René Descartes, *La Géométrie* (1637) : un programme d'analyse algébrique des courbes

Extraits du livre I

LIVRE PREMIER.

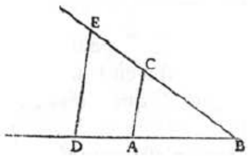
Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.

Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Comment le calcul d'Arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie.

Et comme toute l'Arithmétique n'est composée, que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division. Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter. Ou bien en ayant une,[370] que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication ; ou bien en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la Division ; ou enfin trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité, et quelque autre ligne ; ce qui est le même que tirer la racine carrée, ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La Multiplication.

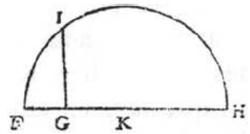


Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette Multiplication.

La Division.

Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'Extraction de la racine carrée.



Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I, à angles droits sur FH, c'est[371] GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces li-

Source : *The Geometry of René Descartes* (*translated from the French and Latin by D.E. Smith & L. Latham, with a facsimile of the first edition, 1637*), Open Court Publishing Company, Chicago, 1925.

Version .pdf disponible sur *Internet Archive* : http://www.archive.org/details/geometryofrene00desc

Pour aller plus loin : Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness*. New-York: Springer.

gnes sur le papier ; et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a+b$. Et $a-b$, pour soustraire b de a. Et ab, pour les multiplier l'une par l'autre. Et $\frac{a}{b}$, pour diviser a par b. Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soi-même. Et a^3, pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini. Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine carrée de a^2+b^2. Et $\sqrt{\mathrm{C}.a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique de a^3-b^3+abb, et ainsi des autres.

Comment on peut user de chiffres en Géométrie.

Où il est à remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des carrés ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant que abb ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt{\mathrm{C}.a^3-b^3+abb}$: mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb-b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que[372] l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.

Au reste afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple.

AB $\propto$ 1, c'est-à-dire, AB égal à 1.
GH $\propto$ a
BD $\propto$ b, etc.

Comment il faut venir aux Équations qui servent à résoudre les problèmes.

Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Équations, qu'on a supposé de lignes, qui étaient inconnues. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des[373] lignes connues, pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune Équation. Après cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des Équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues ; et faire ainsi en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale à quelque autre, qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, etc. soit égal à ce, qui se produit par l'addition, ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité, et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc. multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte.

$z \propto b$. Ou
$z^2 \propto -az+bb$. Ou
$z^3 \propto +az^2+bbz-c^3$. Ou
$z^4 \propto az^3-c^3z+d^4$. Etc.

C'est-à-dire, z, que je prends pour la quantité inconnue, est égalé à b, ou le carré de z est égal au carré de b moins a multiplié par z. Ou le cube de z est égal à a multiplié par le carré de z plus le carré de b multiplié par z moins le cube de c. Et ainsi des autres.

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quan[374]tités inconnues à une seule, lorsque le Problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale, qu'on puisse

tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront un peu versés en la Géométrie commune, et en l'Algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

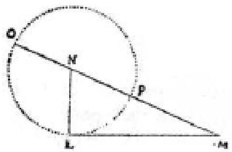
C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir, que pourvu qu'en démêlant ces Équations on ne manque point à se servir de toutes les divisions, qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes, auxquels la question puisse être réduite.

Quels sont les problèmes plans

Et que si elle peut être résolue par la Géométrie ordinaire, c'est-à-dire, en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la dernière Équation aura été entièrement démêlée, il n'y restera tout au plus qu'un carré inconnu, égal à ce qui se produit de l'Addition, ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, et de quelque autre quantité aussi connue.

Comment ils se résolvent.

Et lors cette racine, ou ligne inconnue se trouve aisément. Car, si j'ai, par exemple $z^3 \propto az + bb$[375] je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connue bb, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant MN la base de ce tri-



angle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Que si j'ai $yy \propto -ay + bb$, et que y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa base MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est y la racine cherchée. De façon que j'ai $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de même si j'avais $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. PM serait x^2. Et j'aurais $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Et ainsi des autres.[376]

Erreur de transcription : il s'agit de $z^2 = az + bb$ et non de z^3.

Extraits du livre 2

LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

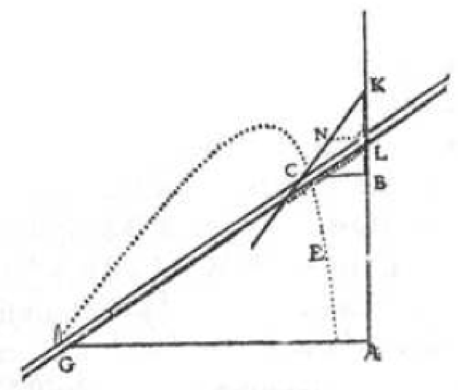
Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Géométrie.

