

Géométrie

guillaume.didier@inspe-paris.fr

RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION



Mathématiques

Extrait de l'introduction
du programme du cycle 4

La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique [...])

Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde [...]

L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique [...] mais aussi par l'exemple. C'est pourquoi il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. [...] Certaines démonstrations peuvent être élaborées et mises au point par les élèves eux-mêmes (de manière individuelle ou collective), sous la conduite plus ou moins forte du professeur ; d'autres, inaccessibles à la recherche des élèves, tireront leur profit des explications et des commentaires apportés par le professeur. [...]

Il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours [...] plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée.

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Consigne 1 :

Résoudre les exercices suivants.

Exercice 1 :

Construire deux points A et B appartenant respectivement à (d_1) et (d_2) tels que M soit le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

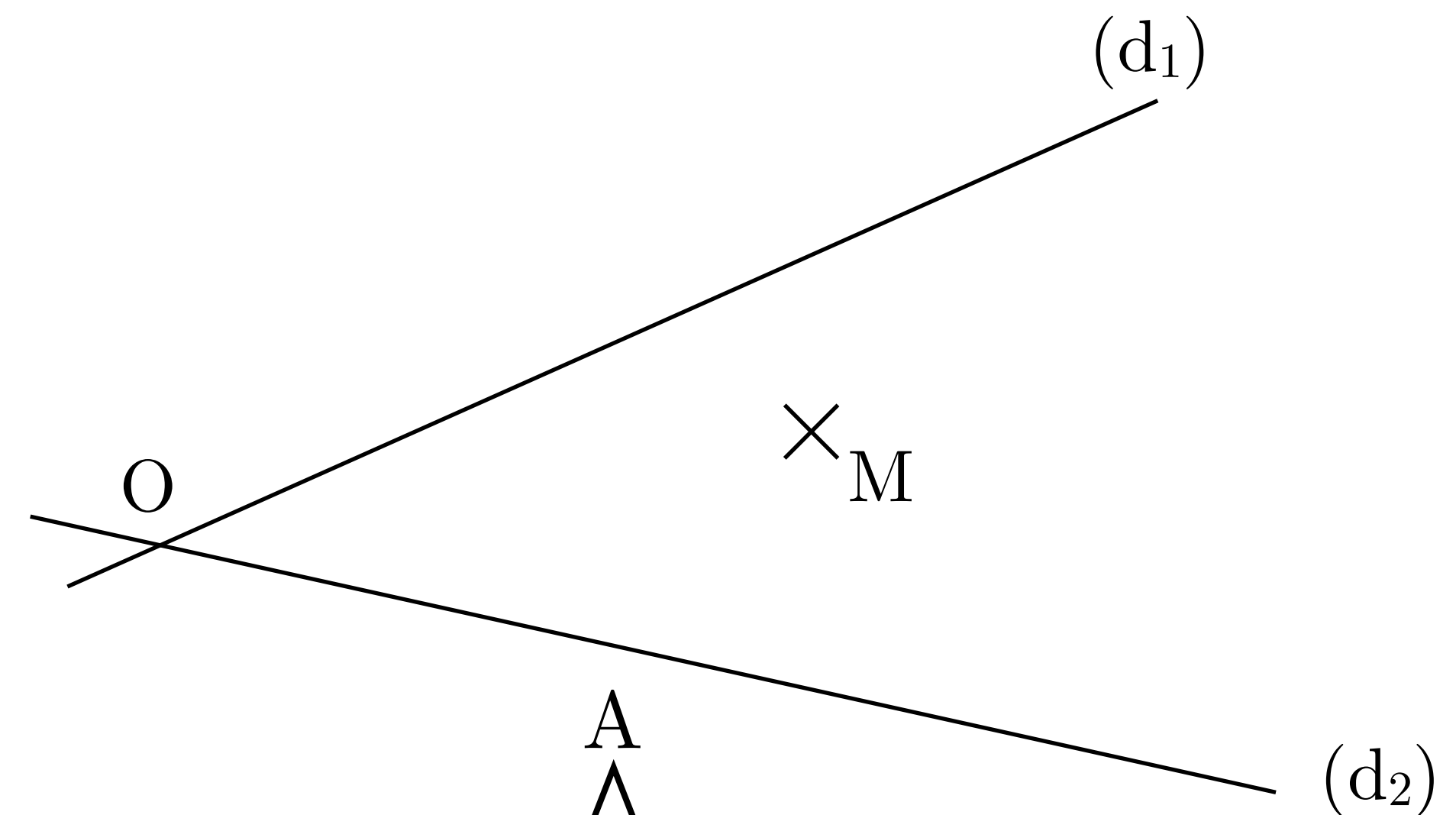
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Consigne 1 :

Résoudre les exercices suivants.

Exercice 1 :

Construire deux points A et B appartenant respectivement à (d_1) et (d_2) tels que M soit le milieu du segment $[AB]$.

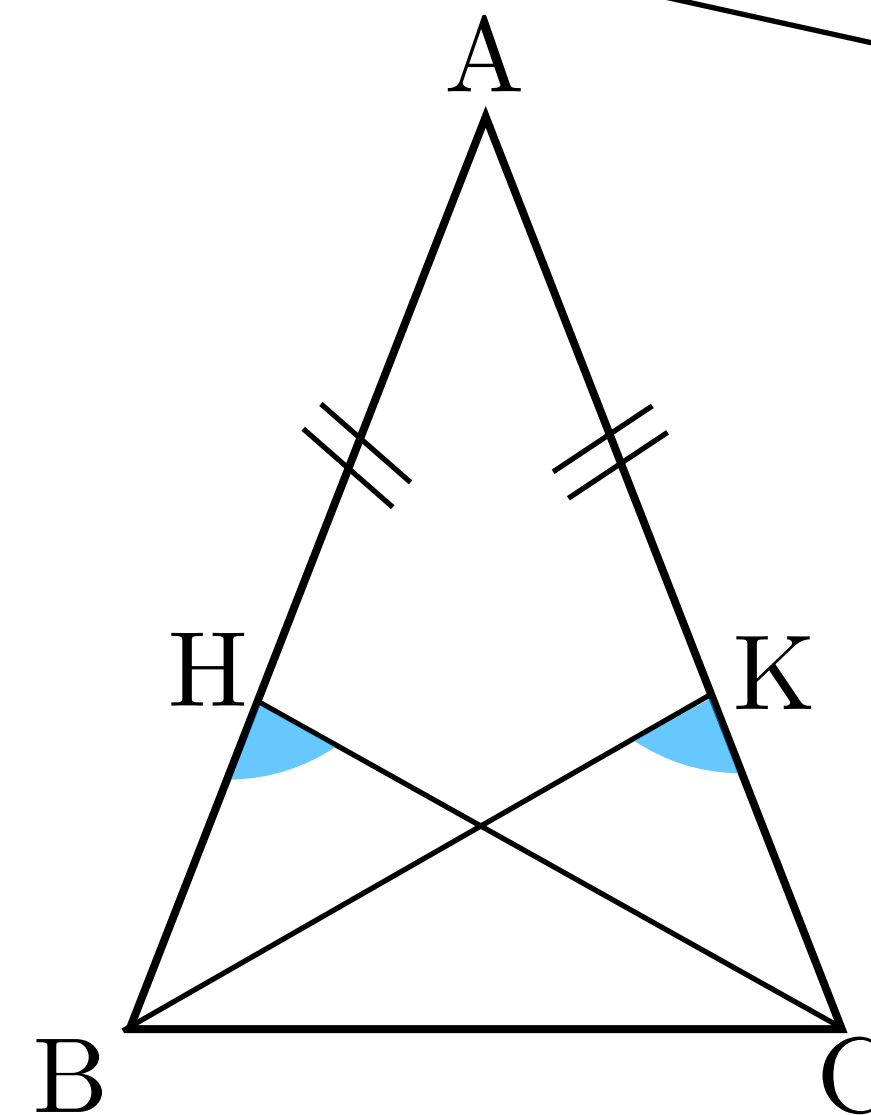


Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante peut constituer une aide pour les élèves pour construire leur raisonnement mais aussi pour le professeur qui peut s'y référer pour les aider en cas de blocage.

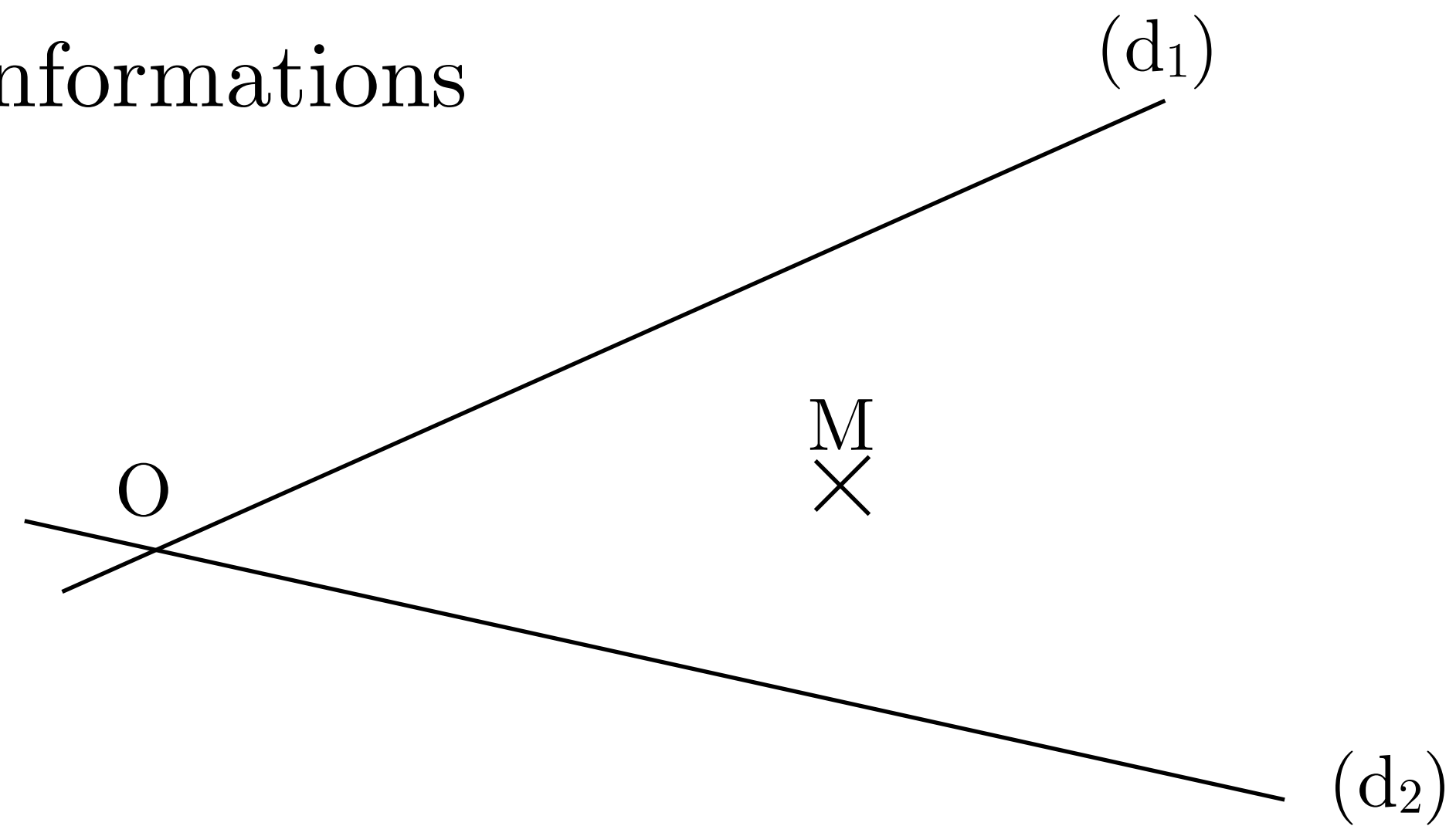
L'analyse remontante consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou des propriétés de la configuration étudiée qui une fois établie(s) impliquerai(en)t, en appliquant un théorème identifié, le résultat à démontrer. Il suffit alors de substituer (momentanément) au problème posé au départ le problème qui consiste à établir les éléments intermédiaires. Cette démarche peut ainsi permettre, dans la plupart des situations rencontrées en géométrie au collège, de « remonter » d'étape en étape une chaîne d'îlots déductifs jusqu'à un problème dont la résolution sera immédiate.

Extrait du document « Géométrie » des programmes de 2008

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

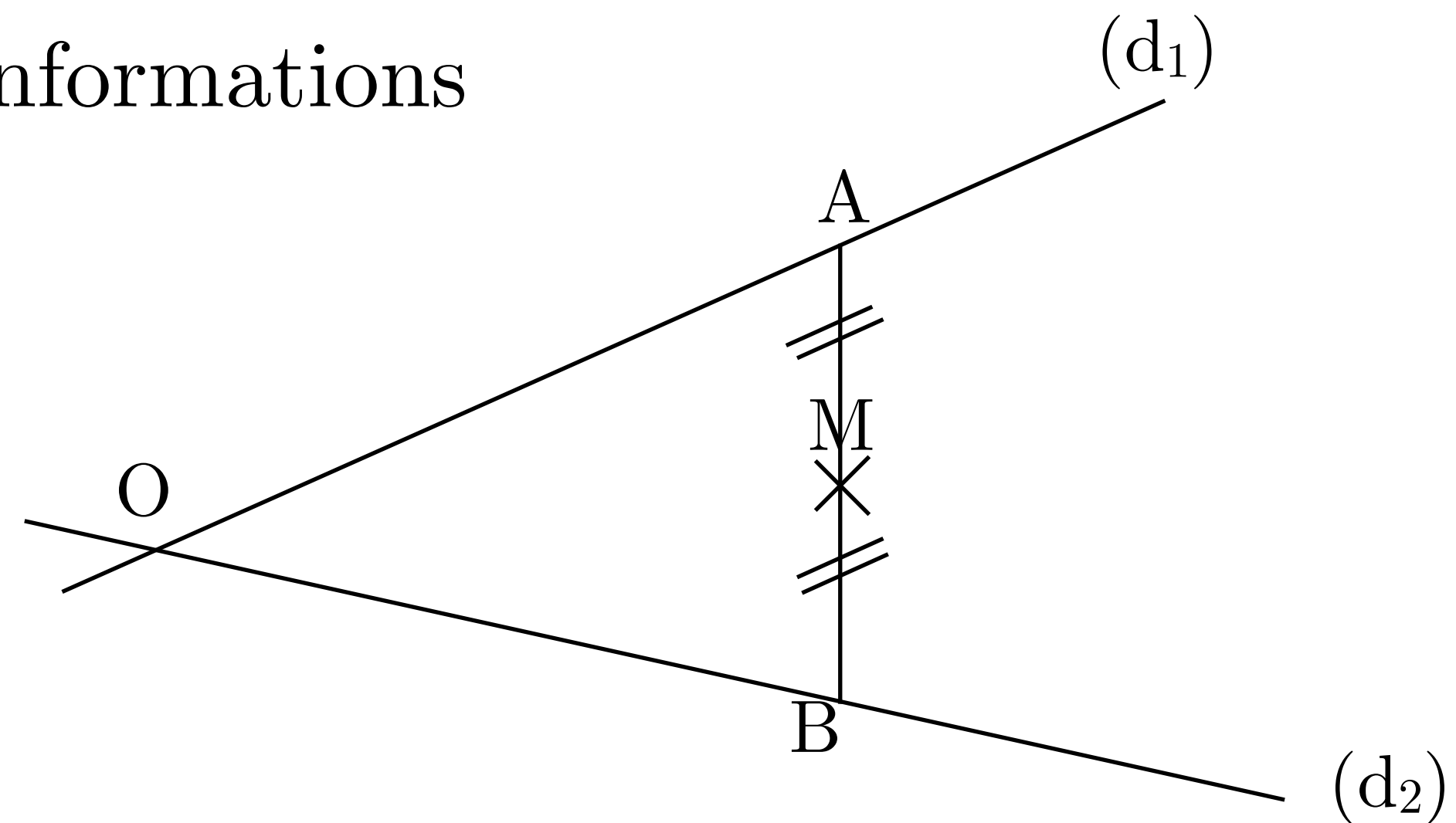
1) Tracer la figure pour visualiser les informations



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

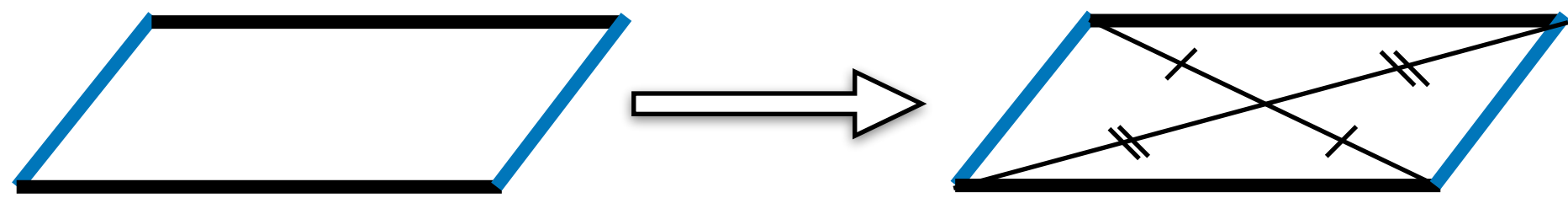
- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale



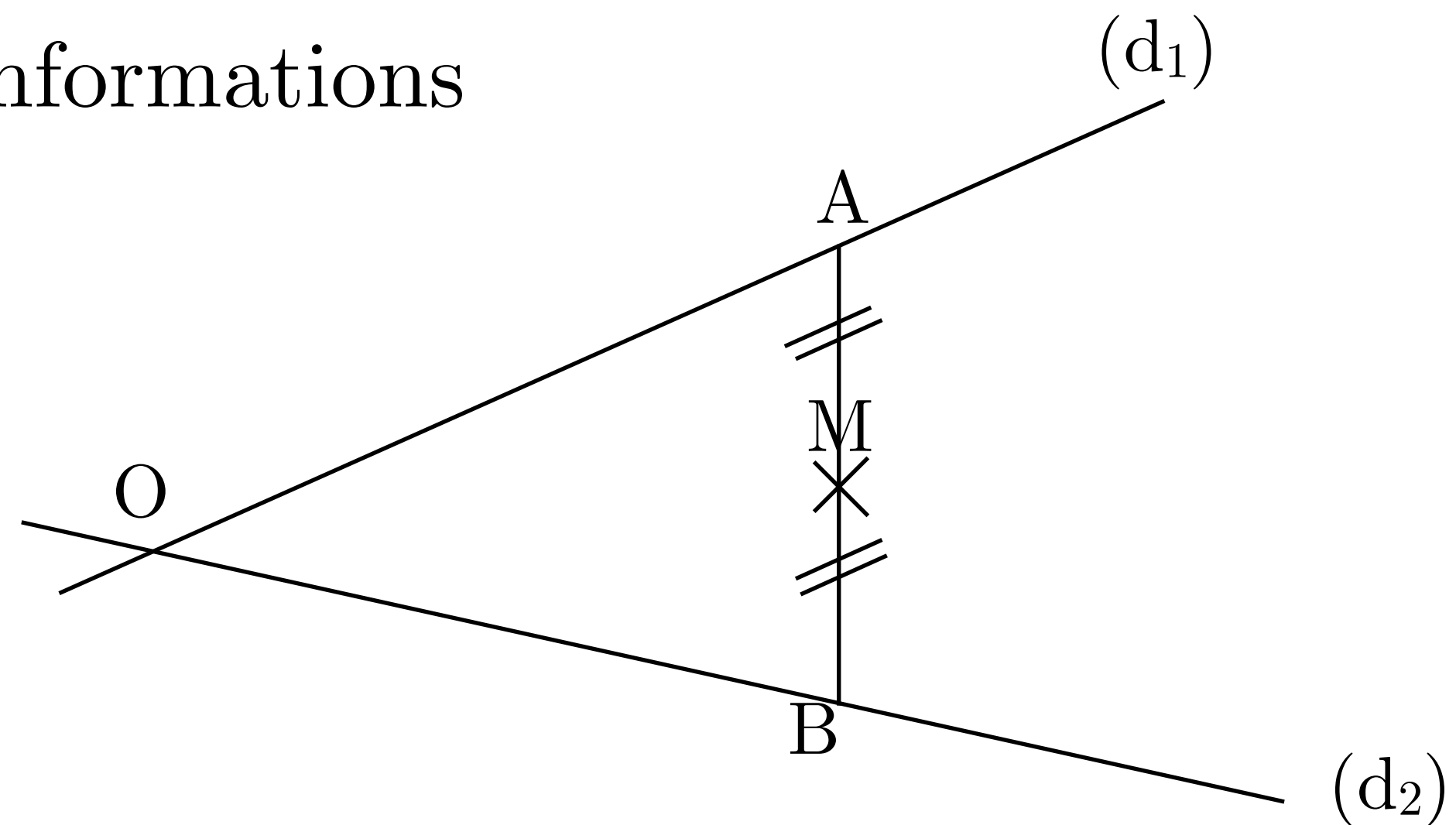
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



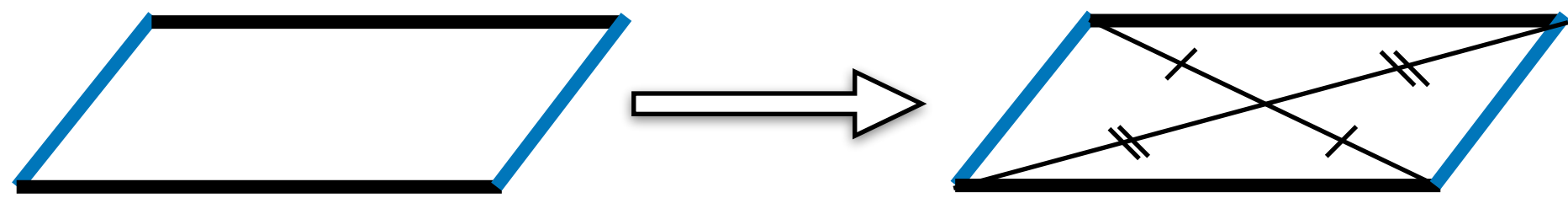
Les diagonales d'un parallélogramme



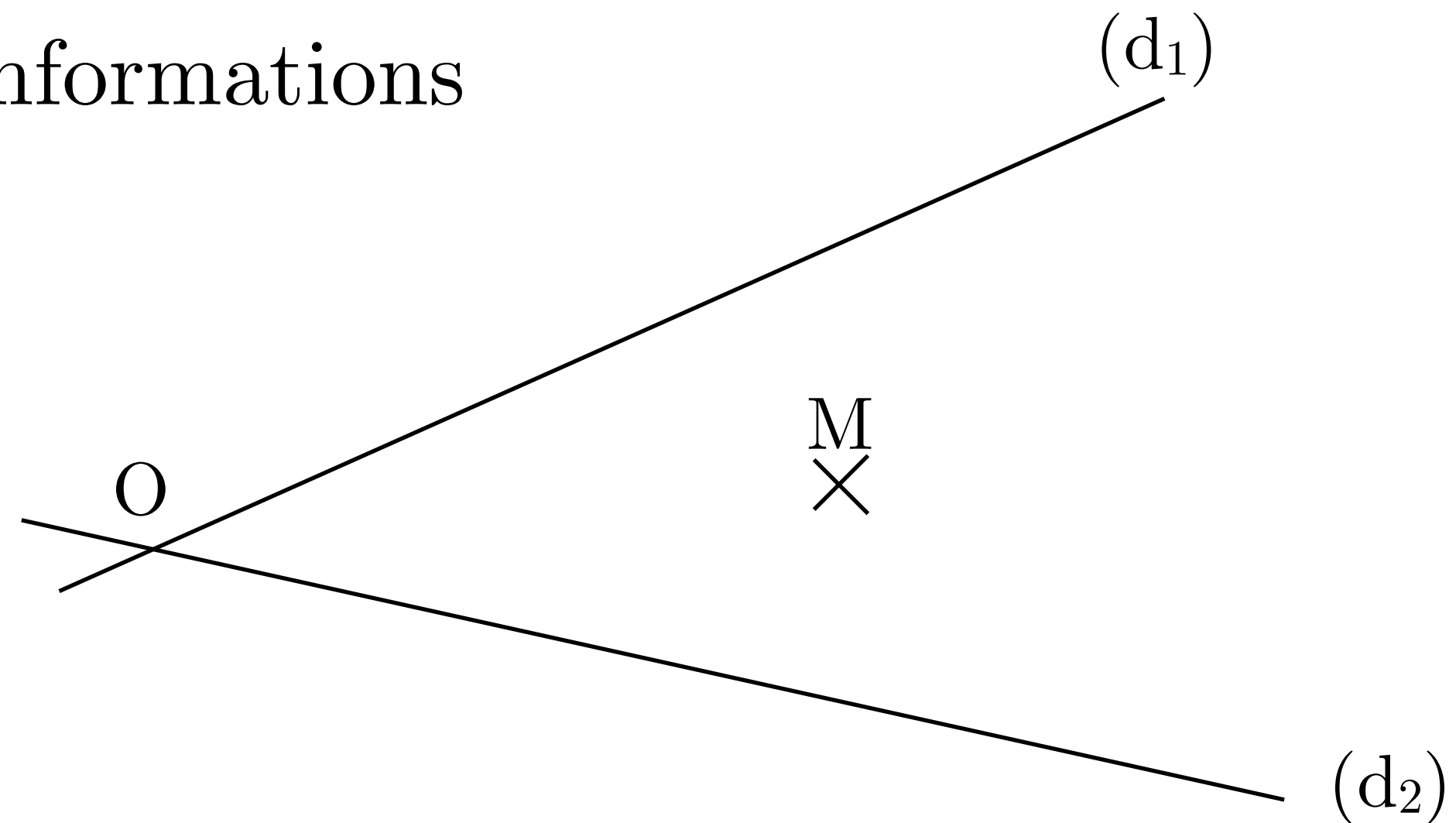
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme

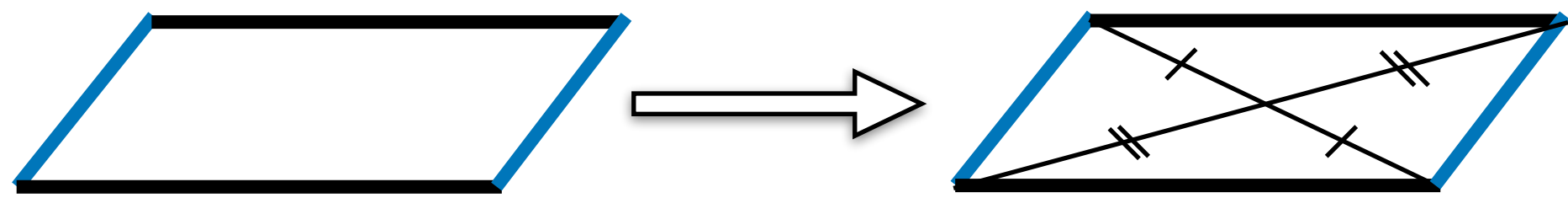


Phase de synthèse (résolution du problème) :

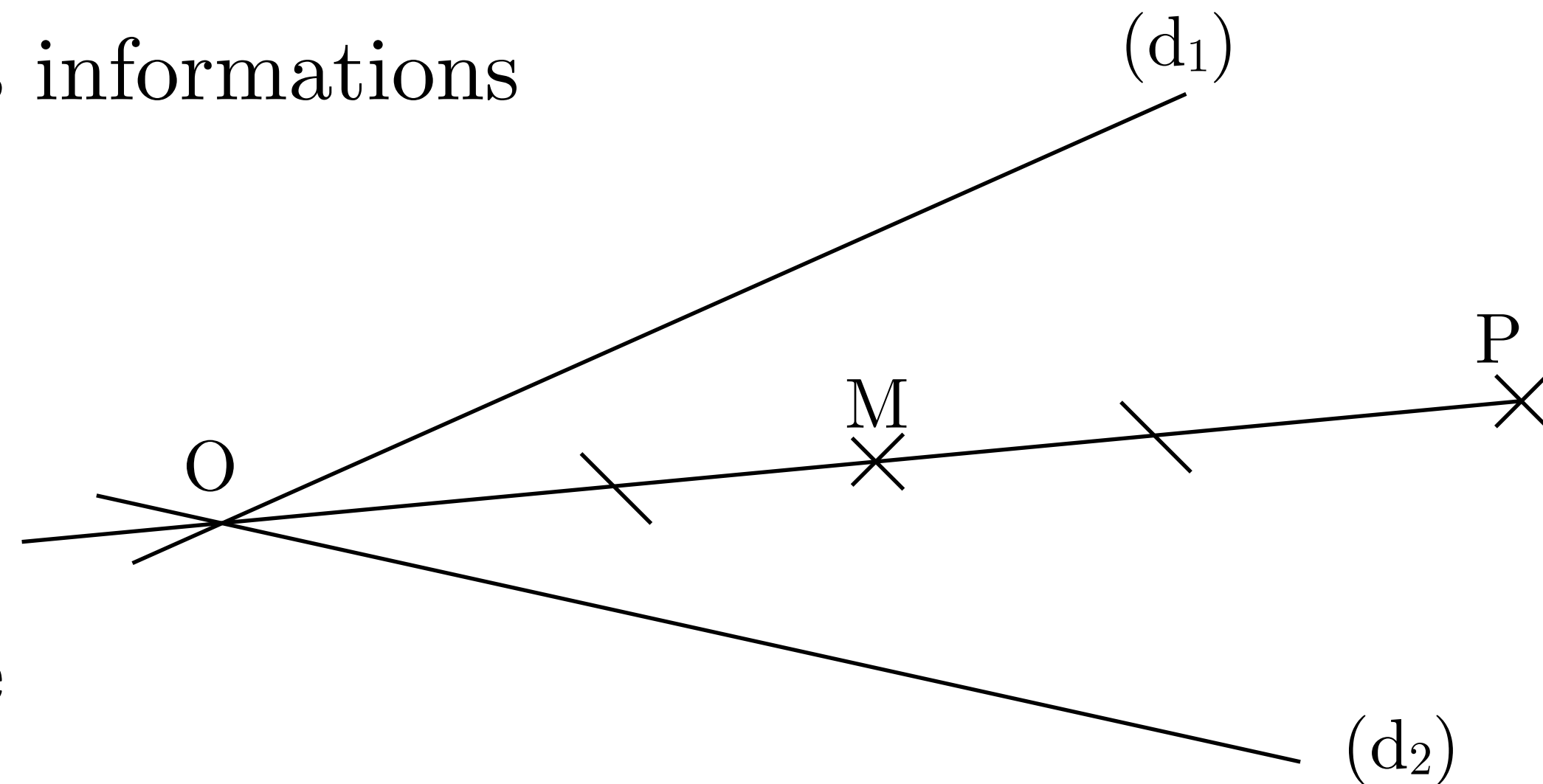
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme



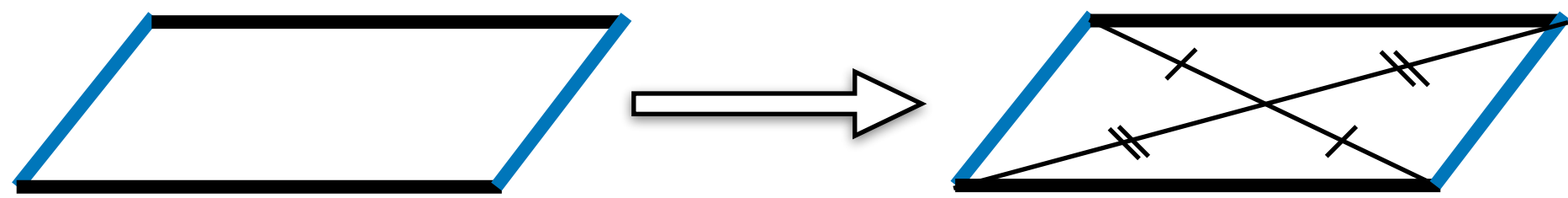
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer le point P tel que M soit le milieu du segment [OP]

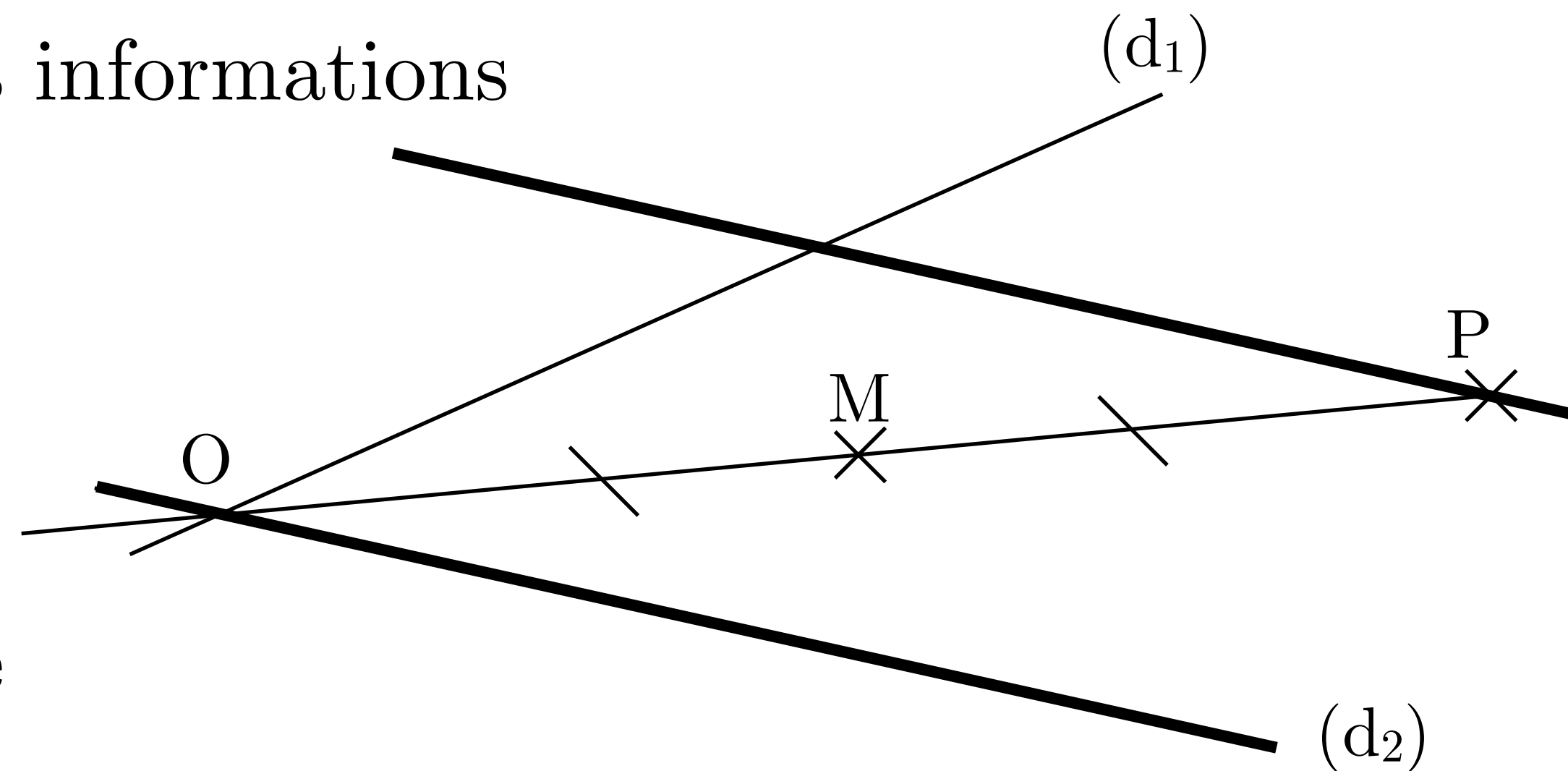
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme



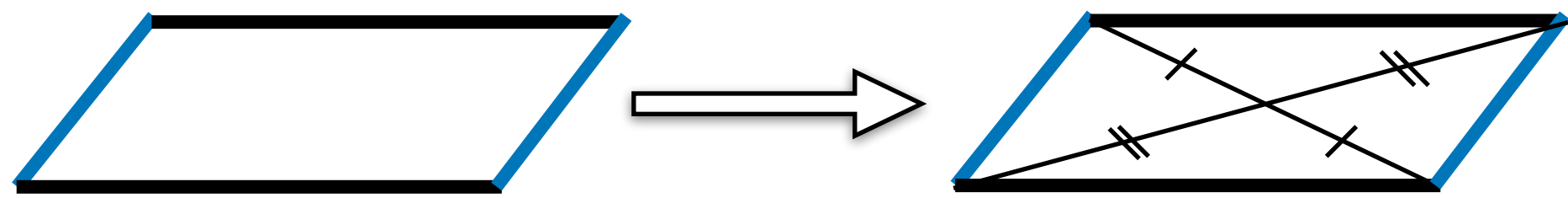
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer le point P tel que M soit le milieu du segment $[OP]$
- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point P

