renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Séance 2 :

Entiers naturels et opérations

Prolongement aux décimaux positifs

Eléments de corrigé

Mots-clés : calcul réfléchi / calcul automatisé, calcul exact / calcul approché / calcul en ordre de grandeur, registre mémorisé, technique opératoire. Sexagésimal. Commutativité, associativité, élément neutre, élément absorbant, distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction. Conservation des écarts, addition itérée, règle du zéro, division euclidienne / division décimale d'un entier par un autre (non nul), ensemble des nombres décimaux positifs, densité pour l'ordre, densité pour la topologie (comme partie de **R**). Obstacle épistémologique. Ensemble des entiers relatifs, relation d'équivalence « même écart », nombre comme opérateur.

Bibliographie :

- Document ressource *Calculer (cycle 4)*.
  https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/37/0/RA16_C4_MATH_comp_calculer_554370.pdf

Exercice 1 (extrait du CRPE blanc 2019-2020, INSPE de Paris)

Un enseignant propose à ses élèves de calculer mentalement **24x4** et d'écrire sur une feuille « ce qu'ils ont fait dans leur tête ».

Voici quelques réponses obtenues :

élèves	**réponses**
A	J'ai fait 4 fois 20 : 80 ; et 4 fois 4 : 16 ; donc 96
B	24 et 24 font 48 ; 48 et 48 font 96
C	J'ai fait 100 moins 4 : 96
D	J'ai fait 4 fois 4 : 16 ; 6 et 1 de retenue ; puis j'ai fait 4 fois 2 : 8 donc 96
E	J'ai fait 4 fois 12 : 48 ; 48 et 48 font 96
F	J'ai fait 4 fois 8 : 32 ; puis 3 fois 32 : 96

1. Pour chacune des réponses, indiquer la décomposition des nombres utilisée par l'élève et nommer les propriétés utilisées.
2. En quelle(s) classe(s) cet exercice peut-il être proposé ? Justifier.

Document 1 :

	Calcul mental	Calcul écrit	Calcul instrumenté

Calcul automatisé	Registre mémorisé : tables d'addition, de multiplication. Quelques automatismes : %, sexagésimal.	Techniques opératoires. Repose sur la connaissance de registres mémorisés (ou disponibles : division par 13)	Calculatrice, tableur.
Calcul réfléchi	Utilisation d'un registre mémorisé (ou disponible), indentification de propriétés des nombres en jeu, utilisation (en acte) de propriétés des opérations.	Calcul en ligne, éventuellement disposition en arbre. Lorsque le calcul comporte des opérations différentes, nécessité d'indiquer les priorités opératoires (différence cycle 3 / cycle 4). Ex : (voir exo 1), 43 + 98 = 43 + 100 - 2	Rare. Dispositif de la « calculatrice cassée » (ex. Calculer 123x12 sans taper « 12 »), ou d'affichage limité (elle n'affiche que 3 chiffres, calculer 123x12).

Par calcul mental, déterminer un ordre de grandeur de :

- 480x517
- 87963 / 4
- La mesure en m² d'un disque de rayon 4 m.

Exercice 2 : Opérations sur les entiers, sens et techniques.

1. Poser et effectuer l'addition de 327 et 191.
   a) Quel est le sens de la retenu ?
   b) Pourrait-on écrire le résultat sous la forme : 4c 11d 8u ?
   c) Proposer 4 petits problèmes pouvant résolus par addition : un problème de composition, un problème de comparaison, un problème de transformation, un problème de composition de transformations.
2. Poser et effectuer de 3 manières la soustraction 327 – 191. Addition à trou, emprunt, conservation des écarts ?
   a) Le sens de la soustraction sous-jacent à ces 3 techniques est-il le même ?
   b) Citer un inconvénient de l'addition à trou et un inconvénient de la technique « par emprunt » A trou, pas commode quand la soustraction est une étape de la division. Par emprunt, pas commode quand le grand nombre s'écrit avec bcp de 0.
3. On s'intéresse au produit 3 x 47
   a) Le calculer sans faire de multiplication. Addition itérée.
   b) Citer deux avantages et trois limites de la définition de la multiplication comme addition itérée.
   Avantages : mathématiquement c'est une définition, elle permet dont d'établir rationnellement les propriétés de la multiplication à partir de celles de l'addition. Elle permet de compléter les registres multiplicatifs (par calcul réfléchi) en faisant utiliser

(en acte) la distributivité de x sur + (exemple : si dans la « table de 8 » je me souviens de 8x5, je peux retrouver 8x6 et 8x7 par addition ; si je sais que 25x10 = 250 et 25x2 = 50 je peux par addition trouver 25x12).
Limites : Ne garantit pas la commutativité. Ne s'étend pas au produit de deux décimaux (non entiers) ou deux rationnels (non entiers). Plus limite pratique : galère pour 32x47 d'additionner 32 termes égaux à 47.

c) Poser et effectuer ce produit de deux manières : par calcul réfléchi en ligne, selon la technique opératoire que vous avez apprise à l'école primaire.

