

DU Maths 2nd degré

## TD 2 DE GÉOMÉTRIE

### RAISONNEMENT ET DÉMONSTRATION AU CYCLE 4



### Mathématiques

La formation au **raisonnement** et l'initiation à la **démonstration** sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique [...]) Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde [...]. L'apprentissage de la démonstration doit se faire de manière progressive, à travers la pratique [...] mais aussi par l'exemple. C'est pourquoi il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. [...] Certaines démonstrations peuvent être élaborées et mises au point par les élèves eux-mêmes (de manière individuelle ou collective), sous la conduite plus ou moins forte du professeur ; d'autres, inaccessibles à la recherche des élèves, tireront leur profit des explications et des commentaires apportés par le professeur. [...] Il vaut mieux déclarer « admise » une propriété non démontrée dans le cours [...] plutôt que de la présenter comme une « règle ». Une propriété admise gagne à être explicitée, commentée, illustrée.

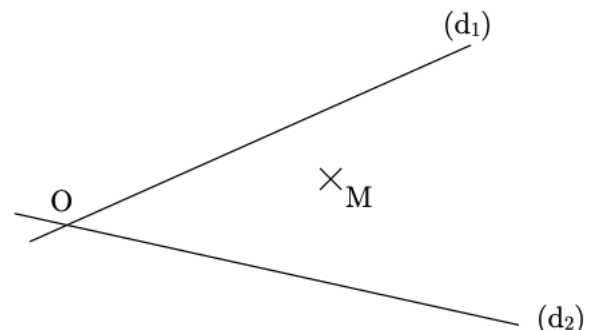
### RAISONNER EN GÉOMÉTRIE

#### Consigne 1 :

Résoudre les deux exercices ci-dessous.

#### Exercice 1 :

Construire deux points A et B appartenant respectivement à  $(d_1)$  et  $(d_2)$  tels que M soit le milieu du segment  $[AB]$ .



#### Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que :

$H \in [AB]$  ;  $K \in [AC]$  ;  $AH = AK$  ;  $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$

Montrer que  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ .

# INITIATION AU RAISONNEMENT

## Liste des difficultés à surmonter pour les élèves (Brochure de l'académie de Bordeaux) :

- Accepter la nécessité de démontrer
- Identifier des données permettant d'utiliser un théorème ou une définition
- Comprendre la structure d'un îlot déductif
- Rédiger un raisonnement à un îlot déductif
- Comprendre le recyclage dans un raisonnement à plusieurs îlots déductifs
- Construire un raisonnement à plusieurs îlots déductifs
- Rédiger un raisonnement à plusieurs îlots déductifs

## **Identifier des données permettant d'utiliser un théorème ou une définition**

- Donner une figure codée et une configuration liée à un théorème puis demander d'identifier où ce théorème peut s'utiliser
- Donner une figure codée et une liste de théorèmes puis demander d'identifier les théorèmes que l'on peut utiliser
- Donner une figure codée et demander d'écrire la liste des théorèmes que l'on peut utiliser

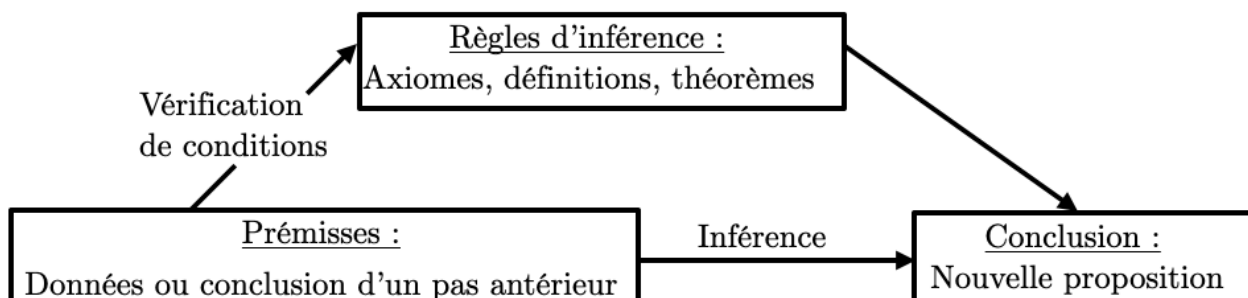
## STRUCTURE D'UN ÎLOT DÉDUCTIF

### Inférence :

Opération logique par laquelle on admet une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions déjà tenues pour vraies.

## Existence de deux types de passage dans un raisonnement déductif :

### 1) Passage à l'intérieur d'un îlot : inférence



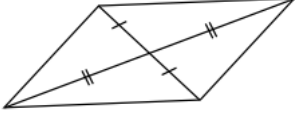
### 2) Lors de la transition d'un îlot au suivant : enchaînement

Existence d'une proposition commune aux deux îlots avec un statut opératoire différent (recyclage) : conclusion dans l'un, et prémisse dans l'autre.

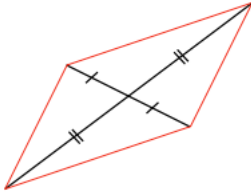
**Consigne 2 :**

Les traces écrites de cours suivantes favorisent-elles l'initiation au raisonnement ? Argumenter.