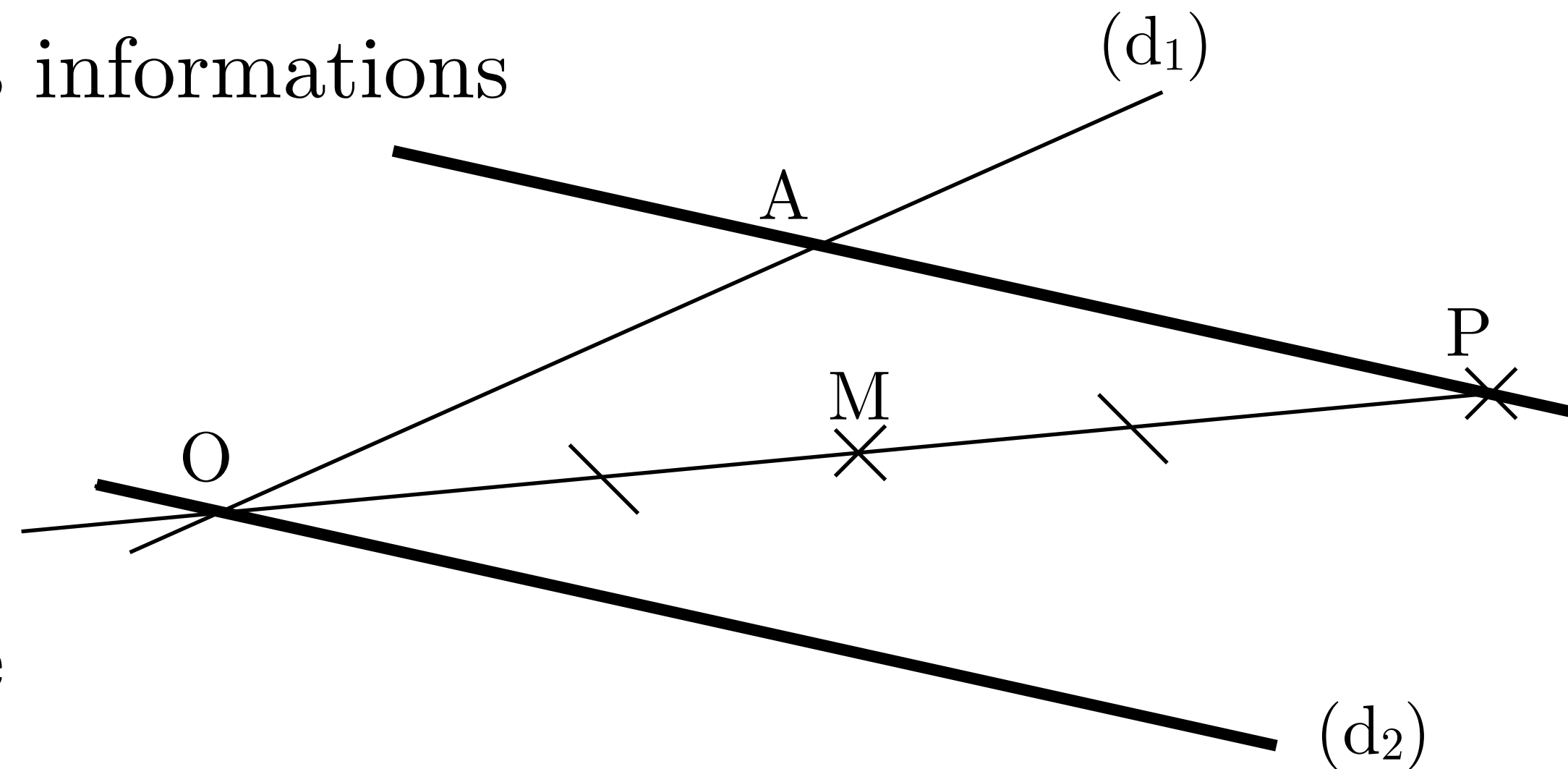
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme



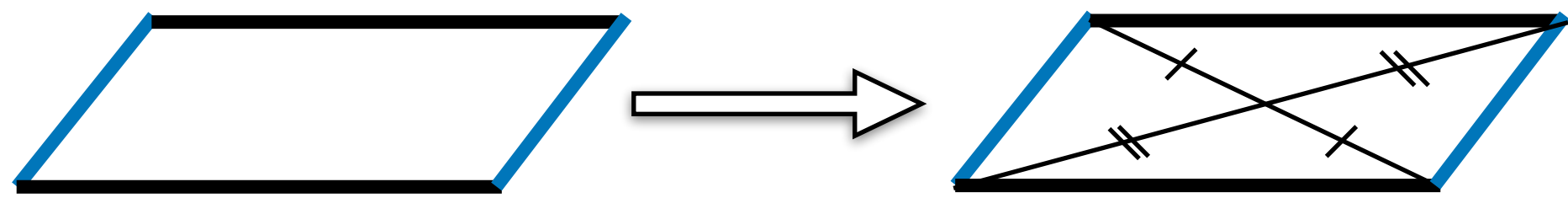
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer le point P tel que M soit le milieu du segment $[OP]$
- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point P
- Noter A le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .

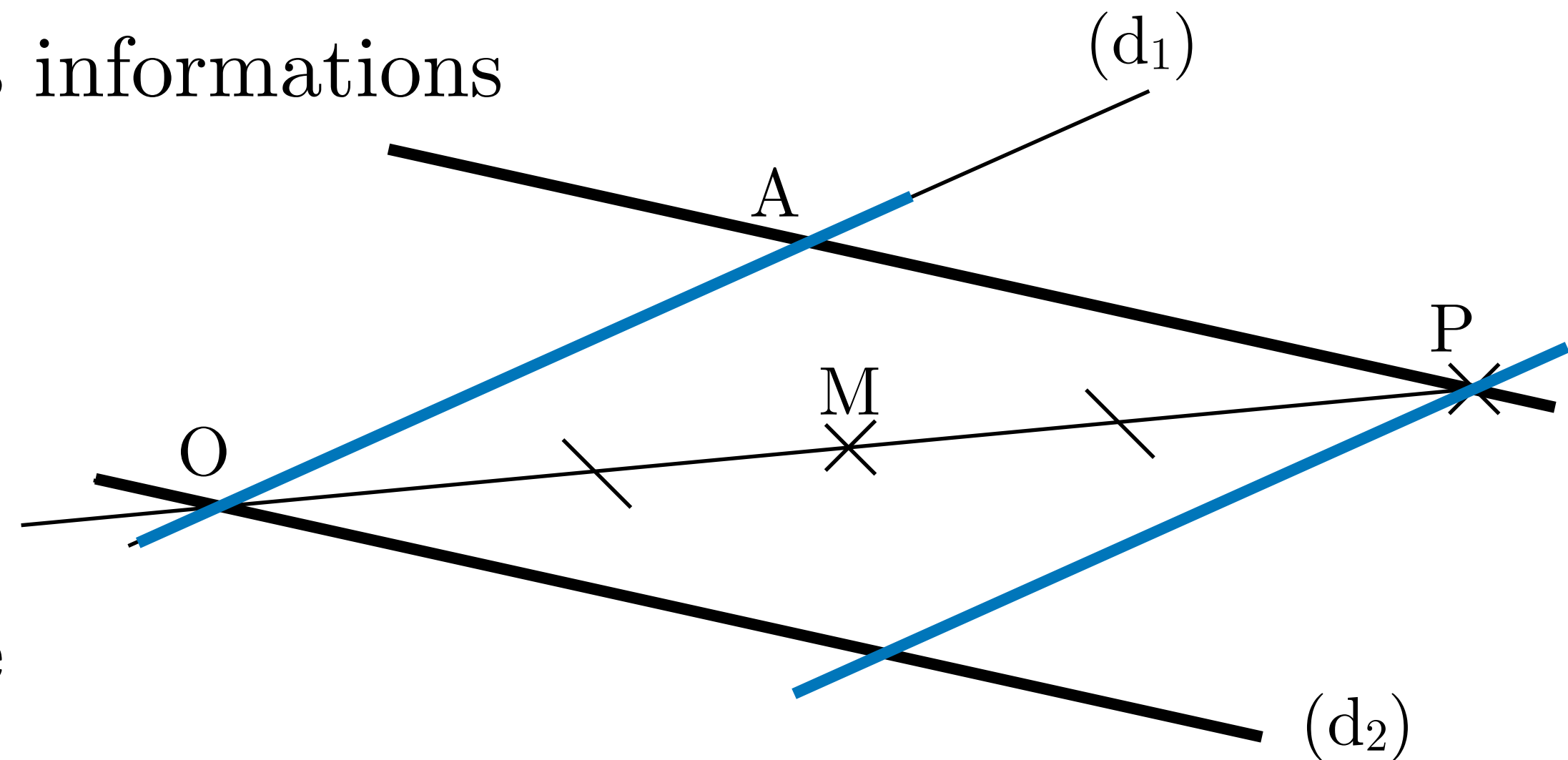
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme



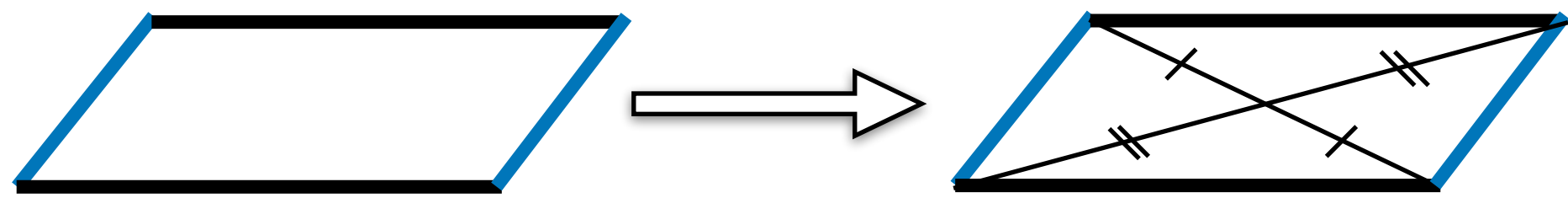
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer le point P tel que M soit le milieu du segment $[OP]$
- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point P
- Noter A le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .
- Tracer la droite passant par les points A et M

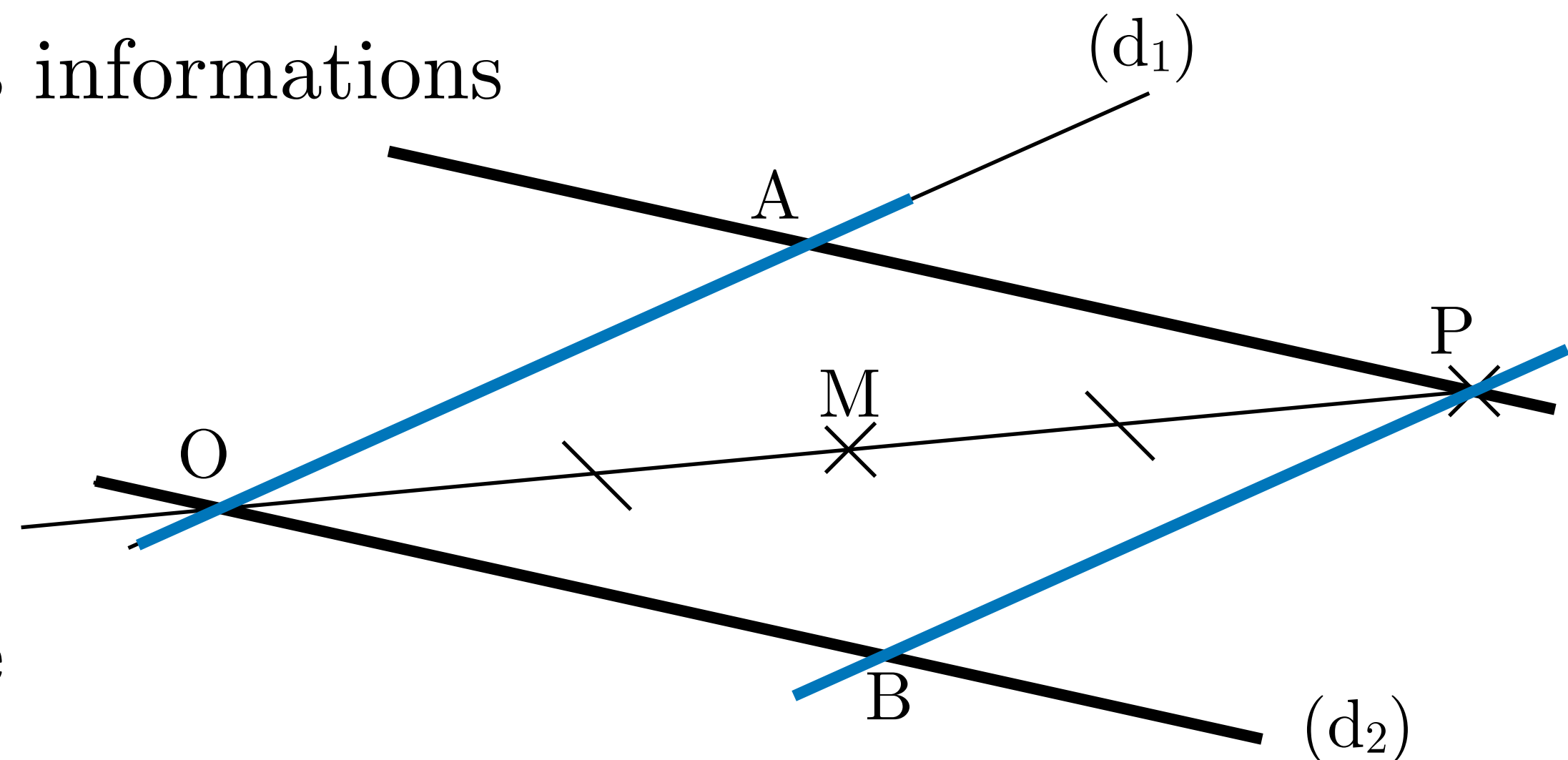
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase d'analyse du problème :

- 1) Tracer la figure pour visualiser les informations
- 2) Partir de la figure finale
- 3) Faire le lien avec un théorème



Les diagonales d'un parallélogramme



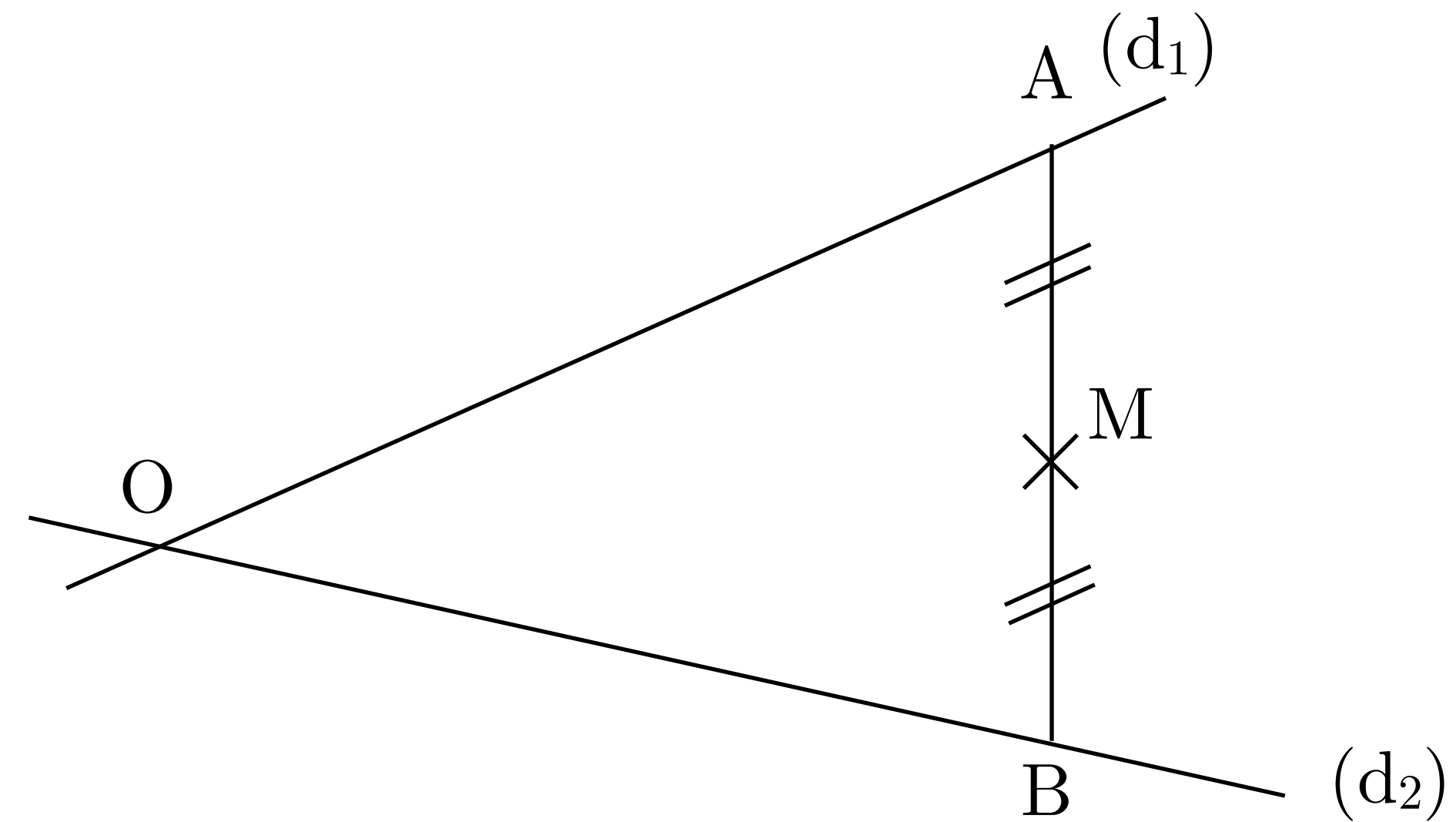
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer le point P tel que M soit le milieu du segment $[OP]$
- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point P
- Noter A le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .
- Tracer la droite passant par les points A et M
- Noter B le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_2) .

