

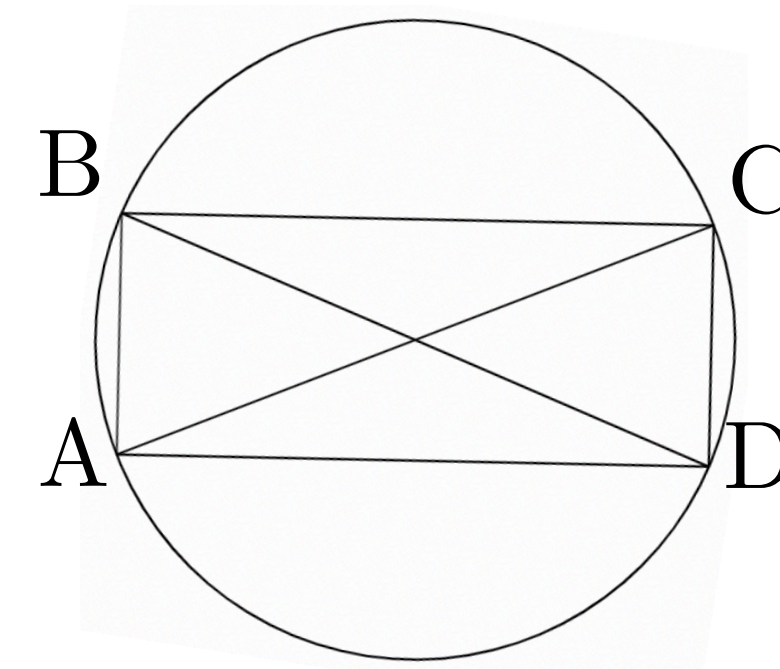
Géométrie

guillaume.didier@inspe-paris.fr

Exercice donné à des élèves durant leur scolarité :

Soit $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un cercle.

Que peux-tu affirmer sur le quadrilatère $ABCD$?



Consigne 2 :

Voici trois copies d'élèves annotées par des professeurs très compétents.

Comment expliquez-vous les annotations de ces professeurs ?

Copie n°1 :

J'ai pris mon équerre et j'ai vu que $ABCD$ a 4 angles droits.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

C'est parfait, bravo !

Copie n°2 :

Etant donné que $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres d'un même cercle, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu et sont de même longueur.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

Parfait ! Bravo !

Copie n°3 :

Ça se voit que $ABCD$ est un rectangle.

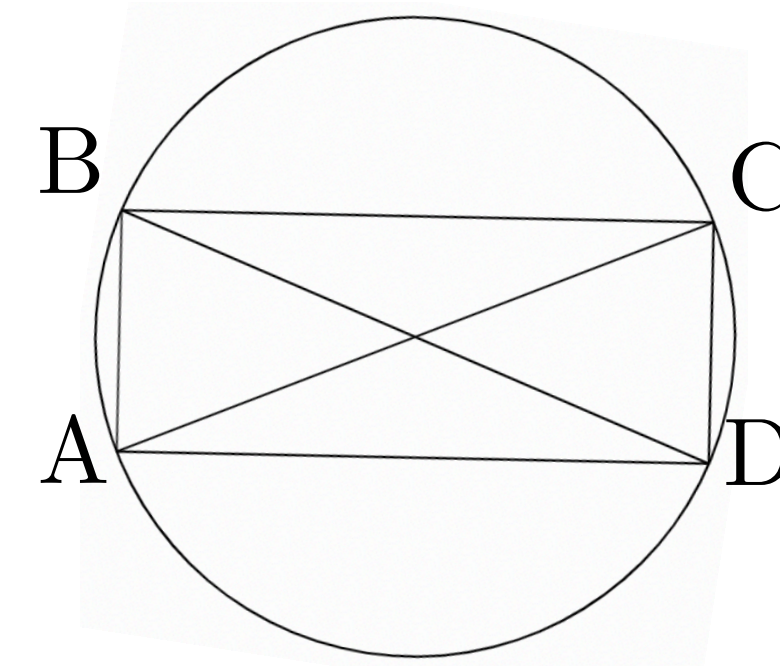
Bravo, c'est parfait !

Un seul élève mais plusieurs géométries

Exercice donné à des élèves durant leur scolarité :

Soit $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un cercle.

Que peux-tu affirmer sur le quadrilatère $ABCD$?



Consigne 2 :

Voici trois copies d'élèves annotées par des professeurs très compétents.

Comment expliquez-vous les annotations de ces professeurs ?

Géométrie instrumentée

Copie n°1 :

J'ai pris mon équerre et j'ai vu que $ABCD$ a 4 angles droits.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

C'est parfait, bravo !

Géométrie déductive

Copie n°2 :

Etant donné que $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres d'un même cercle, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu et sont de même longueur.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

Parfait ! Bravo !

Géométrie perceptive

Copie n°3 :

Ça se voit que $ABCD$ est un rectangle.

Bravo, c'est parfait !

Un seul élève mais plusieurs géométries



éduscol Informer et accompagner
les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

> MATHÉMATIQUES

Espace et géométrie

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Objectifs

Au cycle 2, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour **décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens.**

Au cycle 3, **l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments,** puis par l'explicitation de ces propriétés. Il a appris à nommer, comparer, reconnaître, décrire, des figures simples

Au cycle 4, **l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement.**

Changement
de paradigme

Cohabitation
des trois géométries

Motiver le changement de paradigme

Stratégies d'enseignement

Document d'accompagnement (2016)

« Utiliser des notions de géométrie plane pour démontrer », cycle 4

De la géométrie perçue à la géométrie abstraite

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite. Lorsque la géométrie modélise une situation concrète, ou dans la géométrie dessinée¹, les instruments (règle, équerre) peuvent servir à valider une propriété (alignement de points, angle droit).

Lorsque le professeur propose une situation modélisée par la géométrie plane, les propriétés géométriques établies et les calculs de grandeurs réalisés à l'intérieur du modèle doivent donner l'occasion au professeur d'explicitier ses attentes auprès de l'élève. Ce dernier doit savoir si l'on attend de lui des propriétés et calculs nécessairement exacts et théoriques dans le modèle mathématique, ou des réponses « convenables » dans le monde physique.

Pour passer de la géométrie perçue à la géométrie abstraite, le changement de paradigme doit être motivé par des activités qui en montrent la nécessité.

Pour jouer à un nouveau jeu, les règles doivent être connues et acceptées !

Certes, mais quel(s) type(s) d'activités ?