4. On s'intéresse à la multiplication d'un entier par 10 :
   a) Enoncer une méthode simple faire entendre que « ajouter un 0 à droite » est maladroit. Enoncer la règle sous deux formes : écrire un 0 à droite, décaler d'un rang vers la gauche dans le tableau de numération.
   b) En quoi cette multiplication par 10 intervient-elle dans l'application de la technique opératoire usuelle au calcul de 24 x 47 ?
   c) Citer un inconvénient de la méthode simple de multiplication par 10. En quoi l'explicitation du tableau de numération permet-elle de surmonter cette difficulté ? Inconvénient : non extension aux décimaux non entiers.
   d) Poser et effectuer la multiplication de 24 par 47 selon la technique par jalousie (*per gelosia*). Comparer avec la technique usuelle.
5. On s'intéresse à la division euclidienne de 137 par 4.
   a) Inventer deux petits problèmes de partage pouvant être résolus par cette division : un problème de recherche du nombre de parts (problème de quotition), un problème de recherche de taille des parts (problème de partition).
   b) Pourrait-on trouver le (les) résultats : en ne faisant que des additions ? en ne faisant que des soustractions ? En ne faisant que des multiplications ? Deux méthodes pour les multiplications : balayage systématique jusqu'à dépasser 137 (définition de la division euclidienne), essais-erreurs (approche de méthodes qu'on retrouvera au collège et au lycée : résolution d'équation par essais-erreurs, dichotomie).
   c) Poser et effectuer cette division selon la méthode de la potence.
   d) Dans ce calcul, en utilisant les unités de numération ou le tableau de numération, justifier le traitement du bloc « 13 ». 13d ÷ 4 = (4x3d + 1d) ÷ 4, on peut donc écrire un 3d (ou un 3 en position « dizaines ») du côté du quotient, alors que 1d reste du côté du dividende. Aussi : blocs multibases et conversions 1c3d vers 13d.
   Dans l'enseignement de la division euclidienne, à partir du CM1, on peut utiliser la disposition intermédiaire suivant, qui utilise en acte la distributivité de la division sur l'addition

137	4
1 17 1	3d 4u

6. On s'intéresse à la division euclidienne de 1765 par 13. Après avoir reconstitué la table des premiers multiples de 13, poser et effectuer cette division selon la disposition « potence ».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	26	39	52	65	78	91	104	117

1	7	6	5	X	1	3	
	4	6		X	1	3	4
		5	5	X			
			3	X			

Exercice 3 : Extension des techniques opératoires aux entiers représentés en système sexagésimal et aux nombres décimaux positifs.

1. On s'intéresse à la somme de 12h 45 min 13 s et 5h 20 min 8 s
   a. Calculer cette somme en vous inspirant de la technique opératoire de l'addition
   b. Inventer deux problèmes pouvant conduire à chercher cette somme : un avec deux durées, un avec un repère temporel et une durée.
   Faire remarquer (si R désigne un repère et D une durée) : D+D = D, R+D=R, R+R non défini
2. On s'intéresse à 12h 45 min 13 s moins 5h 20 min 8 s
   a) Calculer cette différence en vous inspirant de la technique opératoire de l'addition
   b) Inventer trois problèmes pouvant conduire à chercher cette différence : un avec deux durées, un avec un repère temporel et une durée, un avec deux repères temporels.
   Faire remarquer D-D = D, R-D = R, R-R = D, D-R non défini
3. Poser et effectuer l'addition de 3,27 et 1,91.
   a) Quel est le sens de la retenu ?
   b) Est-il nécessaire de disposer les mêmes ordres dans les mêmes colonnes lorsqu'on pose l'opération ?
   c) Quelle erreur peut-on attendre pour 3,27 + 1,9 ? alignement à droite, sur le modèle de l'addition des entiers. Erreur pas visible dans 3,27+1,91 (parties décimales de mêmes longueurs)
   d) Par la technique de votre choix, poser et effectuer la soustraction 3,27 – 1,91. Est-il nécessaire de disposer les mêmes ordres dans les mêmes colonnes lorsqu'on pose l'opération ?
4. On s'intéresse à la multiplication d'un nombre décimal par 10.
   a) Citer trois erreurs attendues en réponse à la question : 12,73 x 10 = … 12,730 et 120,730 et 120,73
   b) Enoncer une règle commode de multiplication d'un nombre décimal par 10. Cette règle devra être valide aussi bien pour les décimaux entiers que pour les non entiers. Introduire le prolongement à gauche du tableau de numération des entiers.
5. On s'intéresse plus généralement à la multiplication dans $\mathbf{D}^+$
   a) Dans votre classe, plusieurs élèves écrivent 3 x 4,6 = 12,18.
      1. Quelle est l'origine probable de cette erreur ?
      2. Pouvez-vous prouver que 3 x 4,2 est égal à 13,8 ? Au moins deux preuves sont possibles.
      Par addition itérée 4,2+4.2+4.2, par multiplication ou division par 10 : 3 x 4,2 = 3 x (42 : 10) = (3x42) : 10 = 138 : 10 = 13,8. On peut aussi passer par 3x4,2 = 3 x 42 x 0.1, mais il faut savoir multiplier par 0,1. Cela peut-être mis en place avant : … x 0,1 est le nombre qui multiplié par 10 vaut …, c'est donc le 10$^{\text{ème}}$ de … ; aspect paradoxal : fin de la barrière étanche entre multiplication et division, puisque multiplier par 0,1 c'est diviser par 10. Ces arguments sont sans doute plus clairs pour les élèves si l'aspect « multiplier / diviser par 10 » a été systématiquement travaillé en termes de glissement dans le tableau de numération, avec des questions du genre : « je pense à un nombre qui, multiplié /divisé par 10, donne 120, 1400, 13, 14,502 … »
   b) On s'intéresse au produit de 2,4 par 4,7.