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

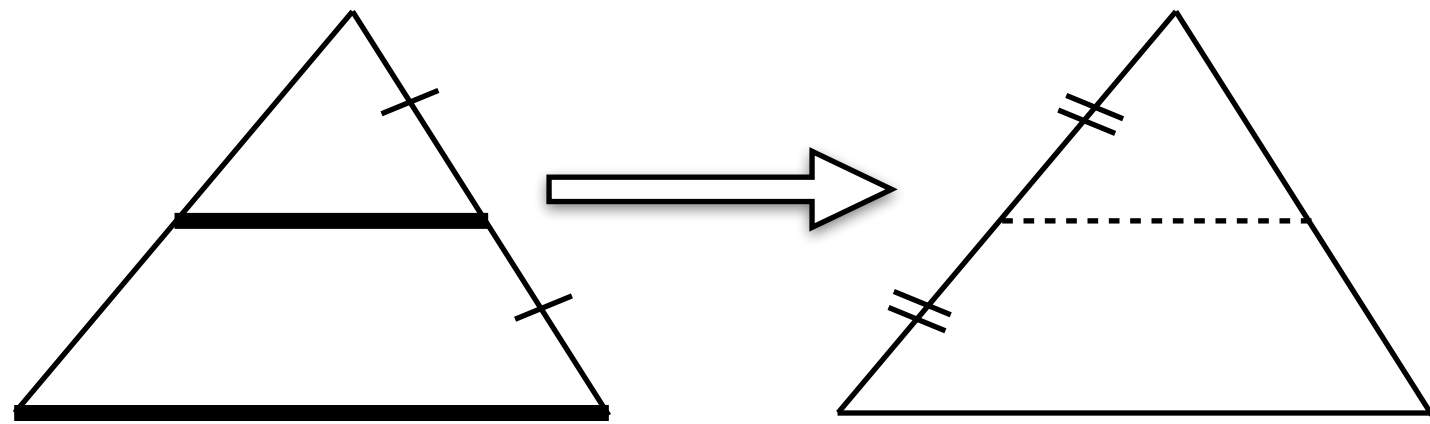
1) Partir de la figure finale



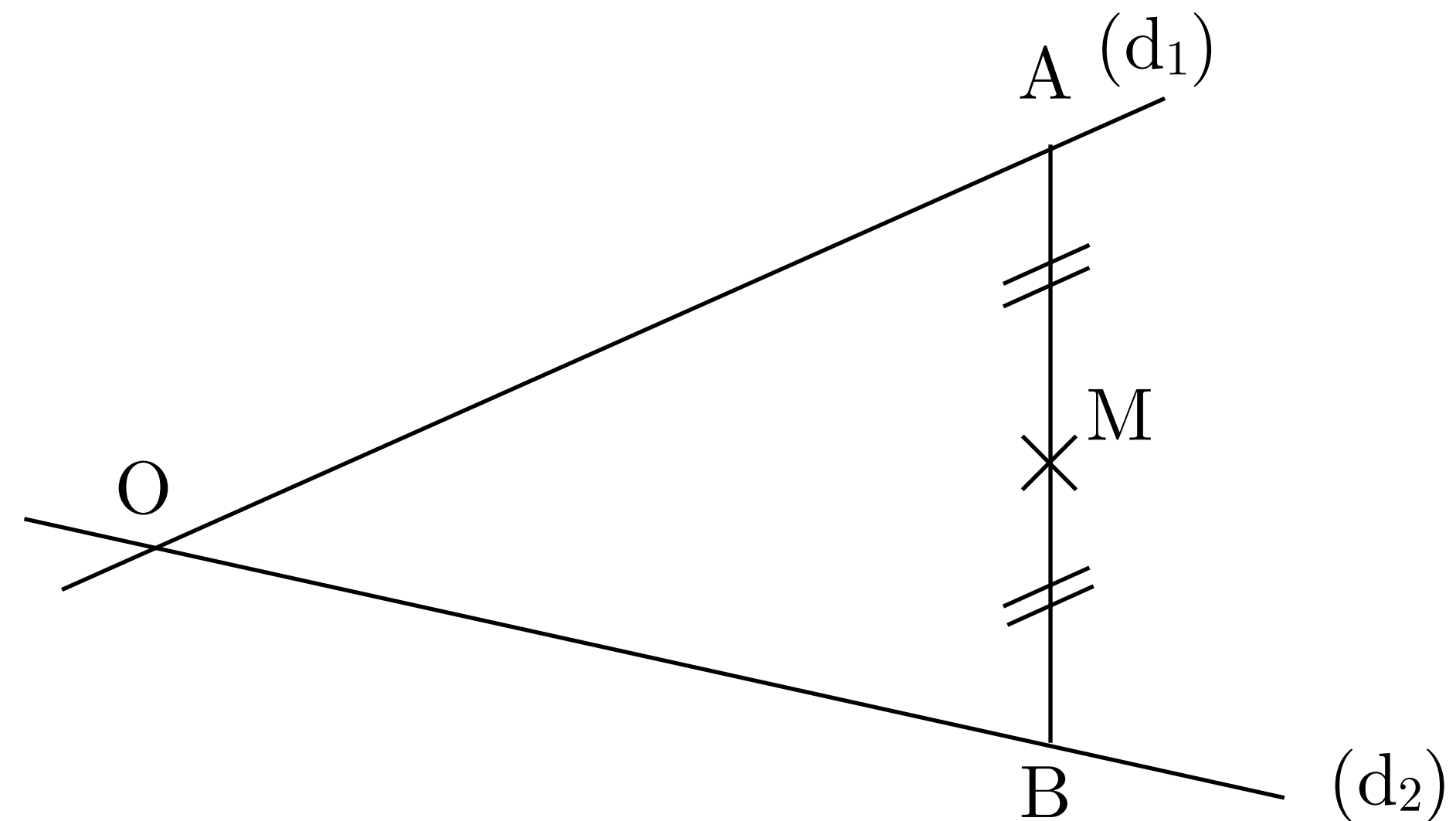
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



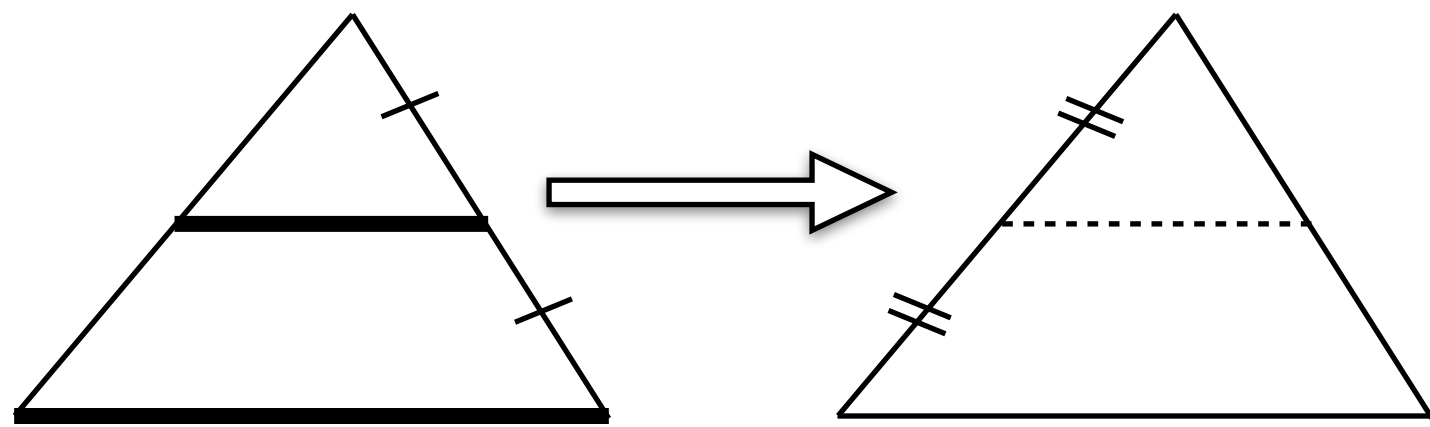
Cas particulier du théorème de Thales



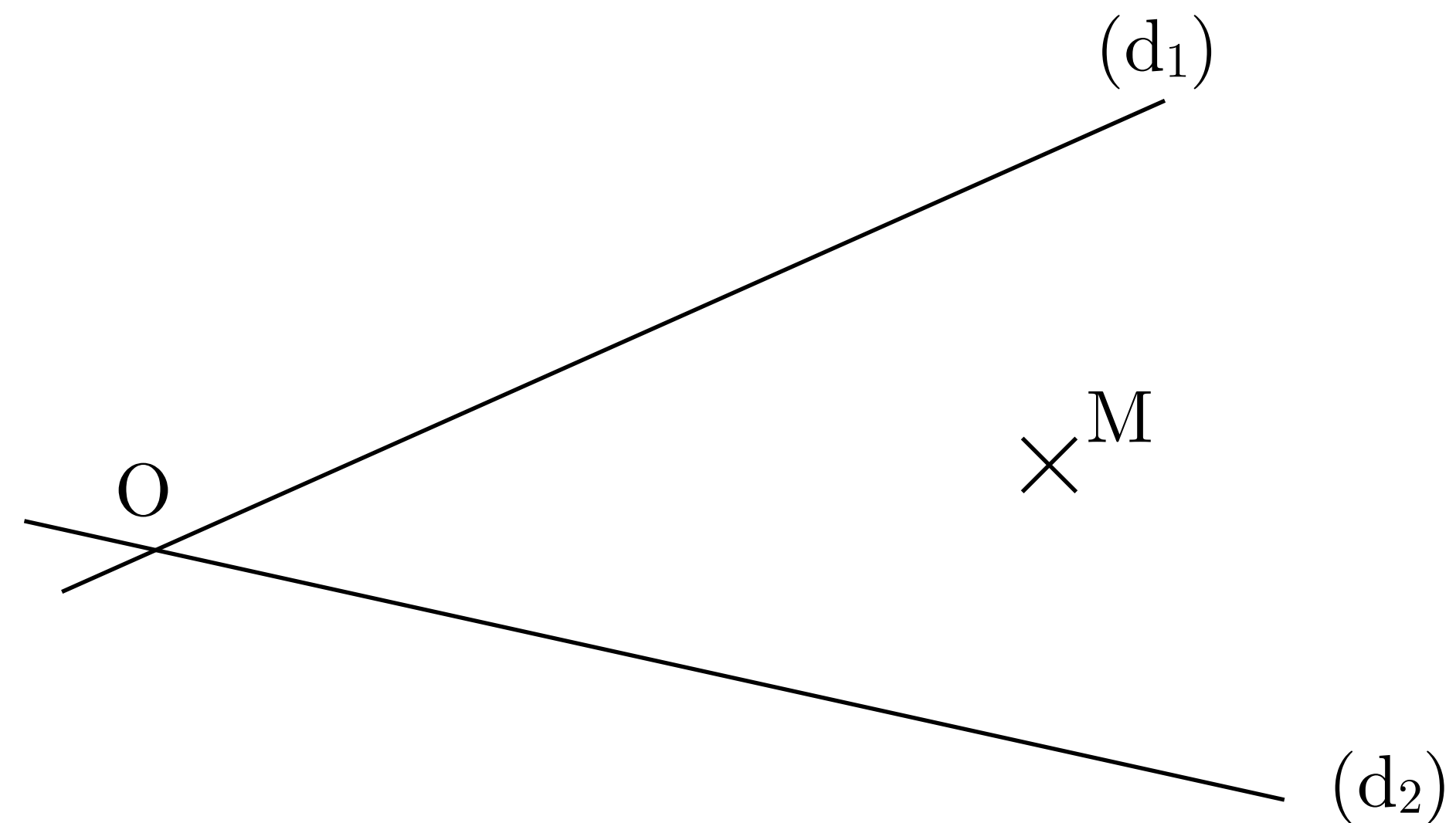
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales

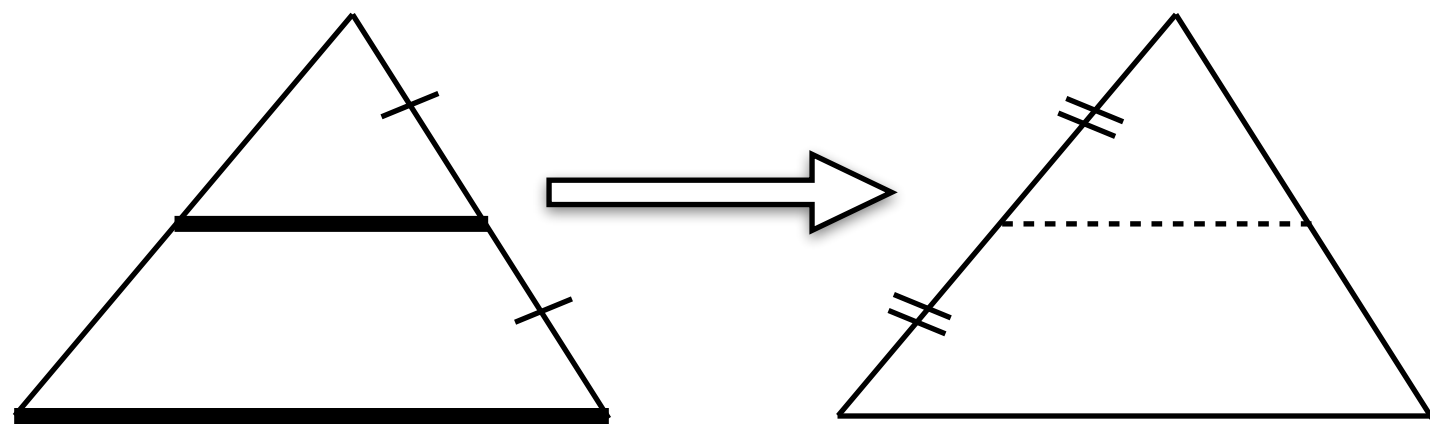


Phase de synthèse (résolution du problème) :

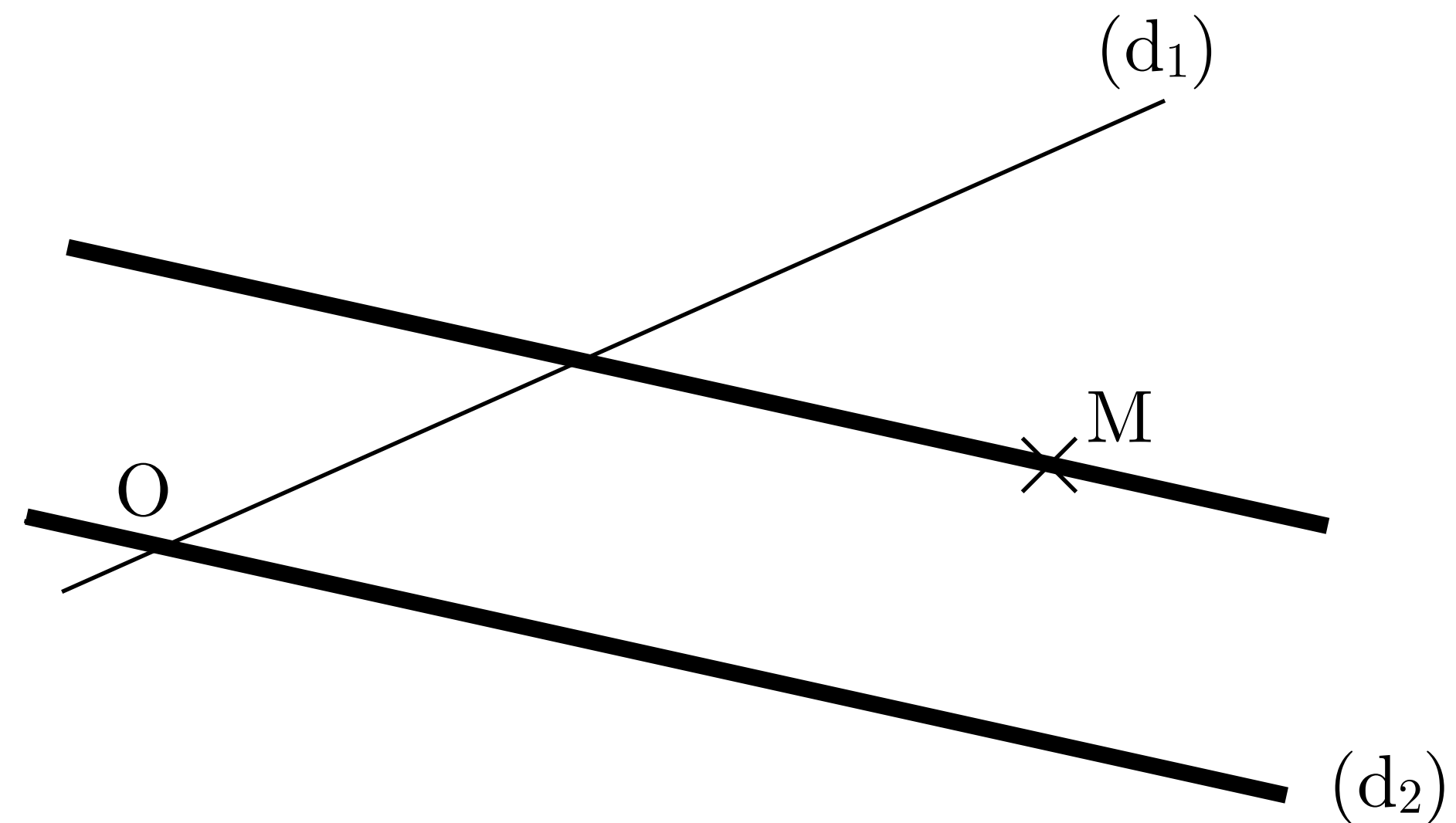
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales



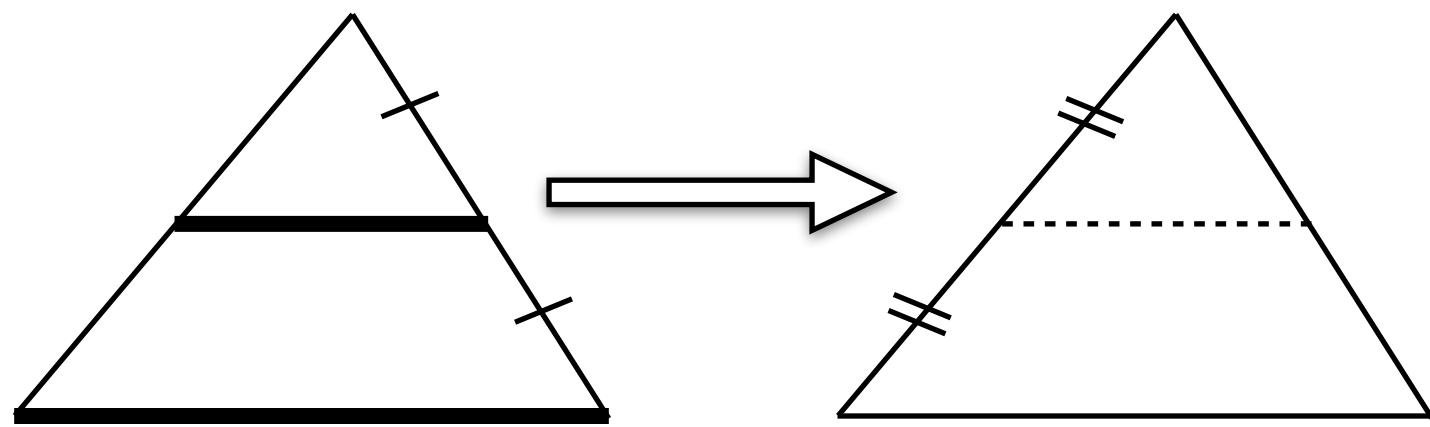
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point M.