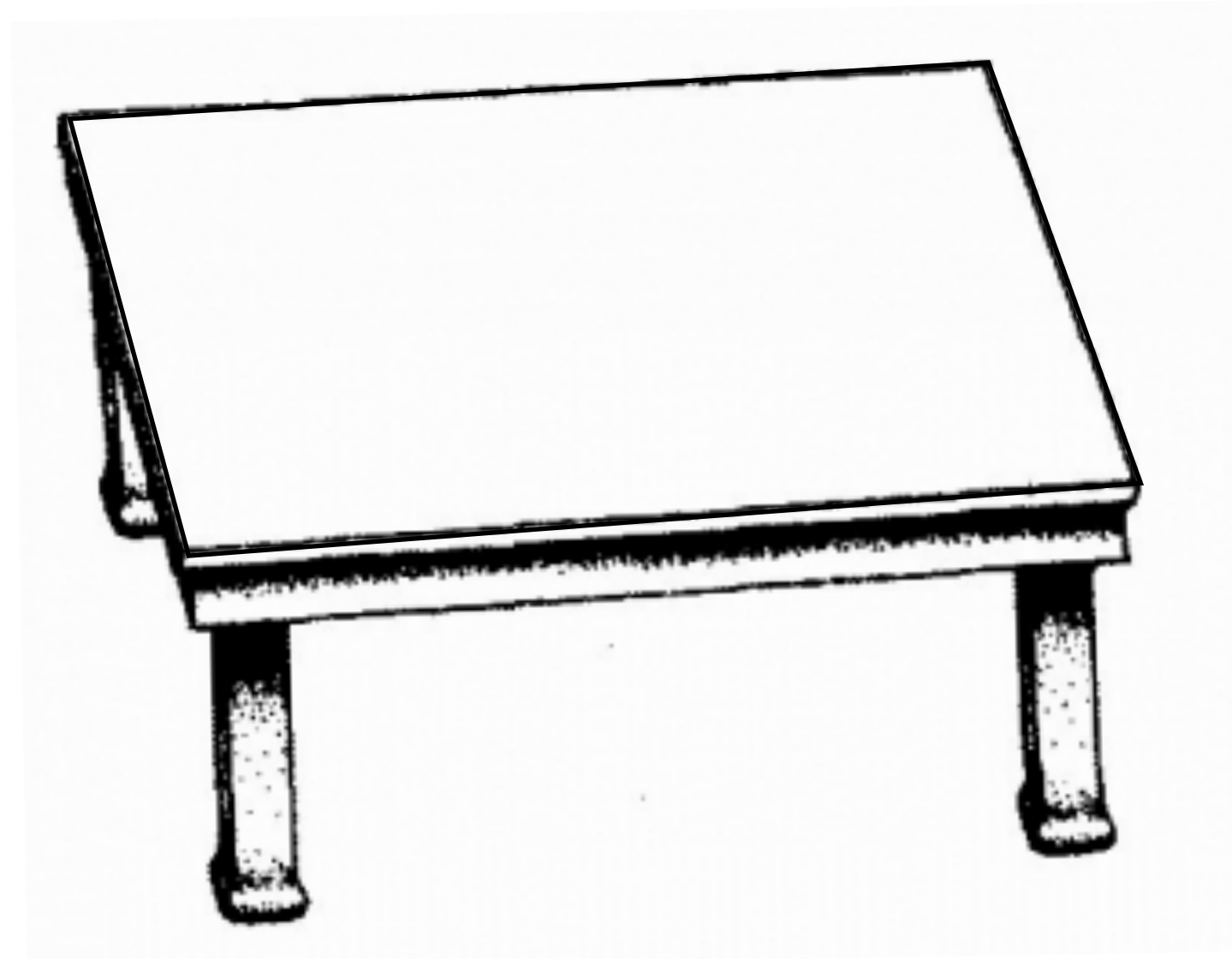
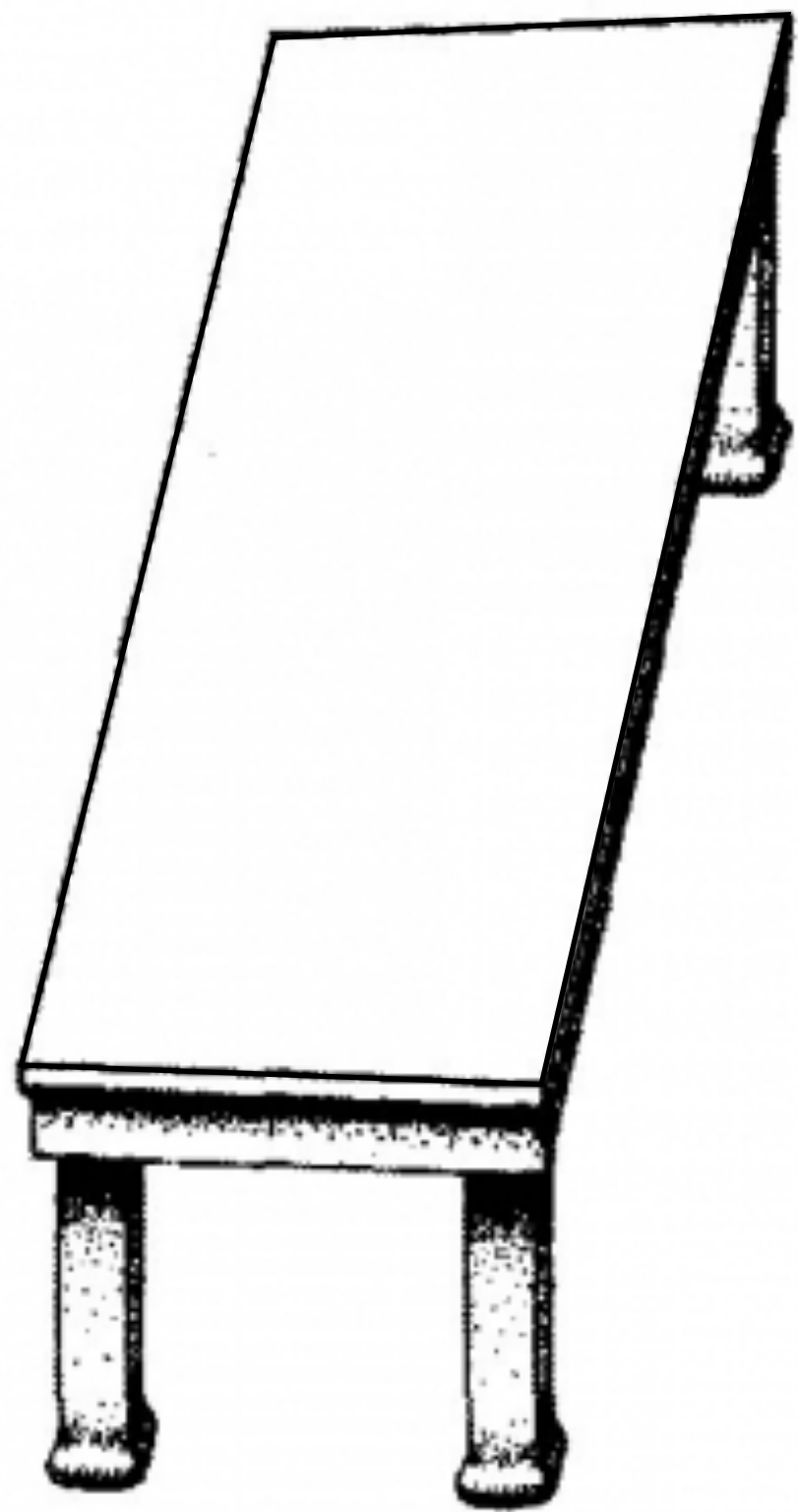
A ne pas sous-estimer !
Réelle difficulté pour les élèves.

