Recherche de tangentes à une conique dans *La Géométrie*

Sources :

[23] I. Grattan-Guinness (ed.) *From the Calculus to Set Theory: 1630 – 1910: an introductory history*, Princeton University Press, 1980.

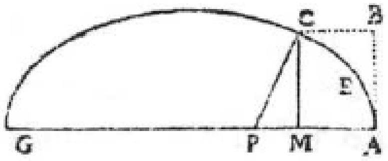
[24] IREM *Aux origines du calcul infinitésimal*, coll. Comprendre les mathématiques par les textes historiques, Ellipses, 1999.

Dans *La Géométrie* de Descartes (1637)

Façon générale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingentes, à angles droits.

Soit CE la ligne courbe, et qu'il faille tirer une ligne droite par le point C, qui fasse avec elle des angles droits. Je suppose la chose déjà faite, et que la ligne cherchée est CP, laquelle je prolonge jusques[414] au point P, où elle rencontre la ligne droite GA, que je suppose être celle aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE : en sorte que, faisant MA ou CB $\propto y$, et CM, ou BA $\propto x$, j'ai quelque équation, qui explique le rapport, qui est entre x et y. Puis je fais PC $\propto s$, et PA $\propto v$, ou PM $\propto v - y$, et à cause du triangle rectangle PMC j'ai ss, qui est le carré de la base égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les carrés des deux côtés. C'est-à-dire j'ai $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, et par le moyen de cette équation, j'ôte de l'autre équation qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'une des deux quantités indéterminées x ou y. Ce qui est aisé à faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, et le carré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, si c'est x que je veuille ôter ; ou bien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, et le carré, ou le cube, etc. de cette somme, au lieu de yy, ou y^3 etc. De façon qu'il reste toujours après cela une équation, en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indéterminée, x, ou y.

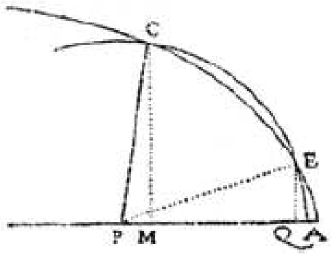
Comme si CE est une Ellipse, et que MA soit le segment de son diamètre, auquel CM soit appliquée par ordre, et qui ait r pour son côté droit, et q pour le[415] traversant, on a par le 13 th. du I liv. d'Apollonius. $xx = ry - \frac{r}{q}yy$, d'où ôtant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. Ou bien,



$yy + \dfrac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ égal à rien. Car il est mieux en cet endroit de considérer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire une partie égale à l'autre.

(…)

Or après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en servir pour connaître les quantités x, ou y, ou z, qui sont déjà données, puisque le point C est donné, on la doit employer à trouver v, ou s, qui déterminent le point P, qui est demandé. Et à cet effet il faut considérer, que si ce point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE sans la couper : mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussi nécessairement en quelque autre. Puis il faut aussi considérer, que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'équation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC être connues, contient nécessairement deux racines, qui sont inégales. Car par exemple si ce cercle[418] coupe la courbe aux points C et E, ayant tiré EQ parallèle à CM, les noms des quantités indéterminées x et y, conviendront aussi bien aux lignes EQ, et QA, qu'à CM, et MA ; puis PE est égale à PC, à cause du cercle, si bien que cherchant les lignes EQ et QA, par PE et PA

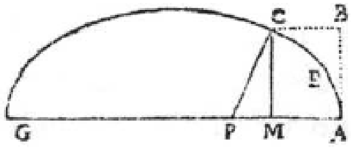


qu'on suppose comme données, on aura la même équation, que si on cherchait CM et MA par PC, PA. D'où il suit évidemment, que la valeur de x, ou de y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposée, sera double en cette équation, c'est-à-dire qu'il y aura deux racines inégales entre elles ; et dont l'une sera CM, l'autre EQ, si c'est x qu'on cherche ; ou bien l'une sera MA, et l'autre QA, si c'est y. Et ainsi des autres. Il est vrai que si le point E ne se trouve pas du même côté de la courbe que le point C, il n'y aura que l'une de ces deux racines qui soit vraie, et l'autre sera renversée, ou moindre que rien : mais plus ces deux points, C, et E, sont proches l'un de l'autre, moins il y a de différence entre ces deux racines ; et enfin elles sont entièrement égales, s'ils sont tous deux joints en un ; c'est-à-dire si le cercle, qui passe par C, y touche la courbe CE sans la couper.

De plus il faut considérer, que lorsqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a nécessairement la même forme, que si on multiplie par soi-même la quantité qu'on y suppose être inconnue moins la quantité connue qui lui est égale, et qu'après cela si cette dernière somme n'a pas tant de dimensions que[419] la précédente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il lui en manque ; afin qu'il puisse y avoir séparément équation entre chacun des termes de l'une, et chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple je dis que la première équation trouvée ci-dessus, à savoir $yy + \dfrac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ doit avoir la même forme que celle qui se produit en faisant e égal à y, et multipliant $y - e$ par soi-même, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en sorte qu'on peut comparer séparément chacun de leurs termes, et dire que puisque le premier qui est y y est tout le même en l'une qu'en l'autre, le second qui est en l'une $\dfrac{qry - 2qvy}{q - r}$

est égal au second de l'autre qui est $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui est la ligne PA, on a $v \propto e - \dfrac{r}{q}e + \dfrac{1}{2}r$, ou bien à



cause que nous avons supposé e égal à y, on a $v \propto y - \dfrac{r}{q}y + \dfrac{1}{2}r$. Et

ainsi on pourrait trouver s par le troisième terme $ee \propto \dfrac{qvv - qss}{q - r}$, mais parce que la quantité v détermine assez le point P, qui est le seul que nous cherchions, on n'a pas besoin de passer outre.[420]