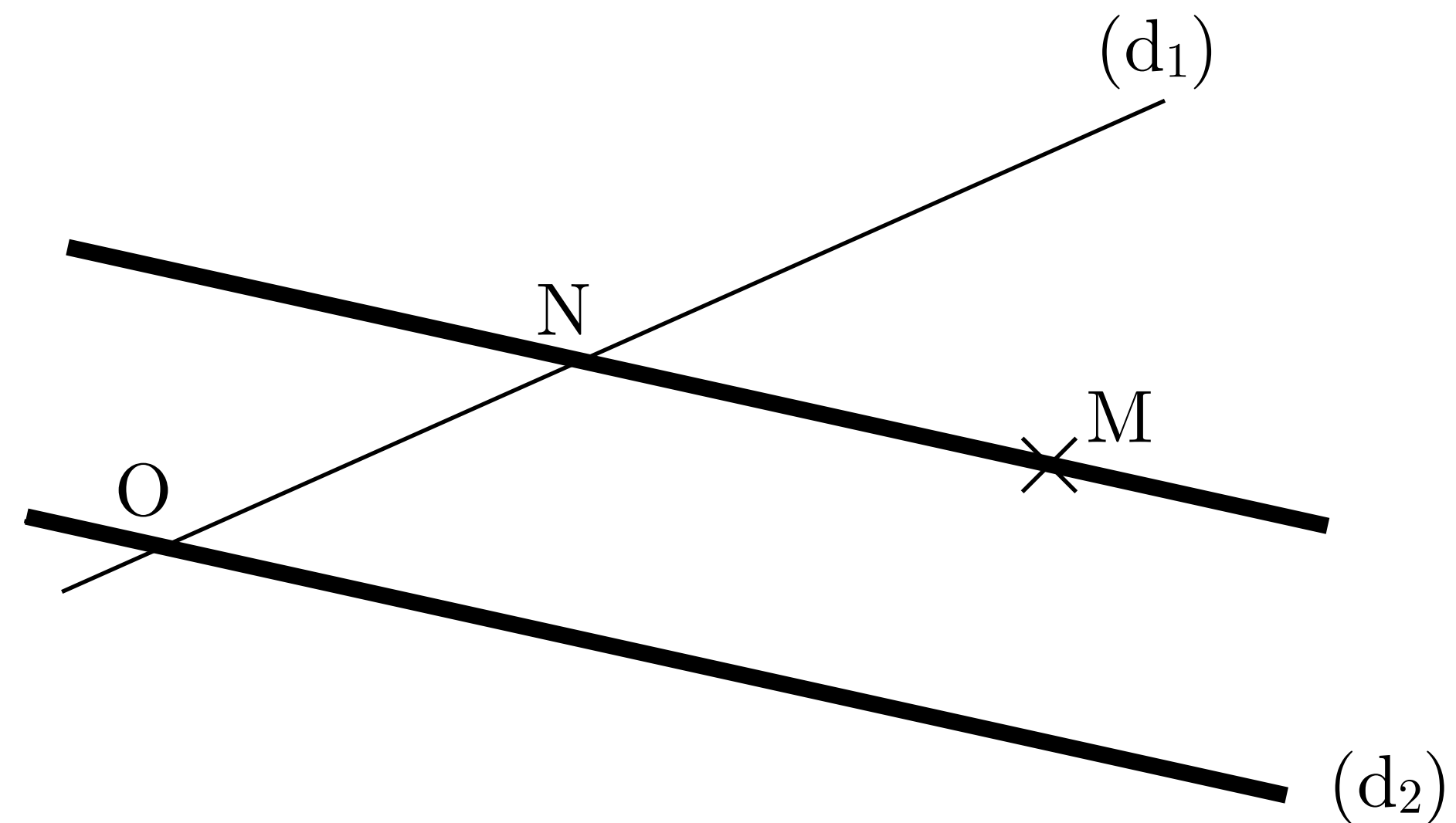
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales



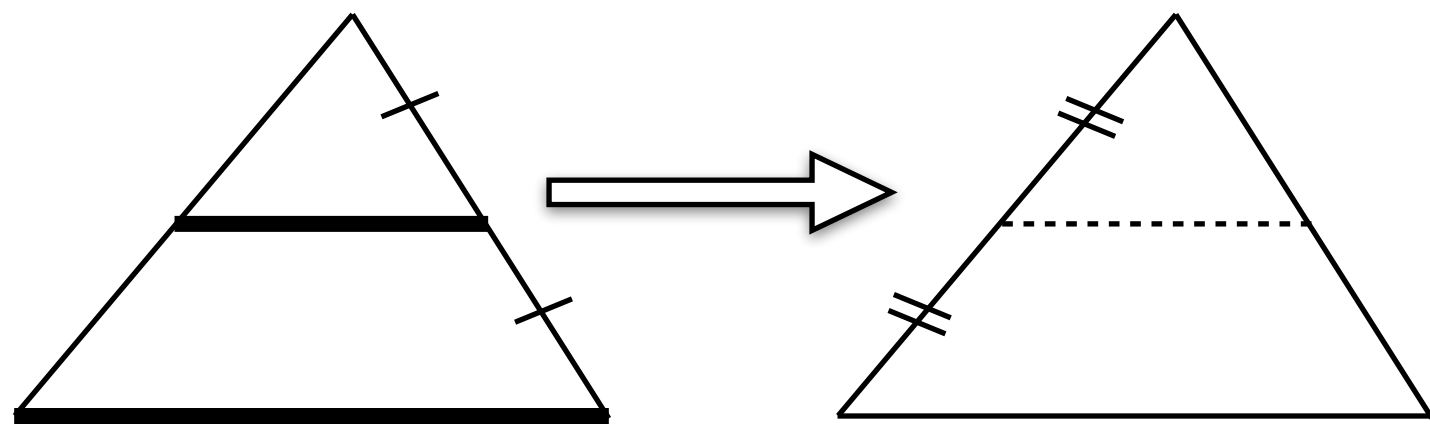
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point M.
- Noter N le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .

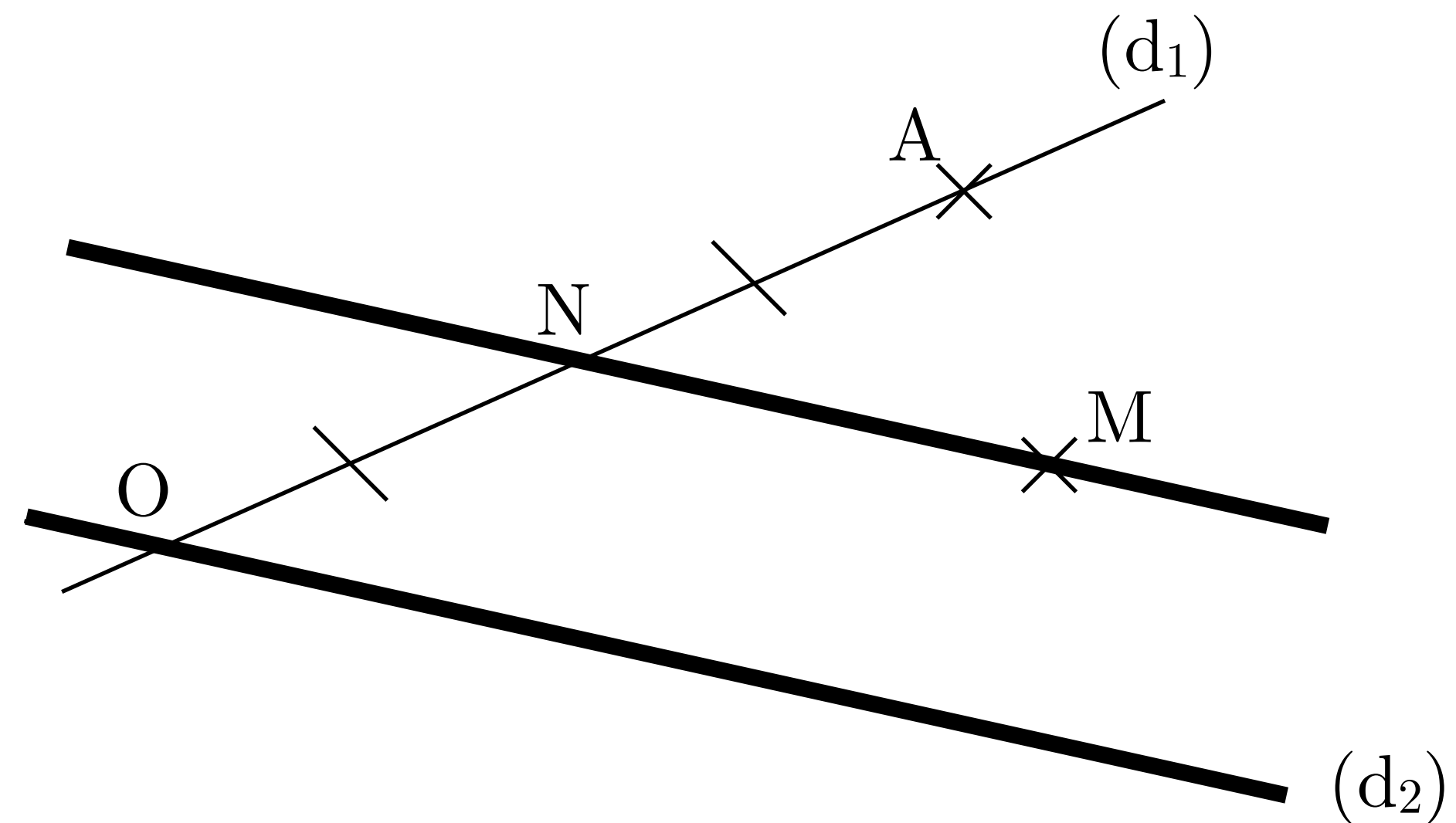
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales



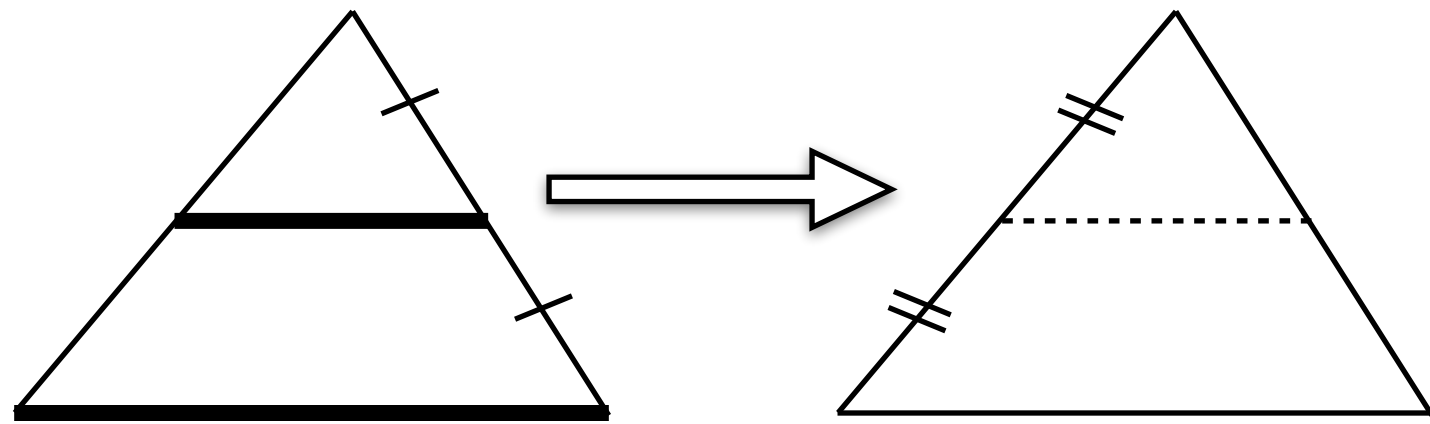
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point M.
- Noter N le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .
- Noter A le point tel que N soit le milieu du segment $[AO]$.

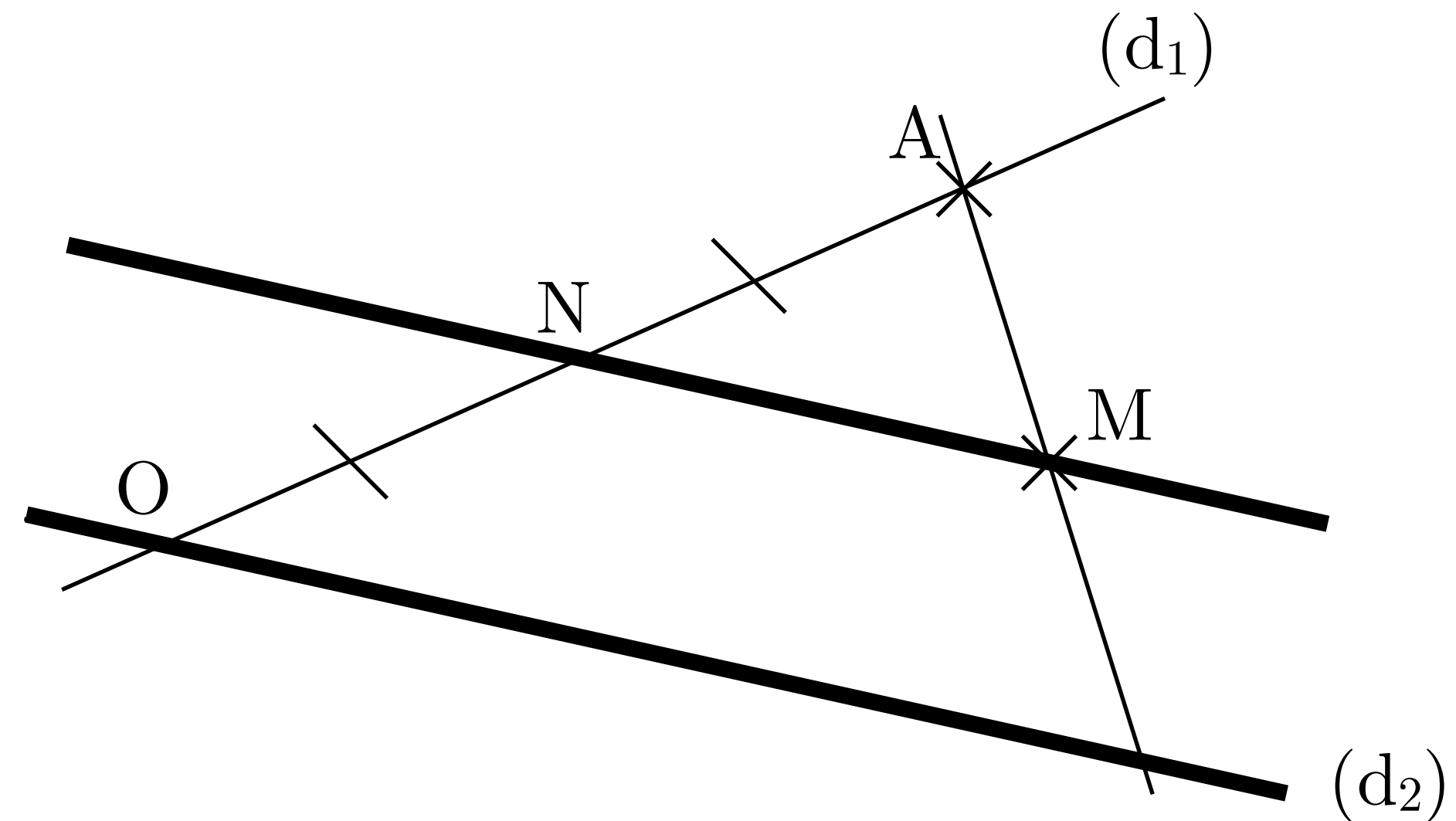
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales



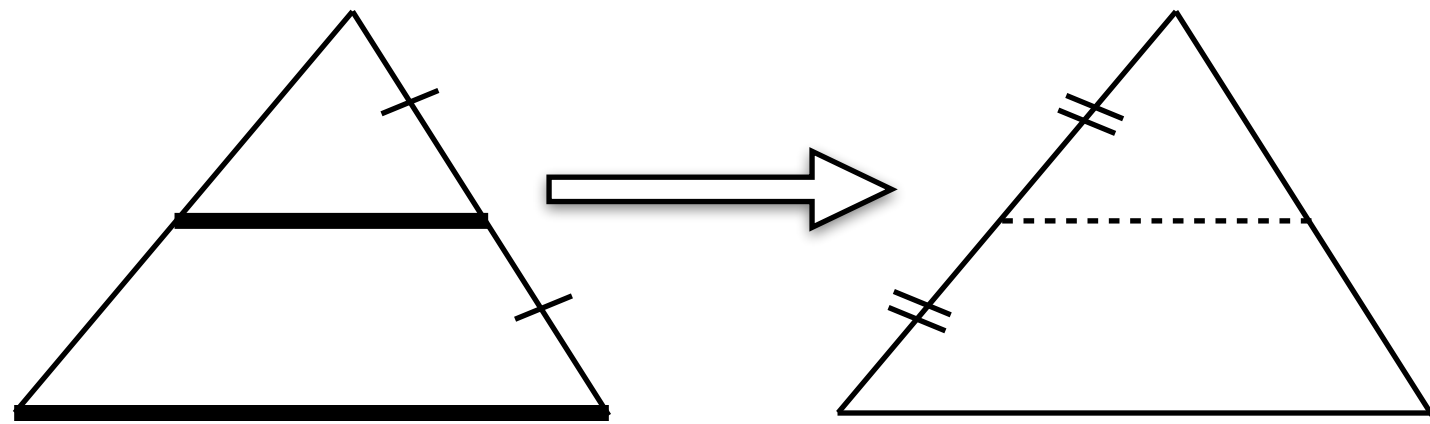
Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point M .
- Noter N le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .
- Noter A le point tel que N soit le milieu du segment $[AO]$.
- Tracer la droite (AM) .