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.

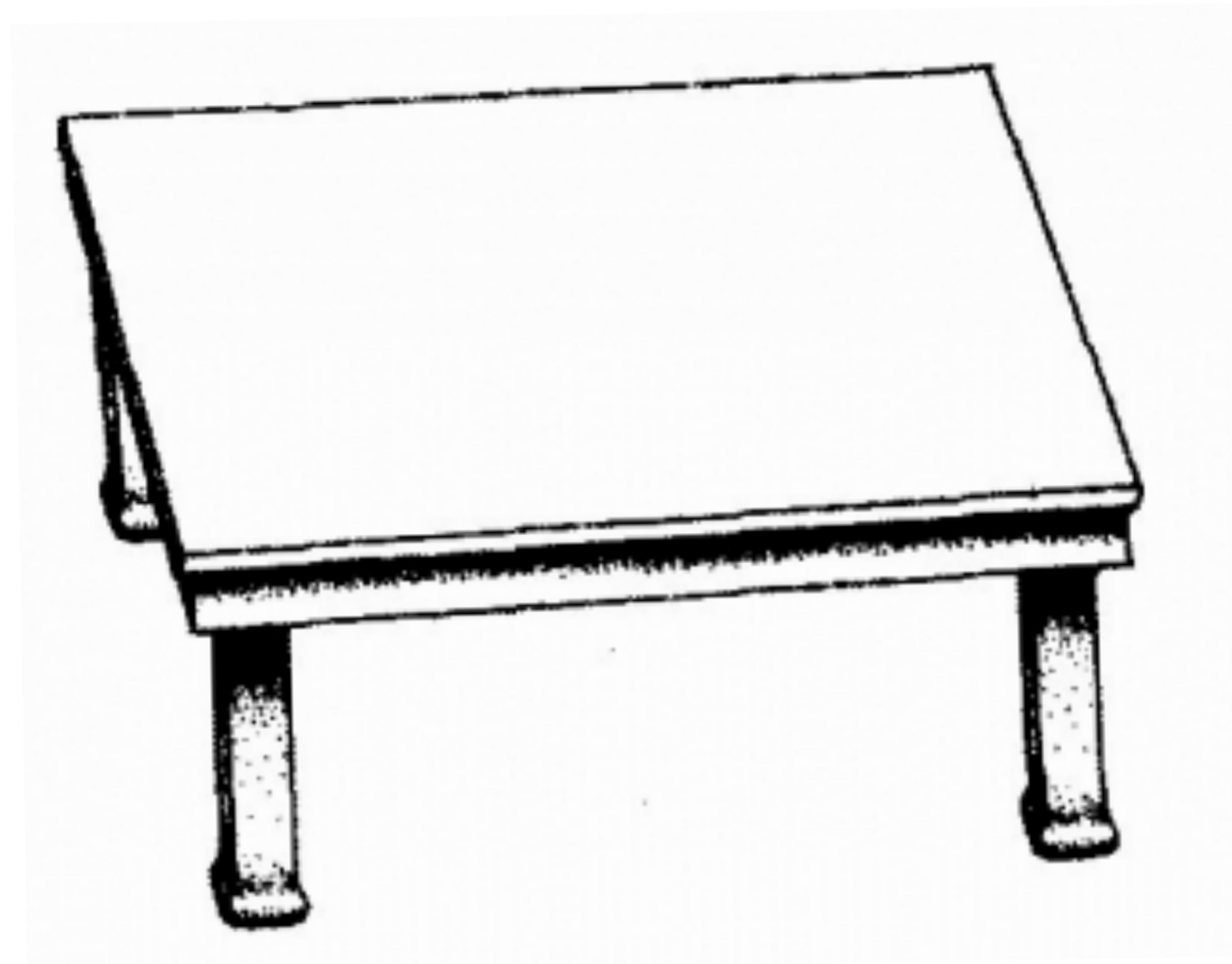
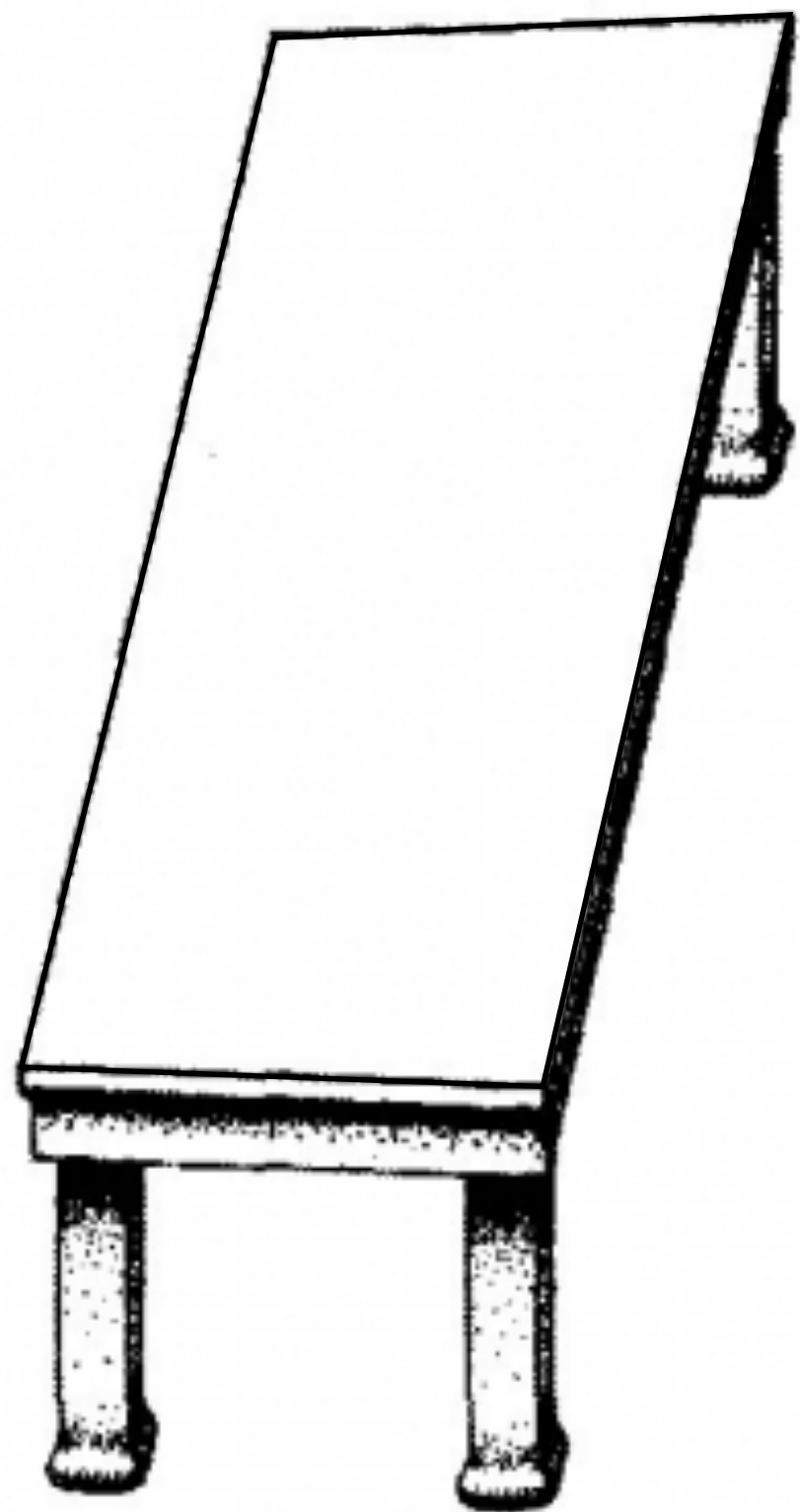
Lorsque l'on veut que les élèves utilisent la géométrie perceptive, on ne distribue pas de support papier ; on projette sur un écran.



Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



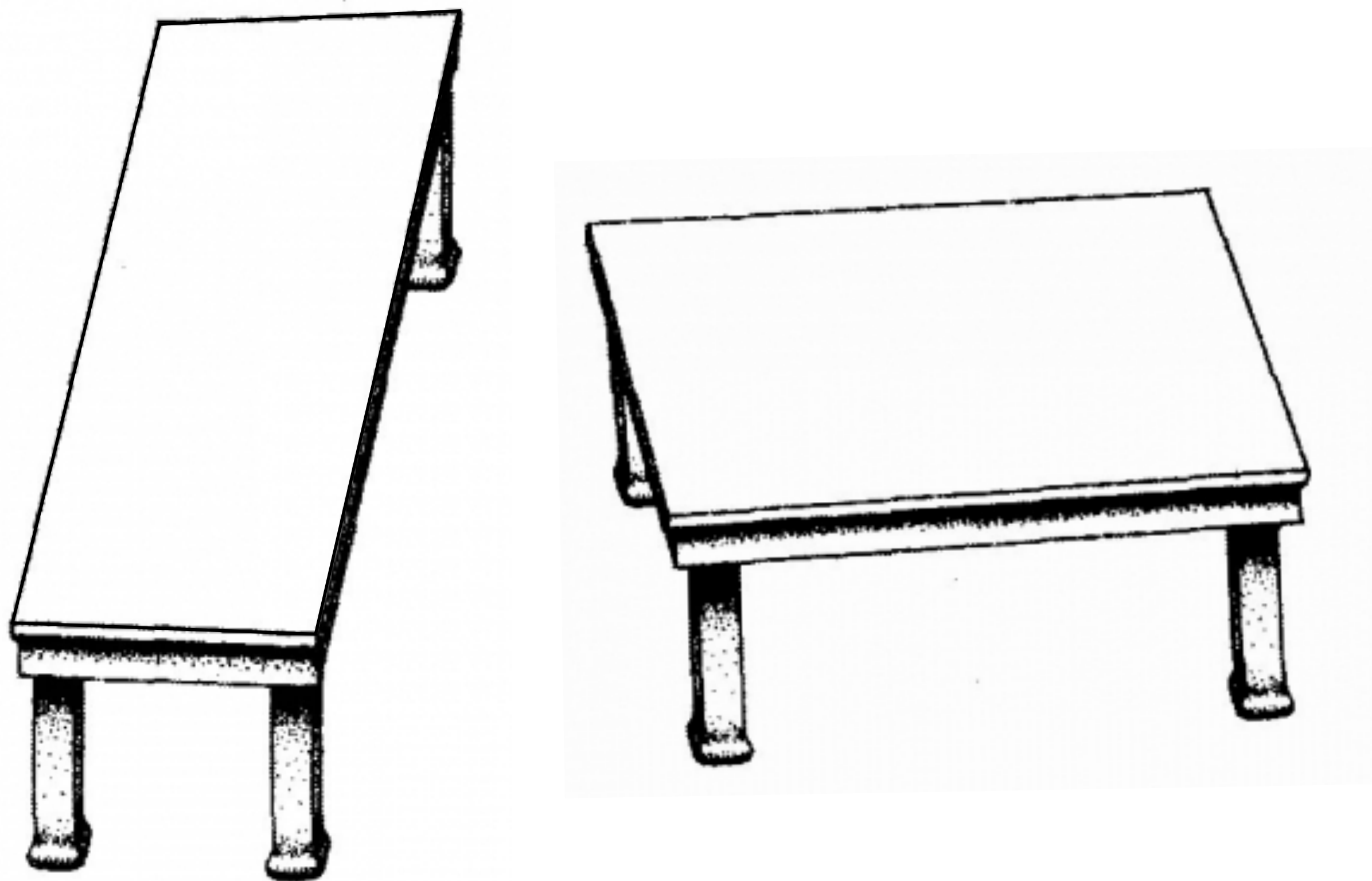
Question 2 : (on dispose d'un support papier pour cette question).

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



Procédures possibles :

- On découpe les deux plateaux et on les superpose.
- À l'aide d'une feuille calque, on reproduit un des deux plateaux puis on le superpose sur l'autre plateau.

