renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Séance 1 : Les entiers naturels

La division euclidienne – L'écriture positionnelle en base 10

En vert : éléments de corrigé.

Mots-clés : division euclidienne dans **N** (dividende, diviseur, quotient, reste), principe positionnel, principe de groupement et d'échange, distinction entre nombre et chiffre, entre nombre des … et chiffre des …, décomposition canonique, ordres et classes, tableau de numération.

Dans toute cette feuille, « nombre » ne renvoie qu'aux entiers naturels.

Document 1 : Extraits de : F. Tempier (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N* n°98, pp.67-90.

En ligne sur : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/

En CE2

Composer un nombre : écriture en unités vers écriture en chiffres

1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = …	**91%**	2 dizaines + 15 unités = …	**41%**
8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = …	**78%**	4 centaines + 10 dizaines = …	**32%**
6 centaines + 9 unités = …	**65%**	5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = …	**39%**
7 unités + 4 centaines = …	**63%**	21 dizaines + 3 centaines = …	**21%**
3 dizaines + 6 centaines = …	**52%**	6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = …	**17%**

Tableau n°3 : Exercice de composition, taux de réussite pour 127 élèves (sauf pour 21 d + 3 c pour lequel seulement 103 élèves ont été évalués)

Dans 67, il y a …….. dizaines	**70%**
Dans 105, il y a …….. dizaines	**51%**
Dans 260, il y a …….. centaines	**53%**
Dans 400, il y a …….. dizaines	**46%**
Dans 764, il y a …….. dizaines	**39%**

Tableau n°4 : Exercice « nombre de… », taux de réussite pour 103 élèves

5 dizaines = ... unités	**55%**
80 unités = ... dizaines	**55%**
1 centaine = ... dizaines	**49%**
3 centaines = ... unités	**37%**
60 dizaines = ... centaines	**31%**

Tableau n°6 : Exercice de conversion entre unités, taux de réussite pour 128 élèves

Au cycle 3 (et 5ème)

Connaissances sur les nombres à trois et quatre chiffres du CM1 à la 5e

niveau de classe (nombre d'élèves)	**CM1 (74)**	**CM2 (108)**	**6e (159)**	**5e (134)**
8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = ...	**95%**	**90%**	**81%**	**87%**
3 dizaines + 6 milliers = ...	**70%**	**73%**	**73%**	**84%**
4 centaines + 32 dizaines + 8 unités = ...	**54%**	**56%**	**36%**	**31%**
267 = ... dizaines ..... unités	**73%**	**80%**	**70%**	**66%**
1052 = ... centaines ..... unités	**59%**	**67%**	**59%**	**63%**
5 centaines = ... unités	**73%**	**84%**	**80%**	**73%**
3 centaines = ... dizaines	**73%**	**87%**	**81%**	**80%**
40 centaines = ... milliers	**42%**	**65%**	**43%**	**50%**

Tableau n°7 : Taux de réussite du CM1 à la 5e

	3c 1d 4u	**4u 3c 1d**	**3c 4u**	**1c 12d 4u**
juxtaposition d'unités simples	8	8	7	17
juxtaposition des nombres d'unités	**314**	431	34	1124
juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'écriture en chiffres	**314**	**314**	**34**	1124
juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'écriture en chiffres	**314**	**314**	**304**	1124

Tableau n°8 : Réponses prévisibles par différentes juxtapositions des nombres d'unités

Exercice 1 : Vrai ou faux : 97^{26} s'écrit avec moins de 55 chiffres (justifier).

97 < 100, donc $97^{26} < 100^{26}$ (croissance de la fonction qui à un réel positif x associe x^{26}), or $100^{26} = (10^2)^{26} = 10^{2\times26} = 10^{52}$ qui s'écrit « 1 » suivi de 52 « 0 », donc avec 53 chiffres. Comme 97^{26} est inférieur à 100^{26}, il s'écrit avec au plus 53 chiffres. L'affirmation est donc vraie.

Exercice 2 : Quel est le nombre de deux chiffres qui, si on écrit un 7 à droite de ce nombre, augmente de 529?

Solution 1 : Appelons n un tel nombre, le problème peut se traduire par l'équation $10n + 7 = n + 529$. L'unique solution, 58, est bien un entier à deux chiffres.

Solution 2 : si nombre s'écrivant $\overline{ab}$ vérifie cette propriété, alors l'addition posée suivante est valide

$$\begin{array}{rccc} & 5 & 2 & 9 \\ + & & a & b \\ \hline & a & b & 7 \end{array}$$

Ce qui n'est possible que pour $b = 8$ et $a = 5$. On vérifie que 58 est bien solution.

Solution 3 : On cherche un nombre s'écrivant $\overline{ab}$ et tel que $\overline{ab7} = 529 + \overline{ab}$, c'est-à-dire : $100a+10b+7 = 529 +10a+b$. On peut essayer les 10 valeurs possibles pour b pour ne sélectionner que celles donnant un a entier entre 1 et 9 ; puis procéder à la vérification.