1. Des élèves posent et effectuent la multiplication. Ils trouvent comme résultat 112,8.
    1. Citer l'origine probable de cette erreur. L'élève pose en alignant les unités (i.e. en faisant coïncider ordres et colonnes), et considère que le résultat est aussi écrit avec les bons ordres dans les bonnes colonnes, ce qui ici est faux.
    2. Pouvez-vous prouver que ce résultat est faux ?
       Point important : aucun des deux facteurs n'étant entier, on ne se ramène pas facilement à l'addition itérée.
       Argument en ordre de grandeur ou en majoration : 2,4 x 4,7 est plus petit que 3x15, i.e. 15.
       Se ramener aux entiers : 2.4 x 4.7 = 24 x 0.1 x 47 x 0.1 = 1128 x 0.01 = 11.28. Cela suppose qu'on sait deux choses : 0.1x0.1 = 0.01 et multiplier un entier par 0.01. Comment le sait-on ? Si x0.1 est le même opérateur que ÷10, on sait que son itération revient à ÷100, donc x0.01.
    3. Proposez un énoncé de la règle de multiplication des décimaux applicable dans le cadre de la technique opératoire usuelle.
    4. Imaginer un petit problème pouvant conduire au produit 2,4 x 4,7 ?
    5. Poser et effectuer la multiplication de 4,5 par 2,36 : Dans la disposition usuelle. Par jalousie.
6. On s'intéresse à la division de 137 par 4.
    a) On a étudié plus haut la division euclidienne de 137 par 4. Poser et effectuer, selon la disposition « potence », la division décimale de 137 par 4. Faire remarquer la présence implicite du tableau de numération.
    b) Citer les deux différences principales entre la division euclidienne des entiers et la division décimale des entiers.
    c) Inventer trois problèmes, l'un conduisant à la division euclidienne de 137 par 4, deux conduisant à la division décimale de 137 par 4. Pour la division décimale : partager 137€ en quatre parts égales. Un rectangle d'aire 137cm² a un côté de 4 cm, quelle est la longueur de l'autre côté ? (montrer les règles sur les unités dans les calculs. Ref. document ressource « grandeurs et mesures au cycle 3 »).
7. Nous avons rencontré des tableaux de numération avec un pas multiplicatif de 10, celui des entiers naturels, celui des décimaux positifs. Dans leur scolarité, les élèves rencontrent-ils d'autres tableaux de numération, avec d'autres pas multiplicatifs ?
   On peut penser aux durées. On pense surtout aux aires et volumes.

Document 2 : résultats d'évaluations sur les opérations sur les décimaux.

Source : *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*. J.F. Chesné, J.-P. Fischer. Rapport du CNESCO (Conseil National d'Evaluation du Système Scolaire), Ifé, 2015.

http://www.cnesco.fr/fr/numeration/

renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Tableau 1 – Addition et soustraction : calculs mentaux

Tâche	ÉN 6e	Expérimentations
5,2 + 2,8		35,2 % (PRE 2014)
5,2 + 13 + 2,8		41,2 % (PACEM 2011)
38 - 1,5		31,0 % (PRE 2014) 29,8 % (PACEM 2011)
1,7 + 2,3*	61,3 % (2003) 64,0 % (2002)	

* : ce calcul, au contraire des trois premiers écrits en lignes, était donné oralement.