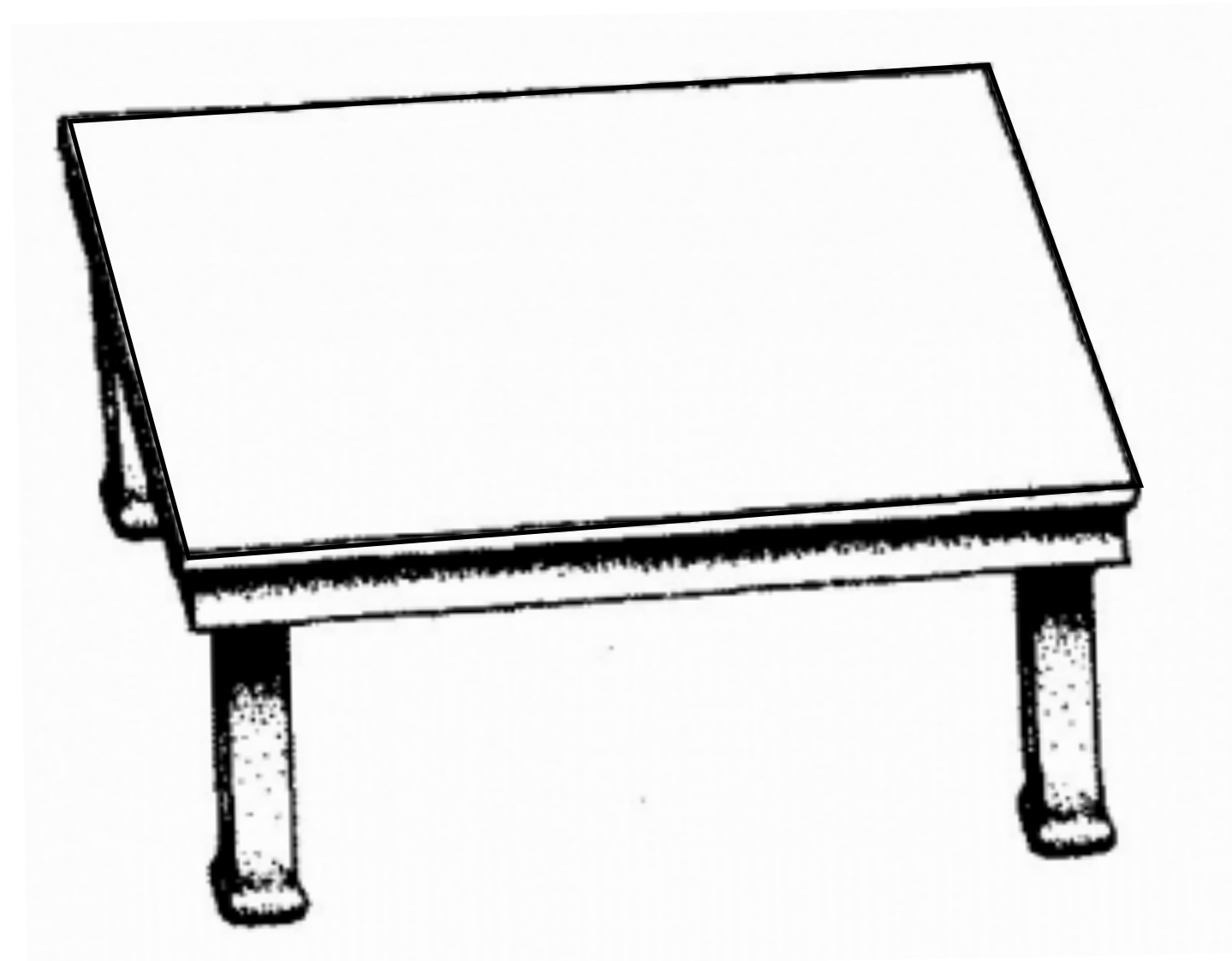
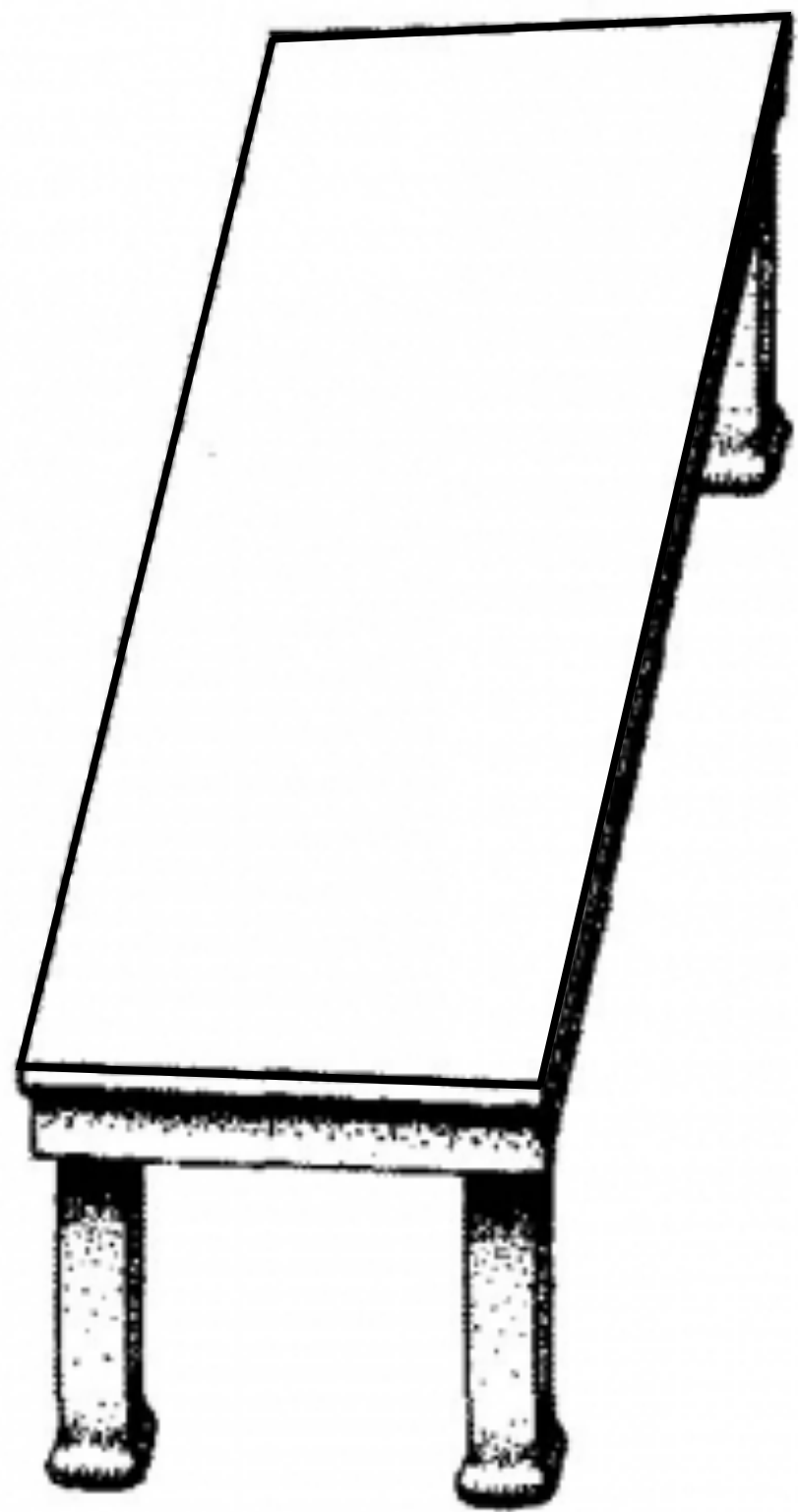
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