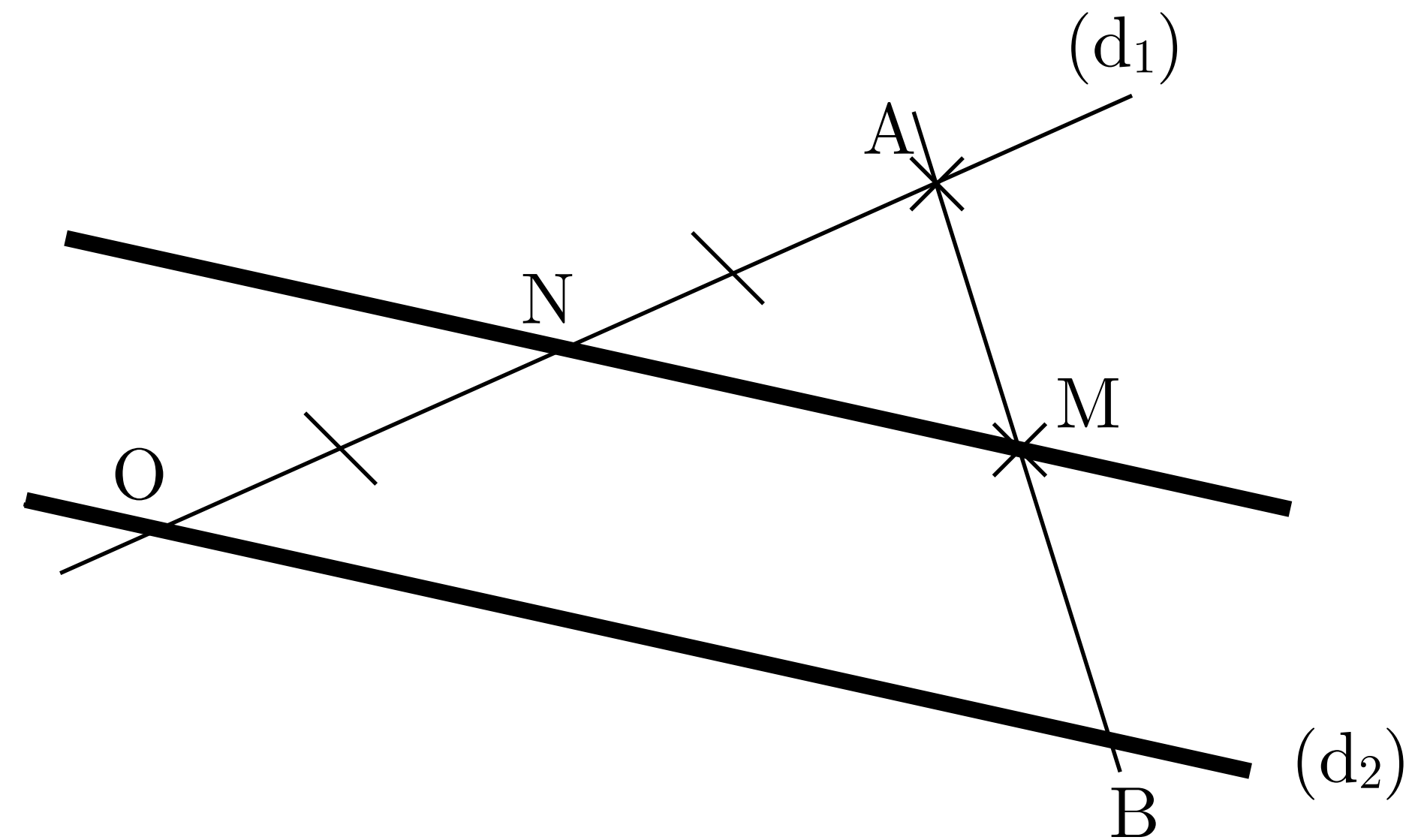
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Autre analyse possible du problème :

- 1) Partir de la figure finale
- 2) Faire le lien avec un théorème



Cas particulier du théorème de Thales



Phase de synthèse (résolution du problème) :

- Tracer la droite parallèle à la droite (d_2) passant par le point M .
- Noter N le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_1) .
- Noter A le point tel que N soit le milieu du segment $[AO]$.
- Tracer la droite (AM) .
- Noter B le point d'intersection de cette droite avec la droite (d_2) .

CONSTRUIRE

Il est conseillé au sein d'une équipe de se mettre d'accord pour chaque niveau sur les constructions à automatiser.

Signification du mot « Construire »

« Construire », c'est résoudre un problème du même type que la résolution d'une équation : un objet inconnu doit obéir à un certain nombre de contraintes ; la traduction de ces contraintes en propriétés de l'objet et leur exploitation (en utilisant ici des propriétés géométriques) vont permettre d'arriver à isoler une (ou plusieurs) procédure(s) d'obtention de l'objet visé.

La résolution d'un problème de construction sous-entend que l'élève doit être capable de décrire et de justifier la procédure élaborée.

Signification du mot « Tracer »

« Tracer » est une tâche essentiellement matérielle. Elle peut consister en :

- la production d'un dessin à main levée ou avec les instruments en procédant par essais et ajustements ;
- l'exécution d'une procédure de construction automatisée au niveau d'apprentissage considéré.

Extrait du document « Géométrie » des programmes de 2008

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)

Qu'est-ce qu'on a ?

Qu'est-ce qu'on cherche à montrer ?

RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



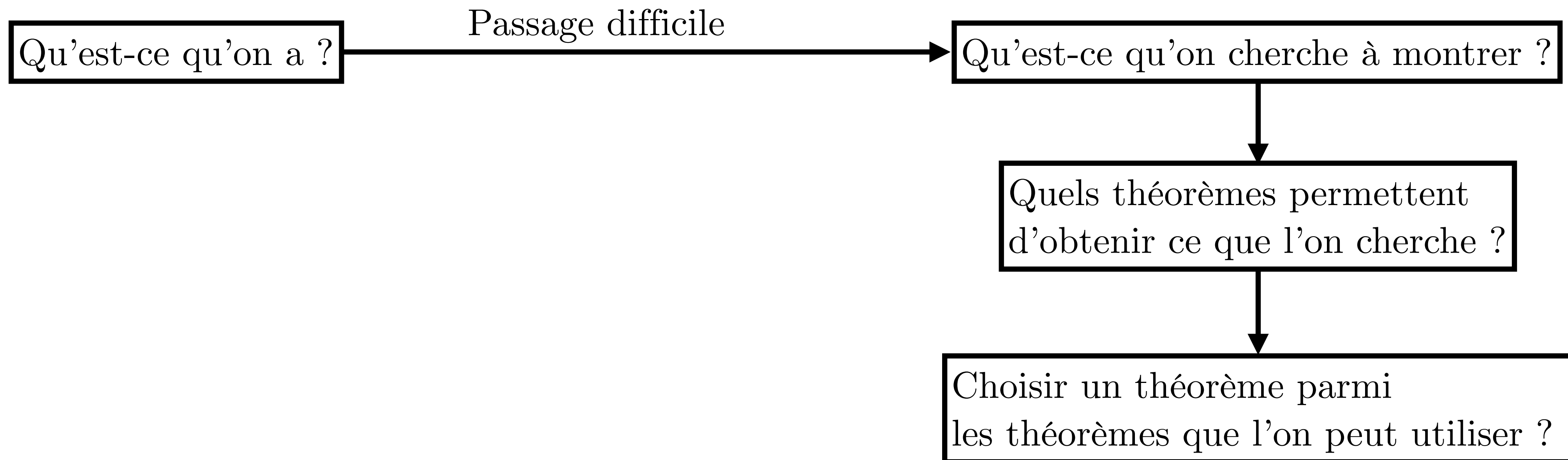
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



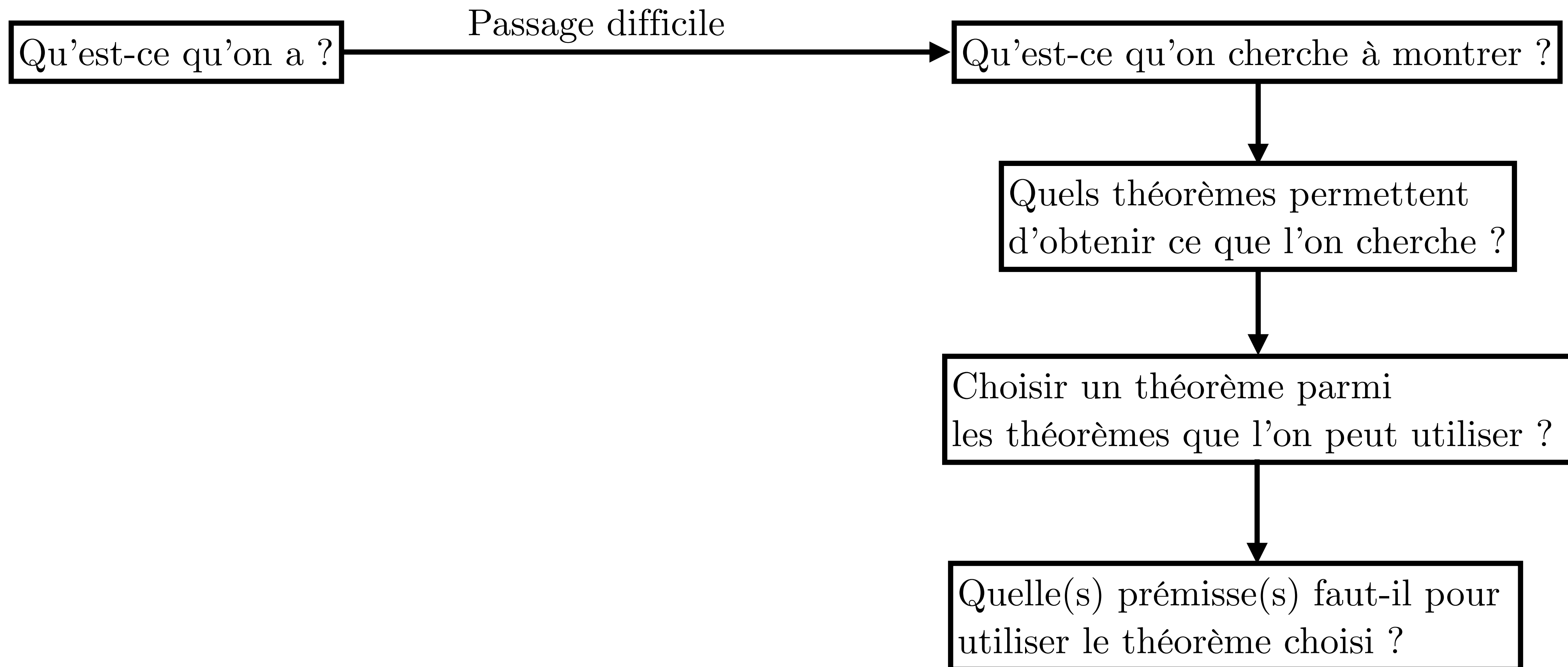
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



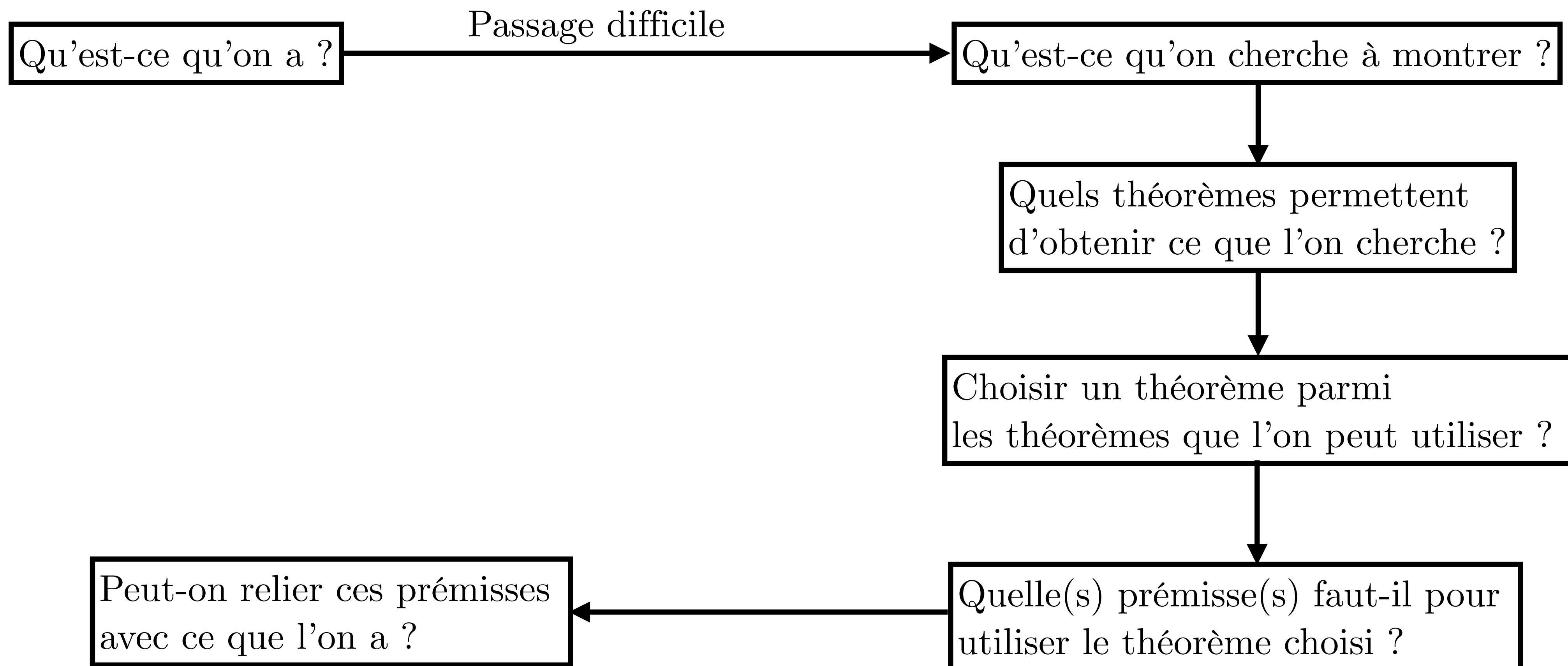
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



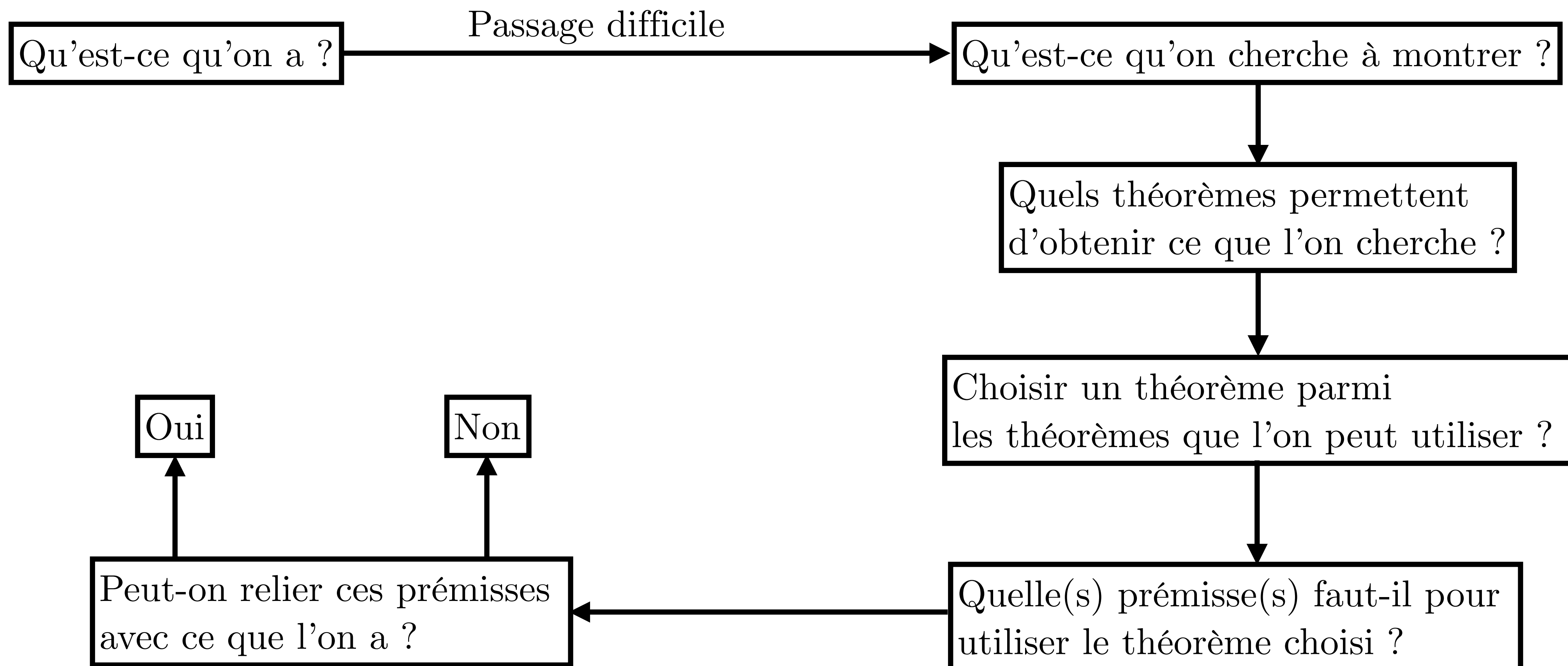
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



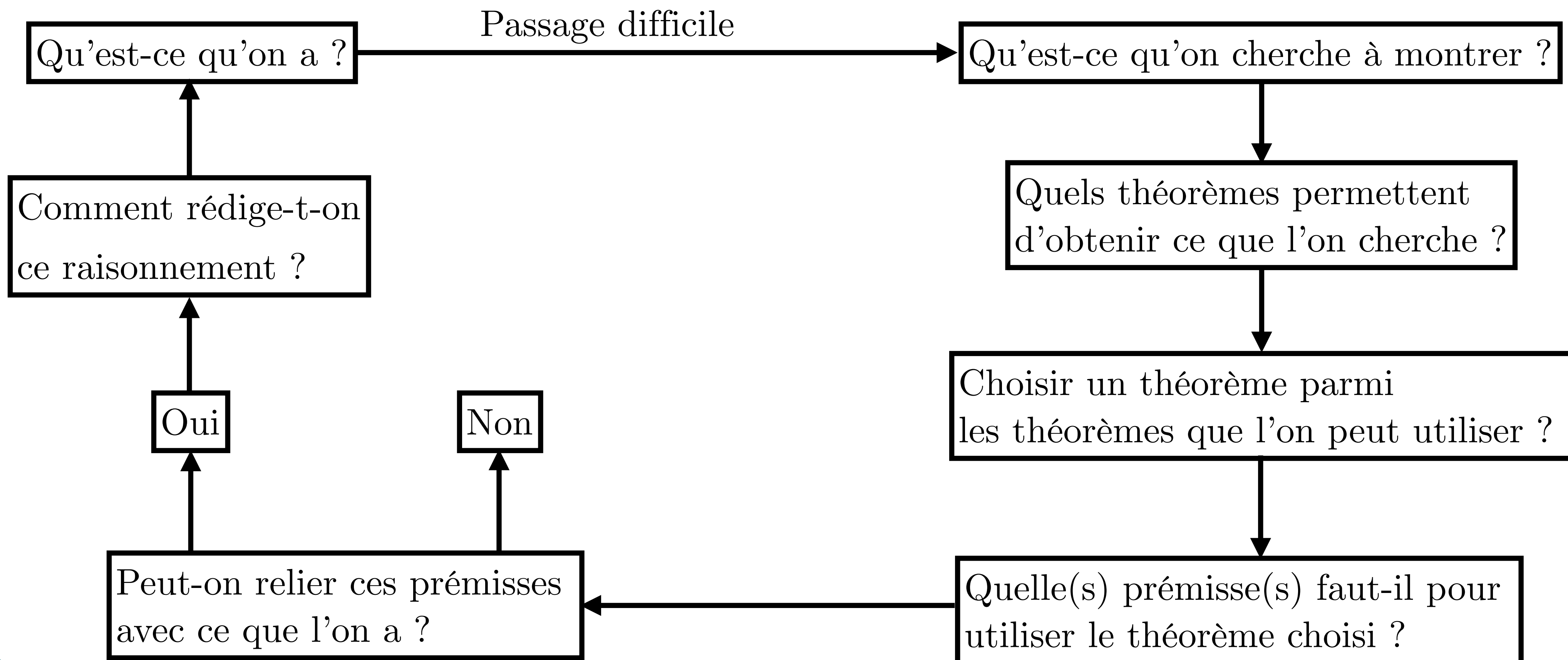
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