Tableau 2 – Addition et soustraction : calculs posés

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
154,8 + 36,57	66,9 % (2010)	65,5 % (PRE CM_2 2014) 70,3 % (PACEM 2011)
208 + 13,75	63,5 % (2011)	
164,8 + 26,57	80,9 % (2012)	
56,09 + 22,4+ 233,25	74,8 % (2007) 84,3 % (1987)	
138,85 - 49,2	51,6 % (2010)	51,7 % (PRE 2014) 52,9 % (PACEM 2011)
56,73 - 7,02	73,9 % (2011)	
7,24 - 4,3	75,4 % (2012)	
4ă700 - 2ă789,7	49,5 % (2007) 71,7 % (1987)	

NB : tous les calculs sont donnés en ligne avec consigne de les poser.

Les erreurs des élèves dans les additions posées sont de différentes natures (erreurs de tables, de retenue, d'alignement, de placement ou "d'oubli" de la virgule pour l'addition). On retrouve ces erreurs, dans les soustractions posées, avec en outre une procédure qui consiste à systématiquement retirer le plus petit chiffre du plus grand chiffre, et une autre, qui provient d'une erreur de comparaison des nombres : par exemple, poser 2 789,7 - 4 700 au lieu de 4 700 - 2 789,7 avec à suivre une erreur d'alignement. Face à ces résultats, on peut s'interroger sur la durée actuelle du temps scolaire consacrée au calcul posé, au calcul mental et en particulier à l'articulation des procédures personnelles et des algorithmes standards, dans une double perspective de la maîtrise de la connaissance des nombres et du calcul.

Figure 12 – Multiplication et division par 10, 100, 1 000

Tâche	ÉN CM2	ÉN 6e	Expérimentations
11,39 × 10	67,1 % (2012)		
7,14 × 100	65,1 % (2007) 64,5 % (1999)		37,9 % (PRE 2014) 37,4 % (PACEM 2011)
3,256 × 1000	63,9 % (2012)		
35,2 × 100		31,6 % (2008) 47,3 % (2001) 59,3 % (1994)	
3,72 × 1000			31,8 % (PRE 2014) 29,8 % (PACEM 2011)
37 : 10*		41,6 % (2003) 56,0 % (2002)	
67 : 100			27,8 % (PACEM 2011)
16,2 : 10			36,4 % (PRE 2014) 28,5 % (PACEM 2011)

* : ce calcul était donné oralement.

La multiplication par 10, 100, d'un nombre entier n'est pas une difficulté pour les élèves puisque la procédure consistant à ajouter des zéros permet de donner un résultat correct ; les taux de réussite aux items correspondants sont alors supérieurs à 90 %. En revanche, multiplier par 10, 100, un nombre décimal dont la partie décimale comporte autant ou plus de chiffres que de zéros dans 10, 100, est une difficulté pour un tiers des élèves (11,39 × 10 ou 3,256 × 1 000) et le faire quand ce n'est pas le cas (35,2 × 100) l'est pour environ un élève sur deux, avec une tendance à la baisse des résultats. Même si certains élèves éprouvent encore le besoin de poser des opérations pour effectuer ces calculs, le décalage de la virgule, le recours à un tableau de numération, sont les principales procédures utilisées par les élèves[22]. Cet enseignement précoce et exclusif de techniques aux dépens d'un travail sur le sens ne semble pas favoriser l'acquisition de compétences relatives à la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000.

Tableau 3 – Multiplication : calculs mentaux

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
$1{,}5 \times 4$	54,0 % (2010)	65,5 % (PRE 2014) 70,3 % (PACEM 2011)
$8{,}3 \times 5$	54,6 % (2011)	45,1 % (PRE 2014) 34,6 % (PACEM 2011)
$62 \times 0{,}5$		17,5 % (PACEM 2011)

Tableau 4 – Multiplication : calculs posés

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
39×57	58,3 % (2010)	55,0 % (PRE 2014) 48,7 % (PACEM 2011)
14×35	80,3 % (2011)	
247×36	67,8 % (2007) 83,7 % (1987)	
$24{,}3 \times 6$	59,3 % (2010)	56,4 % (PACEM 2011)
$46{,}3 \times 9$	55,5 % (2011)	
$27{,}5 \times 23$	57,7 % (2012)	
$4{,}28 \times 3{,}5$	53,6 % (1990)	19,4 % (PACEM 2011)
$16{,}25 \times 2{,}03$*	44,4 % (2012)	

* : ce calcul faisait partie de l'ÉN à l'entrée en 5e en 2002 avec un taux de réussite de 43,6 %. Une autre multiplication figurait dans cette ÉN ($9{,}74 \times 3{,}5$) réussie par 37,3 % des élèves.