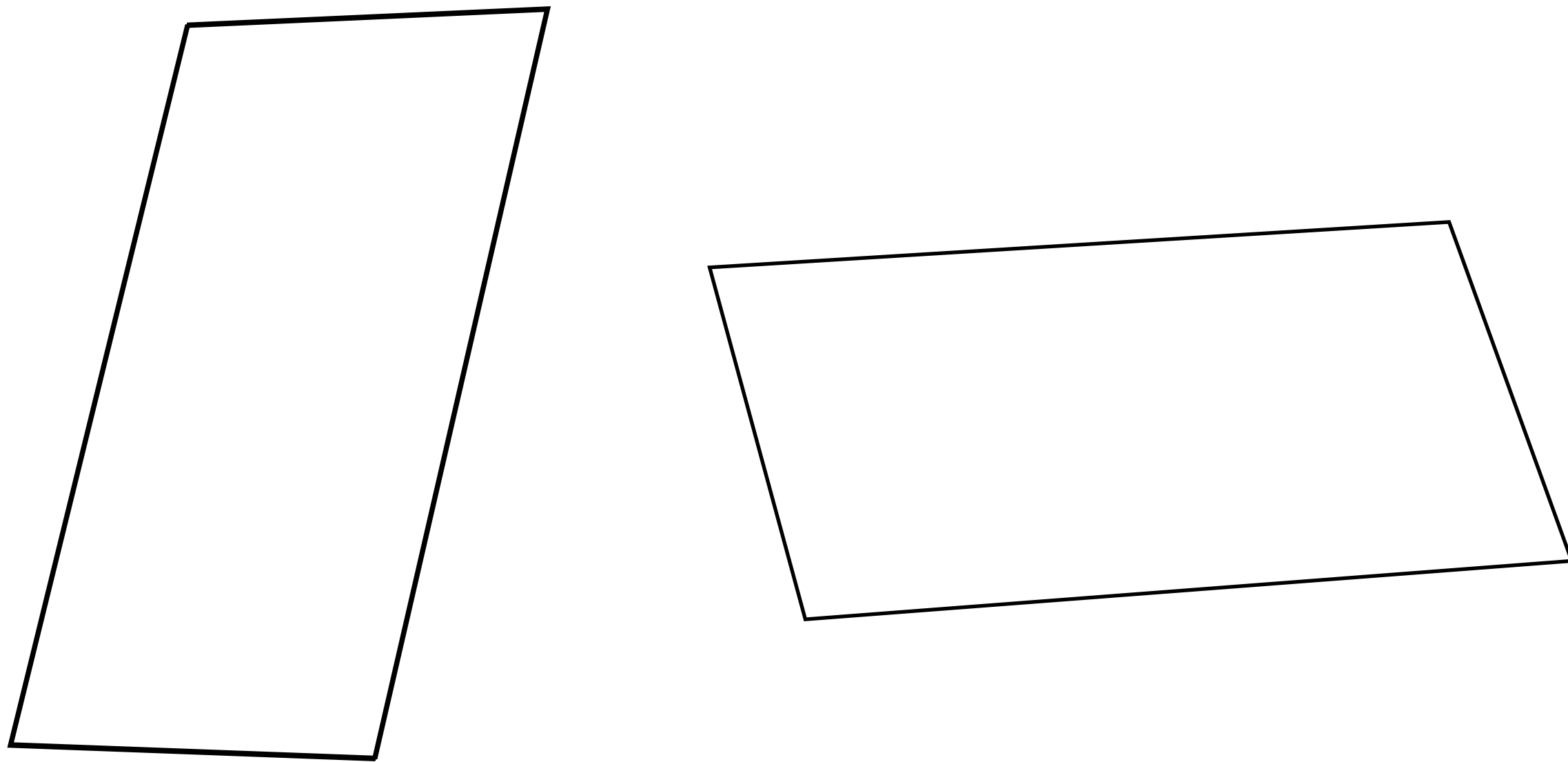
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



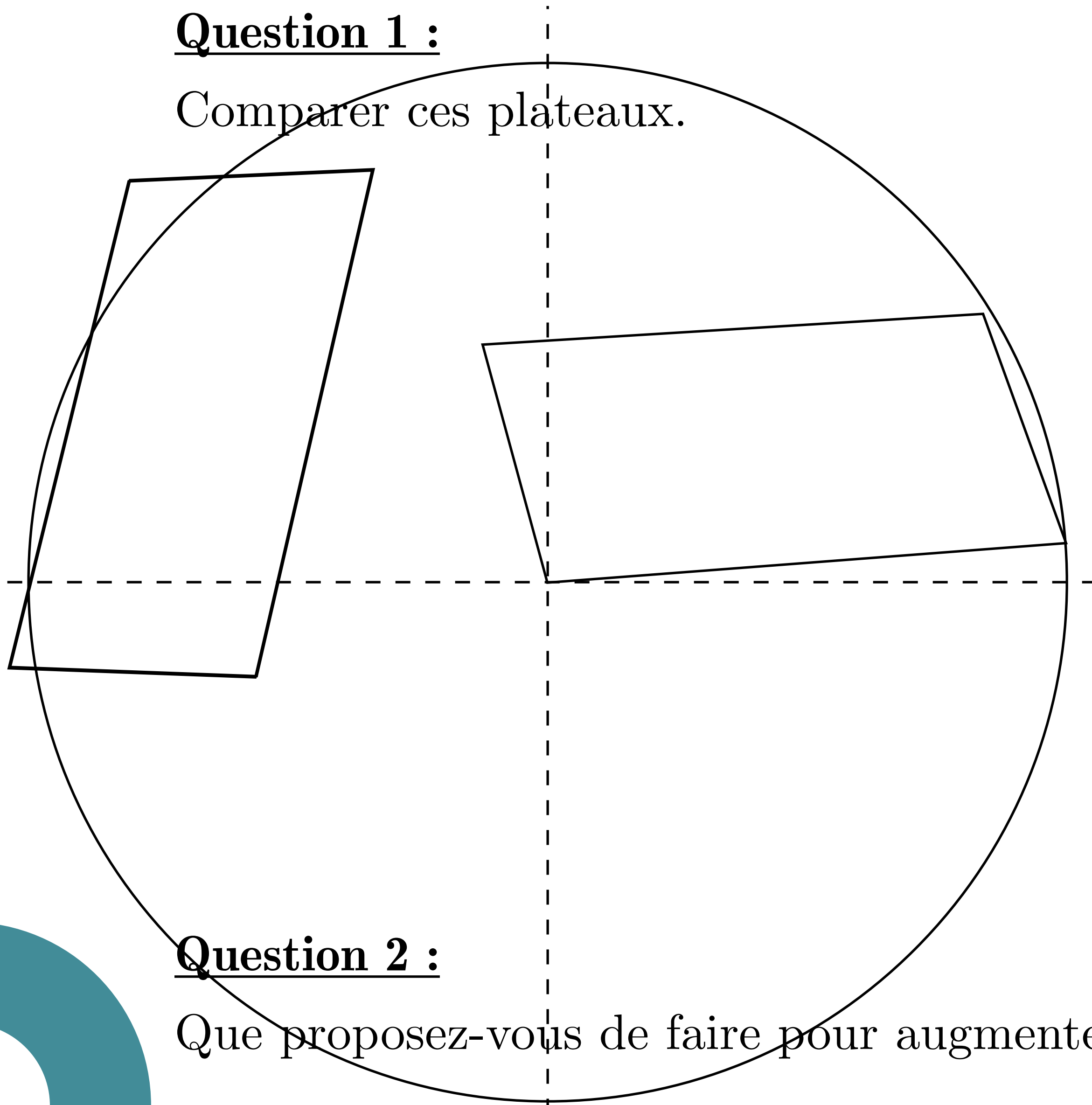
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