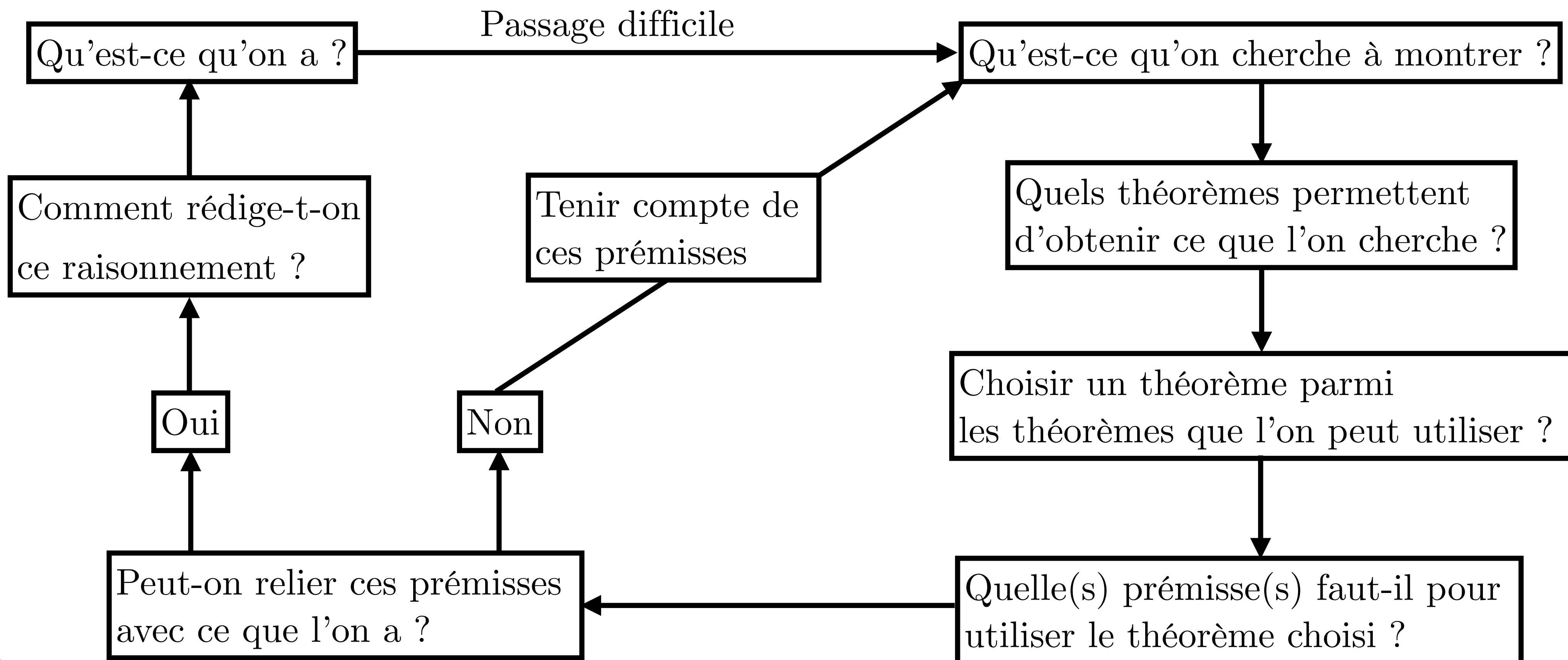
RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

L'analyse remontante pour résoudre un problème (on part de la fin)



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Consigne 2 :

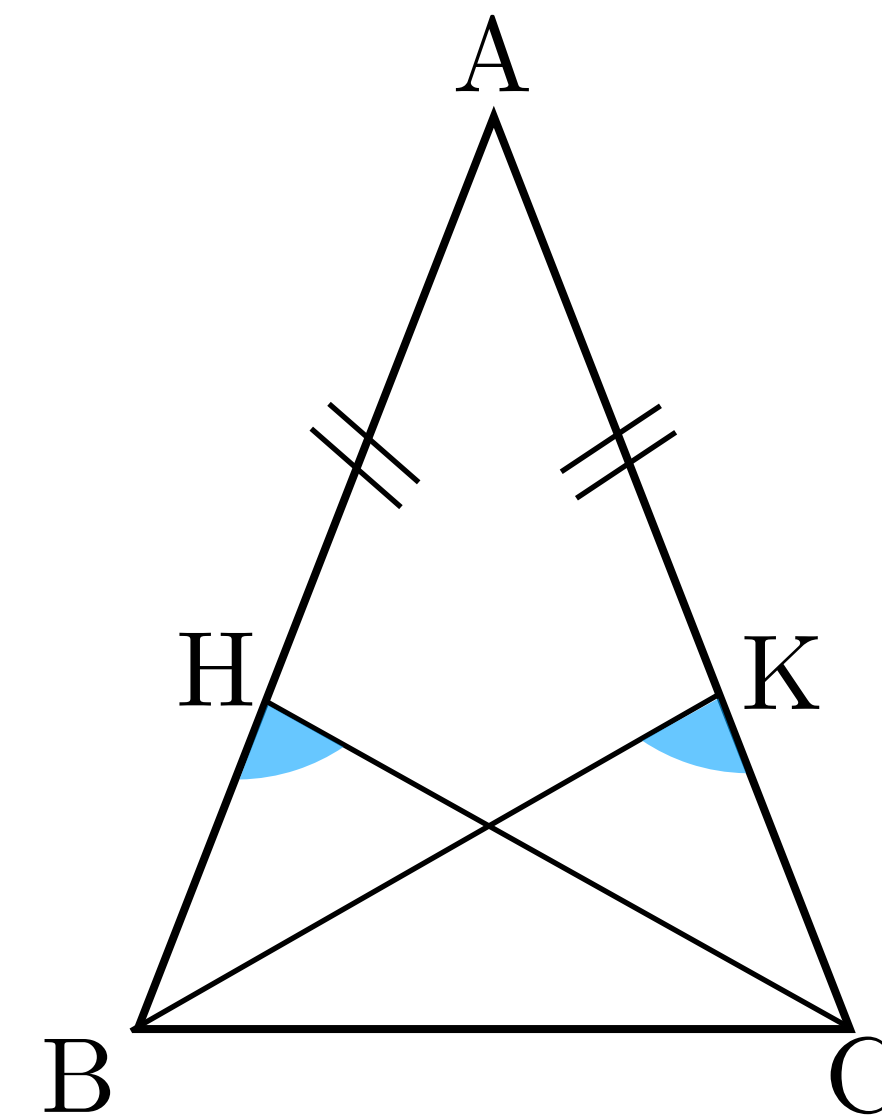
Mettre en œuvre l'analyse remontante pour résoudre l'exercice 2.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

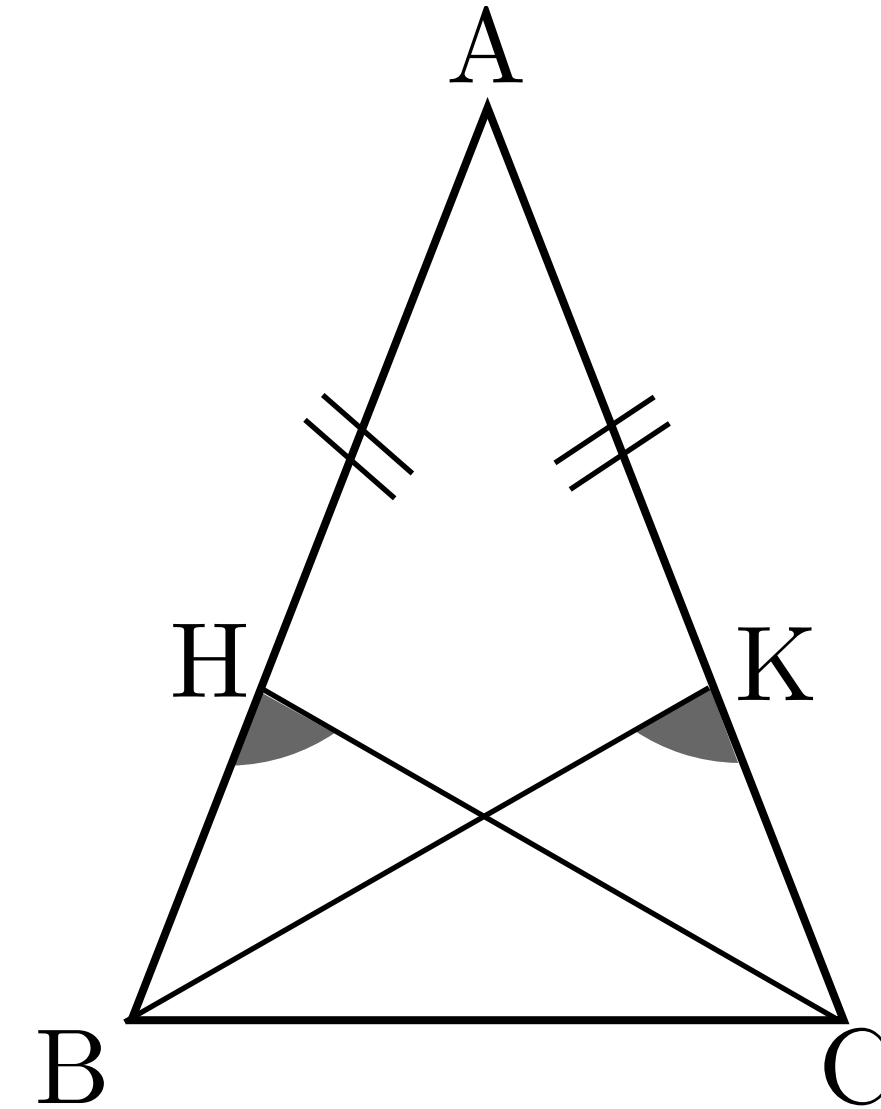
Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

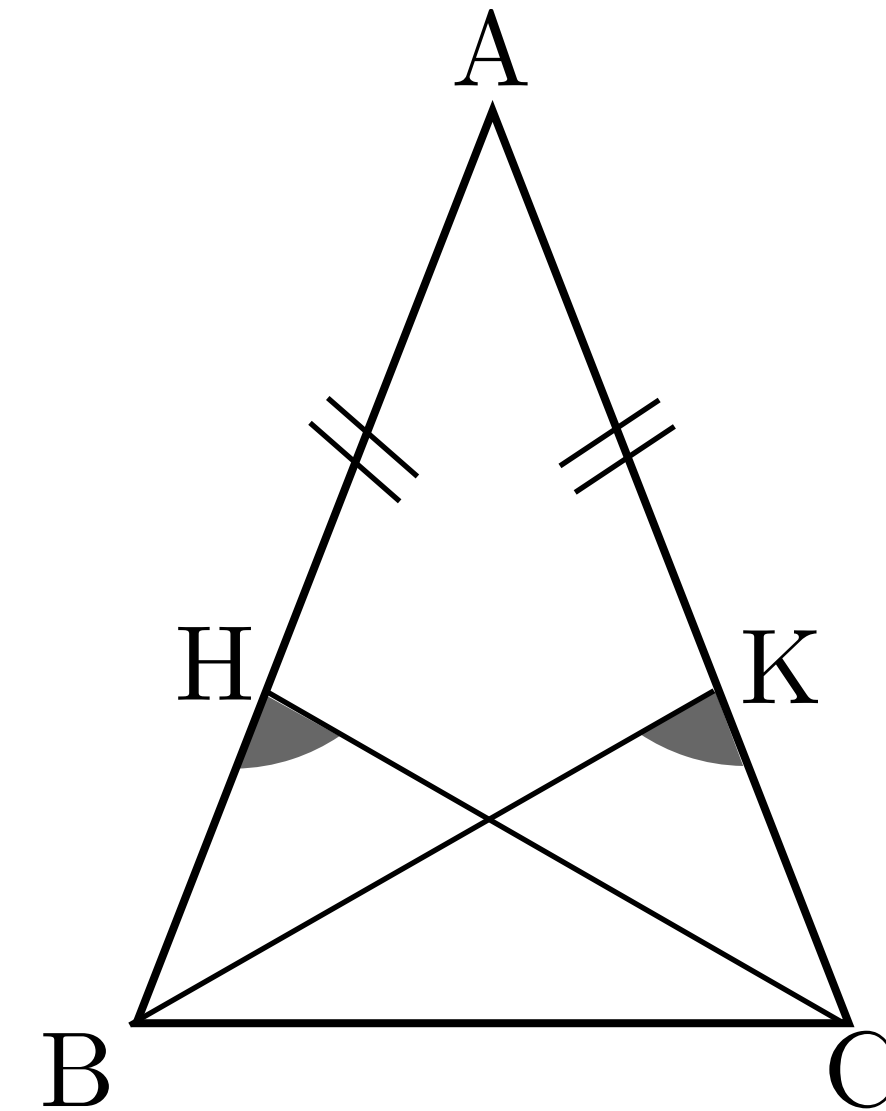
Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

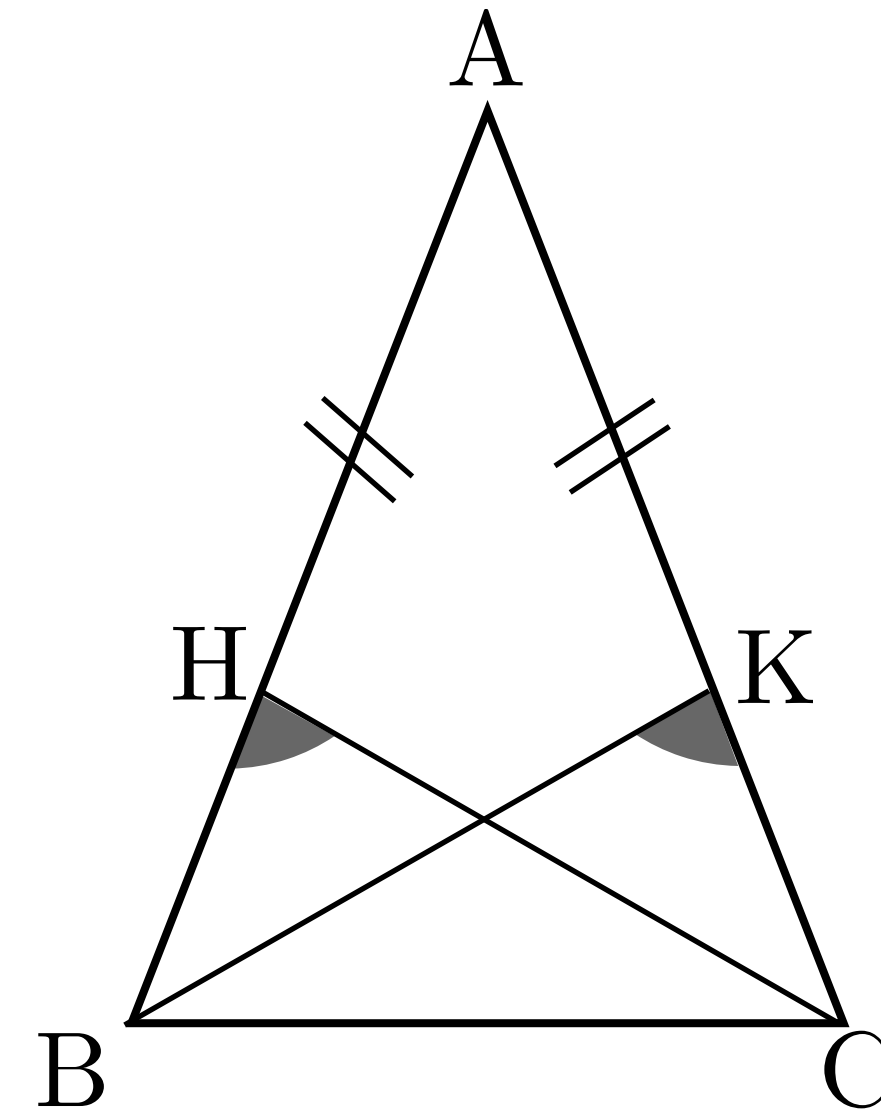
$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

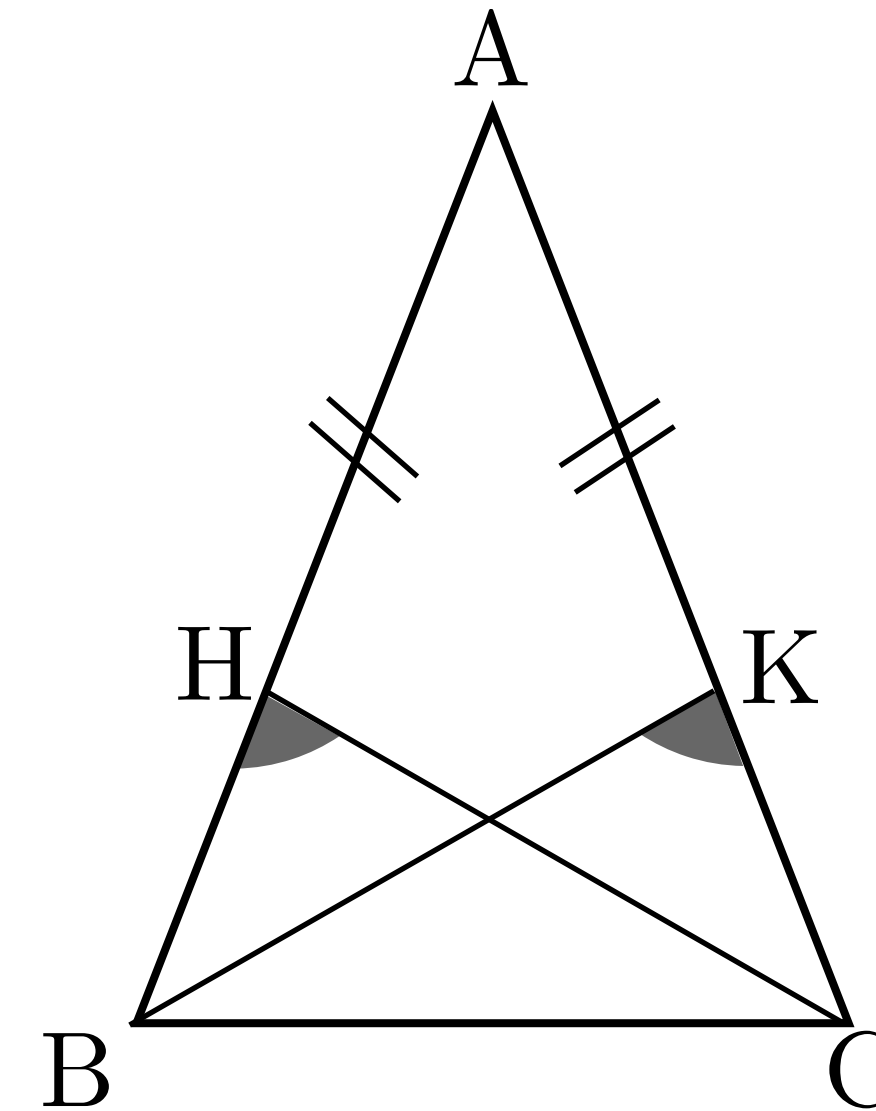
Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.