Trace écrite n°1

<p><b><u>Théorème :</u></b> Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu</p>	
--	---

Trace écrite n°2

<p><b><u>Théorème :</u></b> Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu</p>	 <p><b>Un parallélogramme</b> Deux diagonales ayant le même milieu</p>
--	--

**Consigne 3 :**

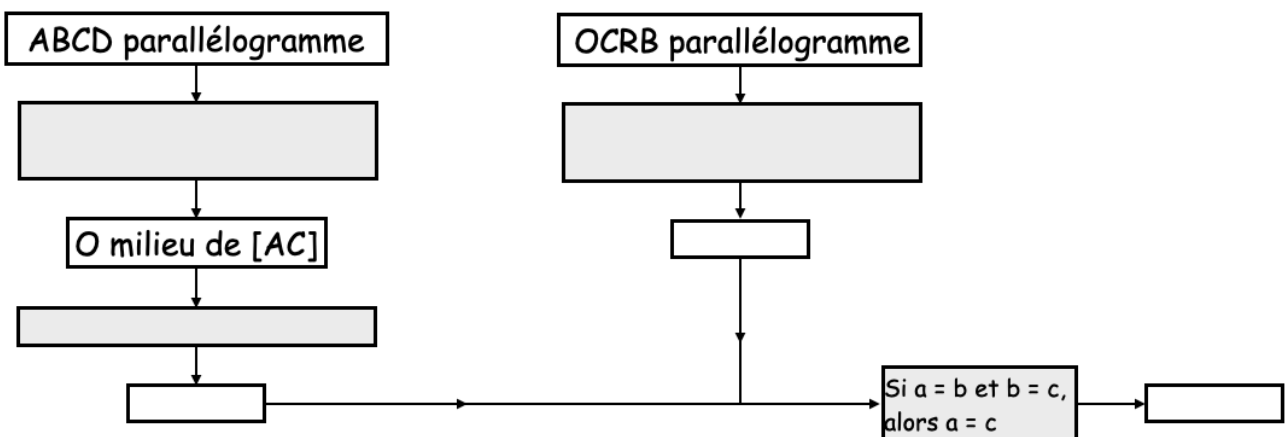
Choisir un théorème de géométrie enseigné au collège puis écrire votre trace écrite de cours.

**Consigne 4 :**

Ce type d'exercice favoris-t-il l'initiation au raisonnement ? Argumenter.

**Exercice :**

Soit ABCD est un parallélogramme de centre O  
et R le point tel que OCRB est également un parallélogramme.  
Démontrer que  $AO = RB$ .



## Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

### Le raisonnement et la démonstration

La **démonstration** est introduite avec prudence, sur des situations simples, qui nécessitent un argument de vérité dans le modèle de la géométrie abstraite<sup>2</sup>, et sans décourager les élèves.

Pour créer la possibilité d'îlots de démonstration, le professeur peut donner une liste – de longueur raisonnable – de définitions et théorèmes à connaître, en veillant à ce que cette liste soit cohérente et qu'elle permette de résoudre un nombre suffisant de problèmes.

Il convient de dissocier l'exigence de résoudre la tâche, qui est source de motivation, de celle de communiquer cette résolution en rédigeant une démonstration. Cette dernière activité, pourtant essentielle est plus délicate ; elle doit être conduite de façon non systématique et différenciée.

Il convient surtout d'éviter les rédactions trop longues, trop lourdes, qui égarent les élèves et les détournent de la résolution d'un problème. **Si la rédaction formalisée d'une démonstration n'est pas un attendu du collège, l'exercice progressif du raisonnement est un objectif fondamental.**

#### Consigne 5 :

Résoudre l'exercice ci-dessous.

#### Exercice :

Soit  $\widehat{xAy}$  un angle non plat et I et M deux points de la demi-droite  $[Ax)$  tels que  $AI < AM$ .

On note L le point de  $[Ay)$  tel que  $AL = AI$ .

On note G le point de  $[Ly)$  tel que  $LG = IM$ .

On note E le point d'intersection des droites (LM) et (GI).

Montrer que  $\frac{EL}{EM} = \frac{EI}{EG}$

#### Consigne 6 :

Analyser les avantages et les inconvénients des cartes d'inférences pour une utilisation avec des élèves.

# LES DIFFÉRENTES TYPES D'AIDES

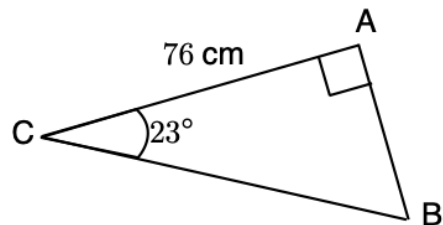
## Consigne 7 :

Deux professeurs de 3ème donnent l'exercice suivant à leurs élèves.

### Exercice

Calculer en cm le périmètre de ABC.

On arrondira le résultat au dixième.



Comparer les aides que ces deux professeurs ont préparées pour leurs élèves.

### Aides du professeur 1 :

- Choisir un triangle rectangle
- Écrire avec les lettres la formule choisie
- L'écrire avec les valeurs numériques
- Écrire l'opération permettant de calculer la longueur cherchée
- Écrire une valeur approchée de la longueur cherchée

### Aides du professeur 2 :

- Comment comptes-tu faire pour calculer les longueurs manquantes ?
- Quel est l'angle donné ?
- Quel est le côté de longueur connue ?
- Quel est le côté de longueur recherchée ?
- Quelle formule fait intervenir l'angle donné, le côté de longueur connue et le côté de longueur recherchée ?

## Consigne 8 :

Écrire une aide à visée constructive sur les différentes manières d'obtenir un carré