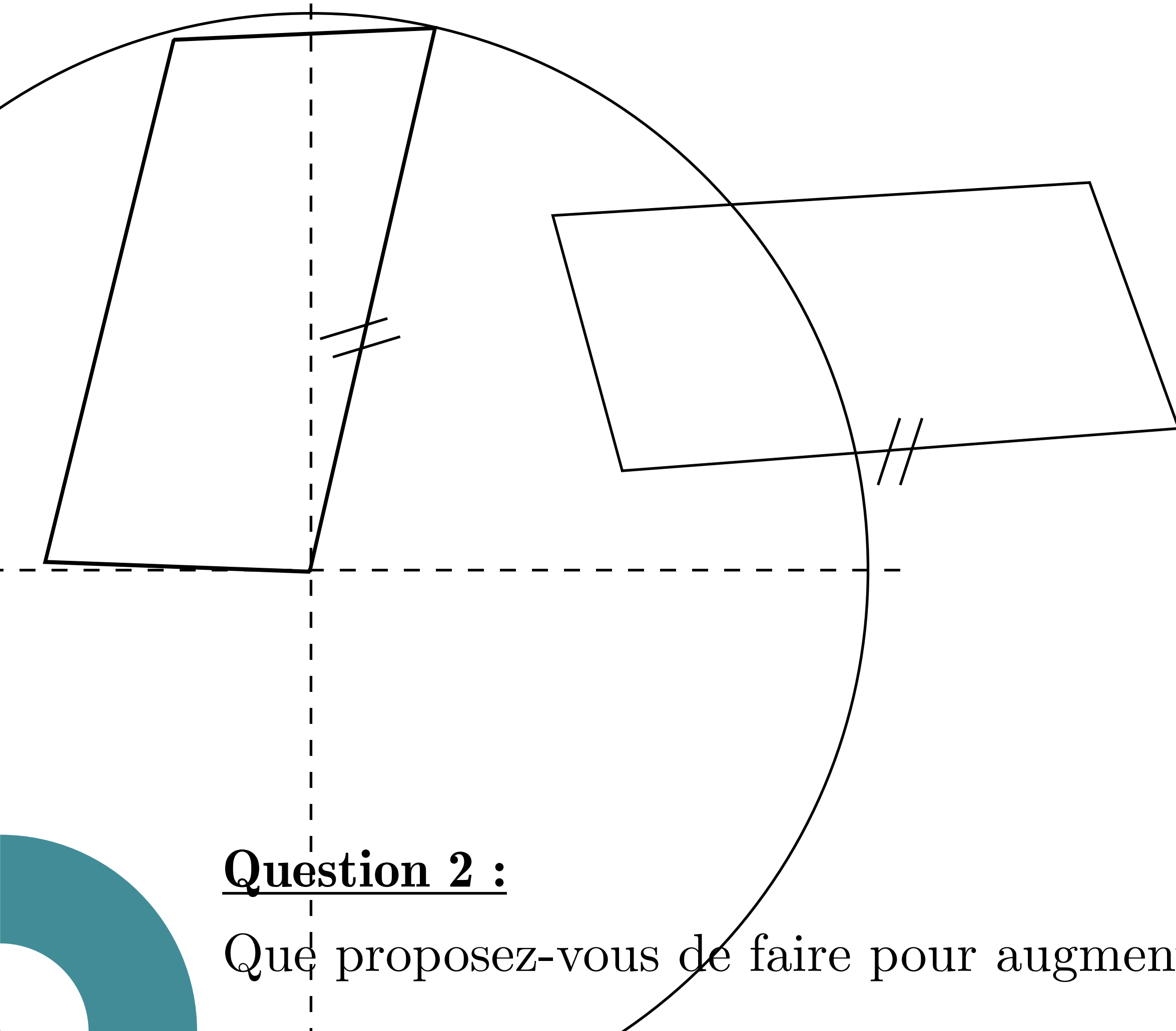
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