La présence de triangles qui visuellement semblent être isométriques laisse à penser que l'on pourrait utiliser l'un des cas d'égalité des triangles (faire si possible une figure avec les instruments de géométrie ou sur GeoGebra).



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

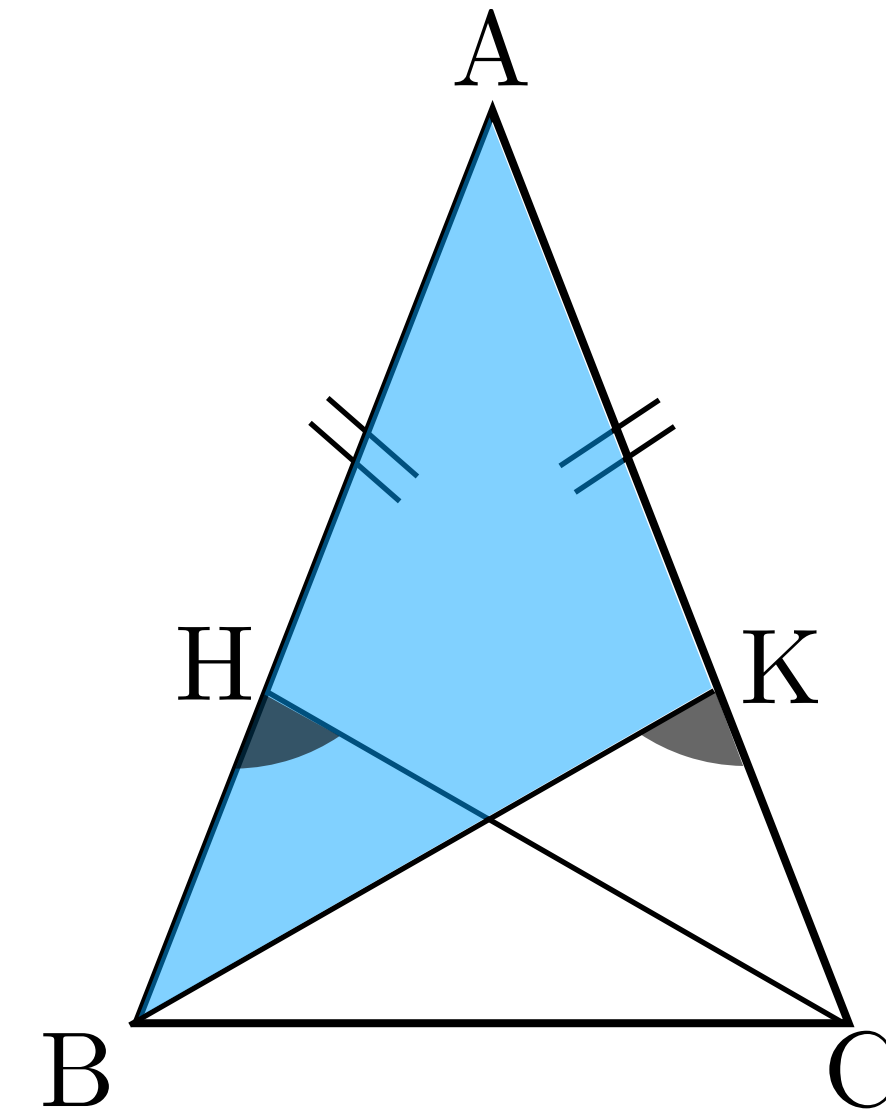
On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.

La présence de triangles qui visuellement semblent être isométriques laisse à penser que l'on pourrait utiliser l'un des cas d'égalité des triangles (faire si possible une figure avec les instruments de géométrie ou sur GeoGebra).

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les triangles AKB et AHC sont isométriques.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

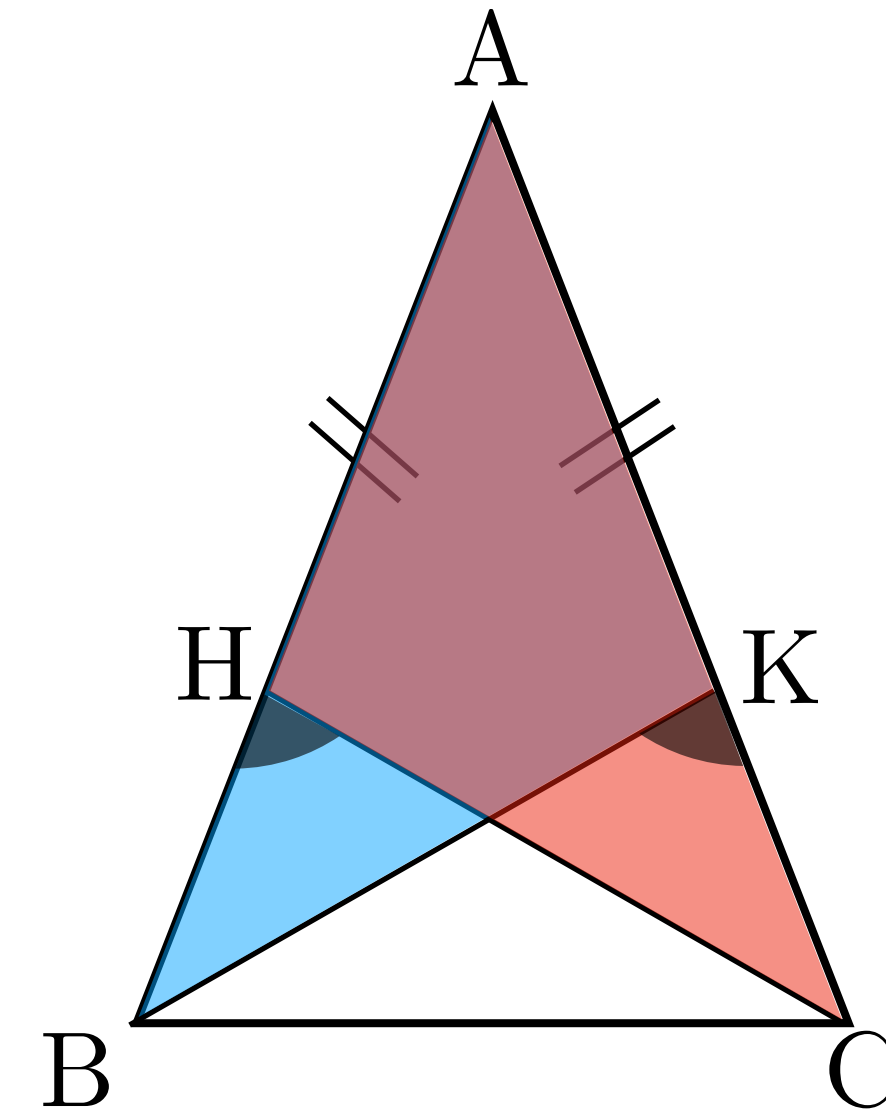
On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.

La présence de triangles qui visuellement semblent être isométriques laisse à penser que l'on pourrait utiliser l'un des cas d'égalité des triangles (faire si possible une figure avec les instruments de géométrie ou sur GeoGebra).

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les triangles AKB et AHC sont isométriques.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

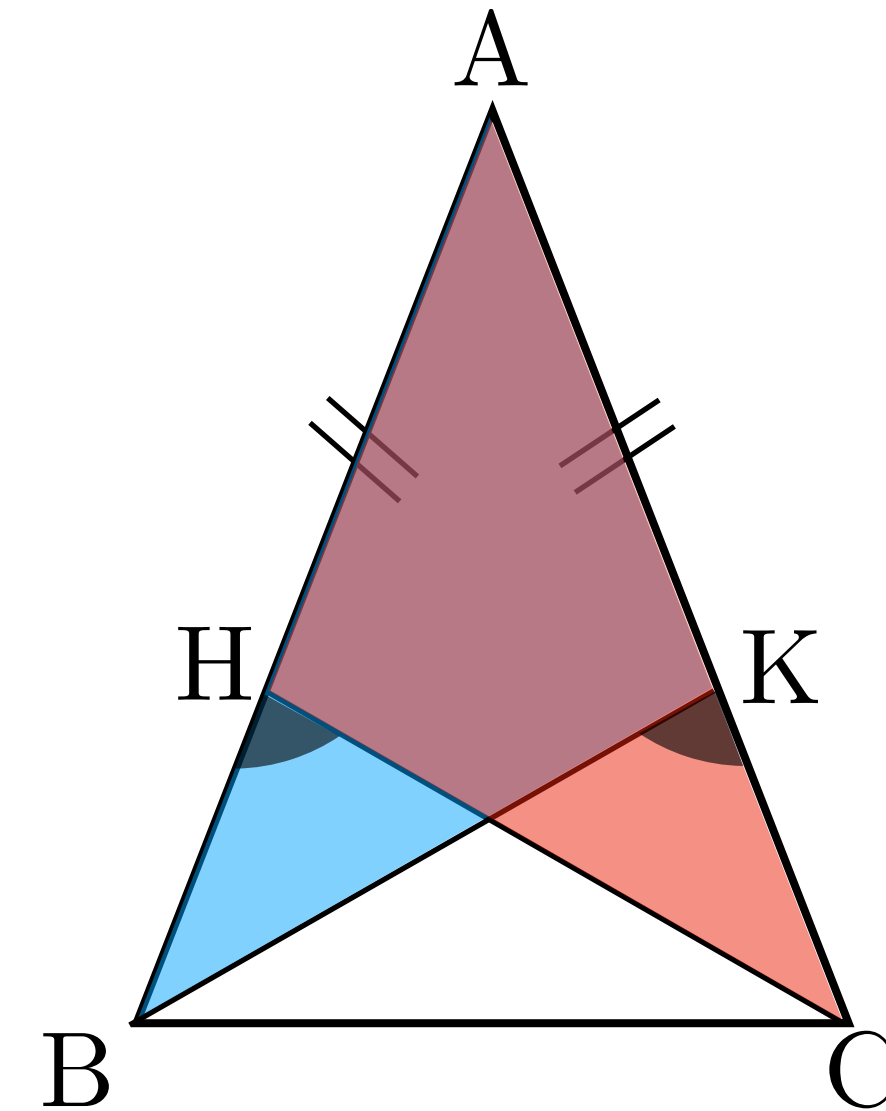
Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.

La présence de triangles qui visuellement semblent être isométriques laisse à penser que l'on pourrait utiliser l'un des cas d'égalité des triangles (faire si possible une figure avec les instruments de géométrie ou sur GeoGebra).

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les triangles AKB et AHC sont isométriques.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les angles \widehat{AHC} et \widehat{AKB} sont égaux.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que

$H \in [AB]$; $K \in [AC]$; $AH = AK$; $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On cherche à avoir $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que le triangle ABC soit isocèle en A .

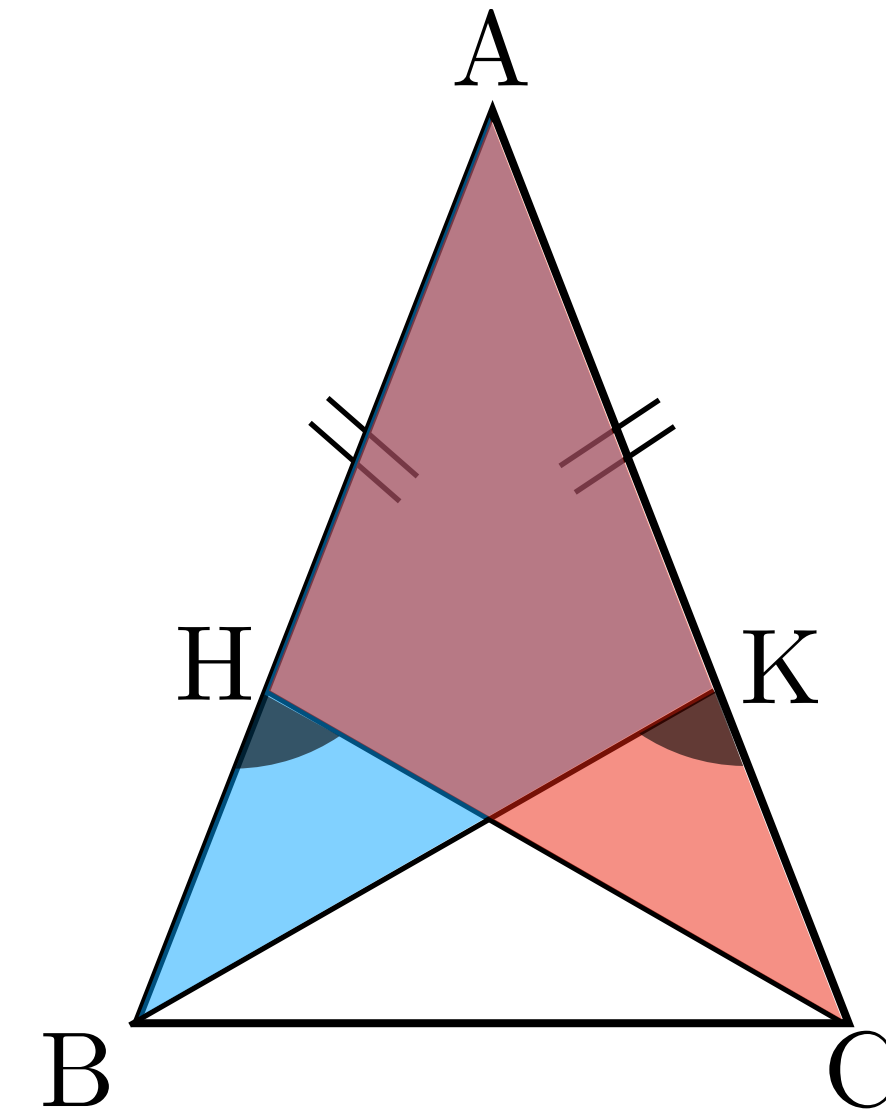
Pour l'obtenir, il suffit de montrer que $AB = AC$.

La présence de triangles qui visuellement semblent être isométriques laisse à penser que l'on pourrait utiliser l'un des cas d'égalité des triangles (faire si possible une figure avec les instruments de géométrie ou sur GeoGebra).

Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les triangles AKB et AHC sont isométriques.

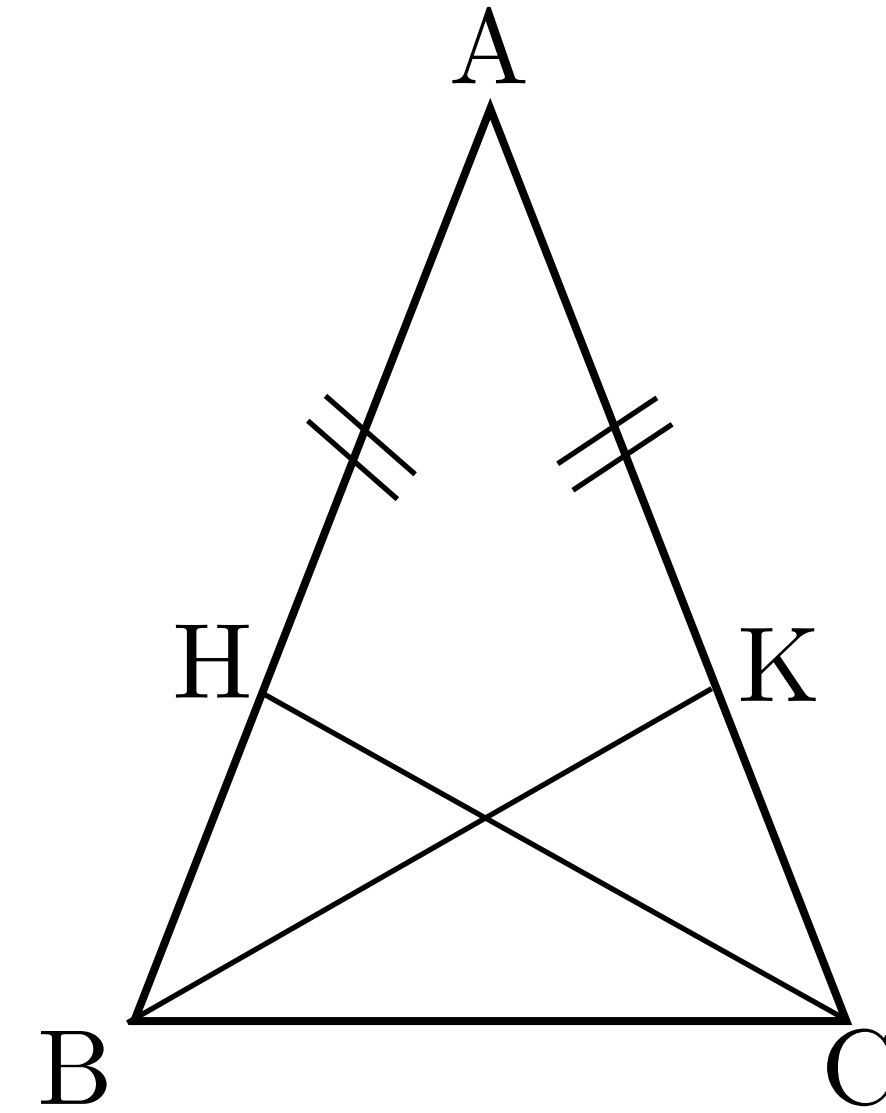
Pour l'obtenir, il suffit de montrer que les angles \widehat{AHC} et \widehat{AKB} sont égaux.

Ça c'est facile à avoir car les angles \widehat{BHC} et \widehat{BKC} sont égaux.



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase de synthèse (résolution du problème) :



RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

Phase de synthèse (résolution du problème) :

Les angles supplémentaires des angles \widehat{AHC} et \widehat{AKB} sont respectivement les angles \widehat{BHC} et \widehat{BKC} .
Comme $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$, on a : $\widehat{AHC} = \widehat{AKB}$

Dans les triangles ABK et ACH , on a :
 $\widehat{BAK} = \widehat{CAH}$ $\widehat{AKB} = \widehat{AHC}$ $AH = AK$

D'après le cas d'égalité ACA , les triangles ABK et ACH sont isométriques.

En identifiant les éléments homologues des triangles isométriques ABK et ACH , on en déduit l'égalité $AB = AC$. Ainsi le triangle ABC est isocèle en A .

Par conséquent, ses angles ABC et ACB relatifs à sa base sont égaux.
D'où $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