LEs anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problèmes de Géométrie, les uns sont plans, les autres solides, et les autres linéaires, c'est-à-dire, que les uns peuvent être construits, en ne traçant que des lignes droites, et des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques, plutôt que Géométriques. Car de dire que ç'ait été, à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudrait rejeter par même raison les cercles et les lignes droites; vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas, et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus, à cause[389] que les instruments, qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes; car il faudrait pour cette raison les rejeter des Mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la Géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recher-che, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Je ne dirai pas aussi, que ce soit à cause qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, et qu'ils se sont contentés qu'on leur accordât, qu'ils pussent joindre deux points donnés par une ligne droite, et décrire un cercle d'un centre donné, qui passât par un point donné. Car ils n'ont point fait de scrupule de supposer outre cela, pour traiter des sections coniques, qu'on pût couper tout cône donné par un plan donné. Et il n'est besoin de rien supposer pour tracer toutes les lignes courbes, que je prétends ici d'introduire ; sinon que deux ou plusieurs lignes puissent être mues l'une par l'autre, et que leurs intersections en marquent d'autres ; ce qui ne me paraît en rien plus difficile. Il est vrai qu'ils n'ont pas aussi entièrement reçu les sections coniques en leur Géométrie, et je ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont été approuvés par l'usage ; mais il est, ce me semble, très clair, que prenant comme on fait pour Géométrique ce qui est précis et exact, et pour Mécanique ce qui ne l'est pas ; et considérant la Géométrie comme une science, qui enseigne généralement à connaître les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les[390] plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent. Car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure. Mais peut-être que ce qui a empêché les anciens Géomètres de rece-

voir celles qui étaient plus composées que les sections coniques, c'est que les premières qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la Spirale, la Quadratrice, et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux Mécaniques, et ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement, bien qu'ils aient après examiné la Conchoïde, la Cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières. Ou bien c'est

(…)

Comme, si je veux savoir de quel genre est la ligne EC, que j'imagine être décrite par l'intersection de la



règle GL, et du plan rectiligne CNKL, dont le côté KN est indéfiniment prolongé vers C, et qui étant mû sur le plan de dessous en ligne droite, c'est-à-dire en telle sorte que son diamètre KL se trouve toujours appliqué sur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part et d'autre, fait mouvoir circulairement cette règle GL autour du point G, à cause qu'elle lui est tellement jointe qu'elle passe toujours par le point L. Je choisis une ligne droite, comme AB, pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe EC, et en cette ligne AB je choisis un point, comme A, pour commencer par lui ce calcul. Je dis que je choisis et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut. Car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte, et plus aisée ; toutefois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la[394] ligne paraisse de même genre, ainsi qu'il est aisé à démontrer.

Après cela prenant un point à discrétion dans la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à GA, et parce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme l'une y et l'autre x. Mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre ; je considère aussi les quantités connues qui déterminent la description de cette ligne courbe, comme GA que je nomme a, KL que je nomme b, et NL parallèle à GA que je nomme c. Puis je dis, comme NL est à LK, ou c à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est par conséquent $\frac{b}{c}y$: et BL est $\frac{b}{c}y - b$, et AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus comme CB est à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De facon que multipliant la seconde par la troisième on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui est égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui se produit en multipliant la première par la dernière. Et ainsi l'équation qu'il fallait trouver est $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$. De laquelle on connaît que la ligne EC est du premier genre, comme en effet elle n'est autre qu'une Hyperbole.

Extraits du livre 3

Combien il peut y avoir de racines en chaque Équation.

Sachez donc qu'en chaque Équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple si on suppose x égal à 2 ; ou bien $x-2$ égal à rien ; et derechef $x \propto 3$; ou bien $x-3 \propto 0$; en multipliant ces deux Équations $x-2 \propto 0$, et $x-3 \propto 0$, l'une par l'autre, on aura $xx-5x+6 \propto 0$, ou bien $xx \propto 5x-6$, qui est une Équation en laquelle la quantité x vaut 2 et tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait[445] $x-4 \propto 0$, et qu'on multiplie cette somme par $xx-5x+6 \propto 0$, on aura $x^3-9xx+26x-24 \propto 0$, qui est une autre Équation en laquelle x ayant trois dimensions a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3, et 4.

Quelles sont les fausses racines.

Mais souvent il arrive, que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a $x+5 \propto 0$, qui étant multipliée par $x^3-9xx+26x-24 \propto 0$ fait

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120 \propto 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Comment on peut diminuer le nombre des dimensions d'une Équation lorsqu'on connaît quelqu'une de ses racines.

Et on voit évidemment de ceci, que la somme d'une équation, qui contient plusieurs racines, peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit ; ou plus la valeur de l'une des fausses. Au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions.

Comment on peut examiner si quelque quantité donnée est la valeur d'une racine.

Et réciproquement que si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue + ou − quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme cette dernière $x^4-4x^3-19xx+106x-120 \propto 0$ peut bien être divisée, par $x-2$, et par $x-3$, et par[446] $x-4$, et par $x+5$; mais non point par x + ou − aucune autre quantité. Ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4, et 5.

Combien il peut y avoir de vraies racines en chaque Équation.

On connaît aussi de ceci combien il peut y avoir de vraies racines, et combien de fausses en chaque Équation. À savoir il y en peut avoir autant de vraies, que les signes + et − s'y trouvent de fois être changés ; et autant de fausses qu'ils s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes − qui s'entre-suivent. Comme en la dernière, à cause qu'après $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui est un changement du signe + en −, et après $-19xx$ il y a $+106x$, et après $+106x$ il y a -120 qui sont encore deux autres changements, on connaît qu'il y a trois vraies racines ; et une fausse, à cause que les deux signes −, de $4x^3$, et $19xx$, s'entresuivent.

(…)

Que les racines, tant vraies que fausses peuvent être réelles ou imaginaires.

Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque Équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui[454] corresponde à celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci, $x^3-6xx+13x-10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoi qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.