Exercice 3 : Critères de divisibilité usuels

Rappel : programme du cycle 3 (depuis 2016)

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible. » Division euclidienne (quotient, reste). » Multiples et diviseurs. » Notion de nombres premiers.	Recourir à une décomposition en facteurs premiers dans des cas simples. Exploiter tableurs, calculatrices et logiciels, par exemple pour chercher les diviseurs d'un nombre ou déterminer si un nombre est premier. Démontrer des critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5 ou 10) ou la preuve par 9. Etudier des problèmes d'engrenages (par exemple braquets d'un vélo, rapports de transmission d'une boîte de vitesses, horloge), de conjonction de phénomènes périodiques (par exemple éclipses ou alignements de planètes).

1. Enoncer les critères de divisibilité par 2, par 5, par 3, par 9.

Un nombre est divisible par deux

- Si et seulement si son chiffre des unités est « 0 », ou « 2 », « 4 », « 6 », ou « 8 »
- Si et seulement si le nombre désigné par son chiffre des unités est pair

Idem pour 5.

renaud.chorlay@inspe-paris.fr

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme des nombres désignés par ses chiffres l'est. Par abus de langage (au sens strict, une somme de chiffres n'a pas de sens), on dit : si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

2. Démontrer le critère de divisibilité par 5

Soit n un nombre entier naturel. Divisons le par 10 : il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $n = 10q + r$, et $0 \leq r < 10$. Or 10 est multiple de 5, donc n et r sont multiples de 5 ensembles. Or les seuls nombres à un chiffre multiples de 5 sont 0 et 5.

3. Démontrer le critère de divisibilité par 3 (on pourra se limiter aux nombres d'au plus trois chiffres).

Si nombre n s'écrit $\overline{abc}$, alors $n = 100a + 10b + c = (99+1)a + (9+1)b + c = 3\,(33a+3b) + (a+b+c)$. Le bloc bleu étant multiple (entier) de 3, les blocs jaune et rouge sont mutliples de 3 ensemble.

On pourrait aussi le rédiger (en terminale), en utilisant les congruences modulo 3.

4. Enoncer, sur des exemples, le critère de divisibilité par 11.

Pour savoir si un nombre entier est multiple de 11, on peut calculer la somme des nombres désignés par ses chiffres, affectés de coefficients $(-1)^{\text{ordre du chiffre}}$. Le nombre de départ et le nombre ainsi calculé sont multiples de 11 ensembles.

Exemples : 786 n'est pas multiple de 11 car $7 - 8 + 6 = 5$ ne l'est pas.

6853 est multiple de 11 car $6 - 8 + 5 - 3 = 0$ l'est.

Démonstration : s'inspirer du cas « divisibilité par 3 ».

Exercice 4 : Parmi les entiers naturels inférieurs à 200, trouver ceux qui sont susceptibles d'être le dividende d'une division dont le quotient est 4 et le reste 35.

On cherche un entier naturel n inférieur à 200 tel que $n = 4 \times d + 35$. Le diviseur d soit être strictement supérieur au reste, donc $d > 35$.

Solution 1 : on essaye successivement $d = 36, 37, \ldots$ jusqu'à ce que n dépasse 200.

Solution 2 : on étudie dans $\mathbf{N}$ le système $d > 36$ et $4d+35 \leq 200$.

Exercice 5 : On dispose d'un ensemble d'objets que l'on veut ranger par paquets. Si on range les objets par paquets de 12, il en reste 5.

1. Combien en reste-t-il si on les range par paquets de 4, en faisant le maximum de paquets possibles?

Le nombre n d'objets est tel que $n = 12q + 5$ (q étant le quotient dans la division euclidienne de n par 12). On réécrit $n = 4\,(3q+1) + 1$. Or $3q+1$ est un entier naturel et $0 \leq 1 < 5$, dont la division euclidienne de n par 4 donne un quotient de $3q+1$ et un reste de 1.

2. Combien en reste-t-il si on les range par paquets de 8, en faisant le maximum de paquets possibles?

renaud.chorlay@inspe-paris.fr

En reprenant les mêmes notations, on doit distinguer se la parité de q :

- Si q est pair, il existe un entier naturel q' tel que $q = 2\,q'$. En adaptant le raisonnement fait plus haut, on obtient $n = 8 \times (3q') + 5$, il reste 5 objets.
- Si q est impair, il existe un entier naturel q' tel que $q = 2\,q'+1$. En adaptant le raisonnement fait plus haut, on obtient $n = 8 \times (3q'+2) + 1$, il reste 1 objet isolé.

Remarque : cette dernière question donnerait une belle occasion d'utiliser le tableur pour conjecturer la réponse.

Exercice 6 : On cherche un nombre de trois chiffres, multiple de 9 et dont le quotient dans la division par 21 est 33. Déterminer le ou les nombre(s) solution(s).

Un tel nombre n vérifie $n = 21 \times 33 + r$ avec $0 \leq r < 21$.

Solution 1 : passer en revue les 21 possibilités pour r (de 0 à 20) et regarder si le n correspondant est un nombre de 3 chiffres et un multiple de 9.

Solution 2 : $n = 21 \times 33 + r$ or 21x33 est multiple de 9, donc n et r le sont ensemble. Donc r fait partie de la liste : 0, 9, 18. On calcule le n correspondants et on vérifie qu'ils satisfont aux conditions.

On trouve trois solutions : 693, 702 et 711.