage : il serait vain, par exemple, de vouloir comprendre la notion de fonction sans vivre à travers les problèmes la puissance de cette notion elle-même. Ces apprentissages mathématiques bénéficient alors de l'engagement actif dans la tâche que la résolution de problèmes favorise. Ils bénéficient aussi des démarches réflexives autour des erreurs, ainsi que des retours d'informations reçus lors de tentatives de trouver la solution. L'engagement actif et le retour sur les erreurs sont deux piliers de l'apprentissage .

Extrait du fascicule «La résolution de problèmes au collège»

INTRODUIRE DES CONCEPTS PAR DES PROBLÈMES

Consigne 2 :

Parmi ces problèmes, lequel à votre préférence pour introduire l'inégalité triangulaire ?

Problème n°1 :

1 Dans chaque cas, dire si Léna peut construire un triangle dont les côtés ont les longueurs données. Justifier la réponse par une construction.

a. 8 cm ; 5 cm ; 3 cm **b.** 7 cm ; 6 cm ; 4 cm **c.** 5 cm ; 9,5 cm ; 3,5 cm

2 **a.** Choisir trois longueurs.
Dire s'il est possible de construire un triangle dont les côtés ont les longueurs choisies.
b. Imaginer la condition que doit vérifier la plus grande des trois longueurs choisies pour pouvoir construire un tel triangle.

Problème n°2 :

Après avoir cassé un spaghetti en trois morceaux (pas forcément de même taille), est-il toujours possible de former un triangle avec ces morceaux ?

Problème n°3 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm et AC = 5 cm.
Quel est le plus grand périmètre du triangle ABC que l'on peut obtenir ?

Consigne 3 :

Débattons du scénario suivant(intérêts, inconvénients) :

Scénario pour ce type de séance (issue de la brochure de l'Irem de Lyon) :

- Phase 1 : recherche d'arguments pour justifier (recherche individuelle)
- Phase 2 : recherche d'arguments pour justifier la réponse du groupe
  (recherche en groupe de 4 élèves)
  élaboration d'une affiche en vue de la phase 3
- Phase 3 : présentation des affiches et débat sur les affiches
- Phase 4 : synthèse et lien avec des savoirs mathématiques
  mise en évidence les faiblesses de certains arguments

Consigne 4 :

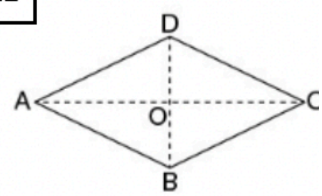
1) Pourquoi peut-on dire que ces deux extraits de manuels ne sont pas des problèmes pour introduire un savoir mathématique ?
2) Dégager des éléments caractéristiques d'une situation permettant d'introduire un savoir (mathématique) par un problème ?

3 Étudier une propriété des diagonales des losanges

Cours Paragraphe 2b, p. 266

Transmaths 6ème, 2022

ABCD est le losange ci-contre.



1 a. Expliquer pourquoi les points B et D sont à la même distance des extrémités du segment [AC].

b. Que peut-on dire alors de l'affirmation de Romane ? Expliquer.

Romane : Les diagonales du losange ABCD sont perpendiculaires.

Mathis : Le point O occupe une position particulière sur les diagonales.

2 Expliquer et préciser l'affirmation de Mathis.

3 Expliquer et préciser l'affirmation de Célia.

Célia : Certains angles du losange ont même mesure.

Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle

OBJECTIF 1

1 Avec un logiciel de géométrie dynamique.

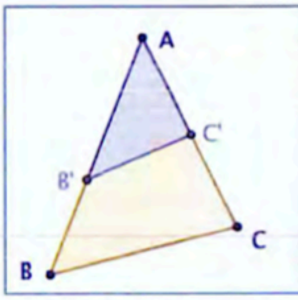
a. Construire un triangle ABC quelconque. GeoGebra 7

b. Placer un point B' sur le côté [AB] et un point C' sur le côté [AC].

c. Construire le triangle AB'C'.

d. Ouvrir la fenêtre du tableur du logiciel et reproduire la feuille de calcul suivante.

GeoGebra 25



	A	B	C	D	E	F	G
1	Triangle AB'C'	AB'=		AC'=		B'C'=	
2	Triangle ABC	AB=		AC=		BC=	
3							
4							
5							
6							
7							

2 Comment semble-t-on devoir placer les points B' ou C' pour que le tableau soit un tableau de proportionnalité ? On pourra étudier différentes positions des points A, B et C.

3 a. Pour tester cette conjecture, placer sur les côtés [AB] et [AC] deux points M et N vérifiant les conditions trouvées à la question 2.

b. Construire un nouveau tableau avec les longueurs AM, AB, AN, AC, MN et BC comme celui de la question 1.

c. Ce tableau semble-t-il être un tableau de proportionnalité pour diverses positions des points M et N ? Que peut-on en conclure ?

4 a. Démontrer que, dans ce cas, les triangles ABC et AMN sont semblables.

b. Conclure.

<u>Consigne 5 :</u>

1) Choisir l'un des problèmes de la liste puis expliquer pourquoi peut-on affirmer qu'il constitue un bon problème pour introduire la notion visée.

2) Décrire vos interrogations et/ou vos difficultés concernant sa mise en œuvre.