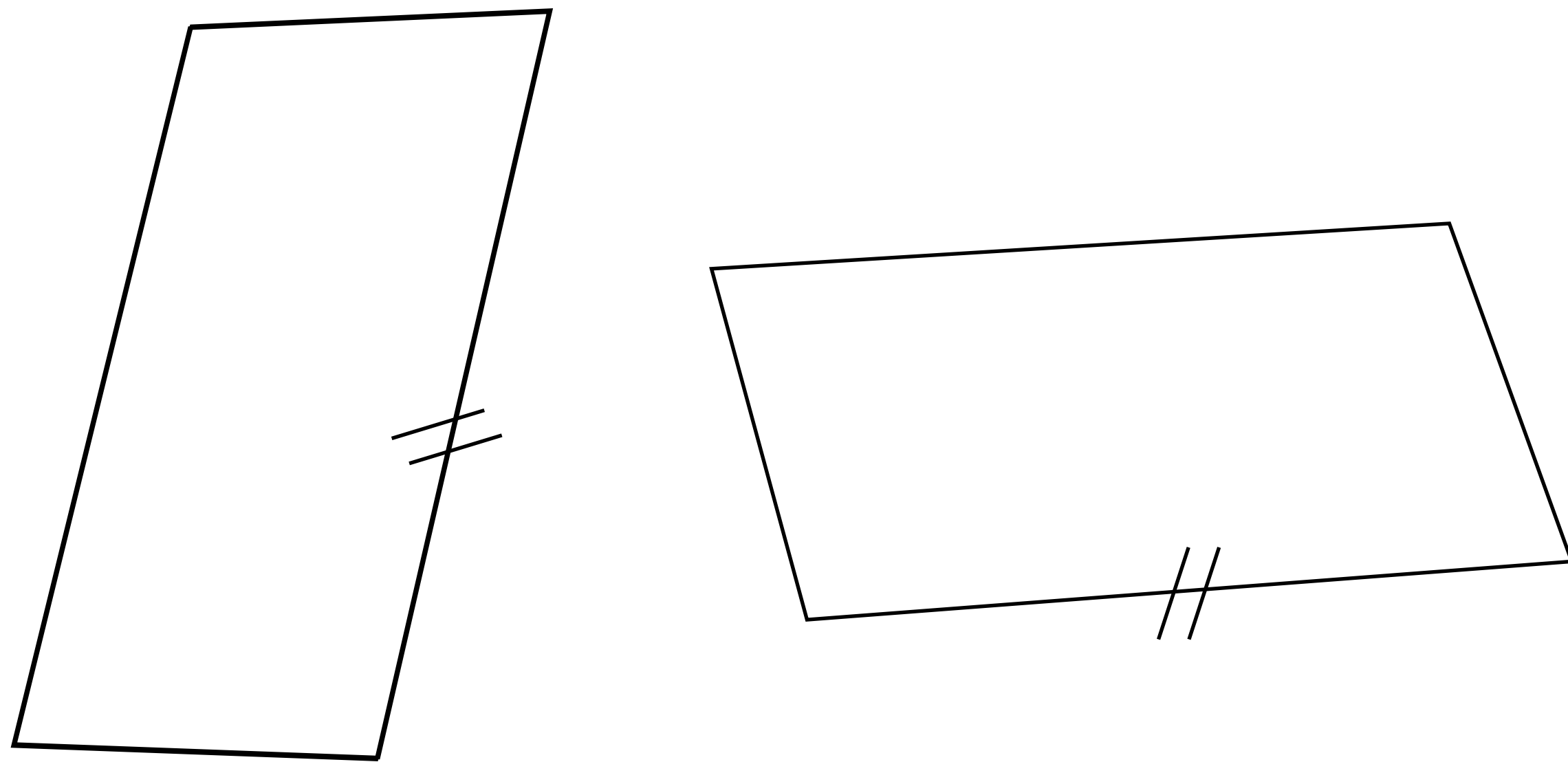
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



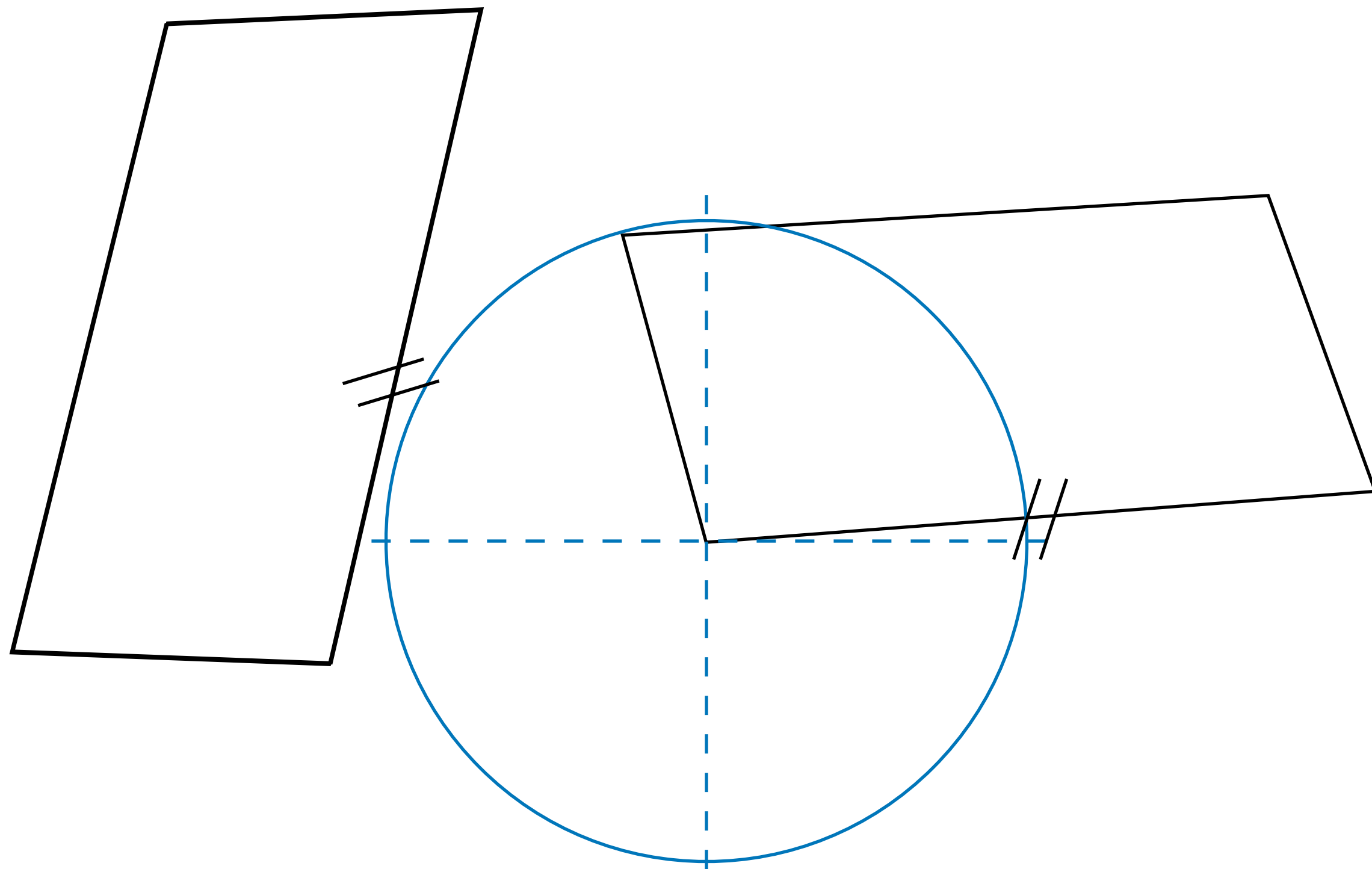
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



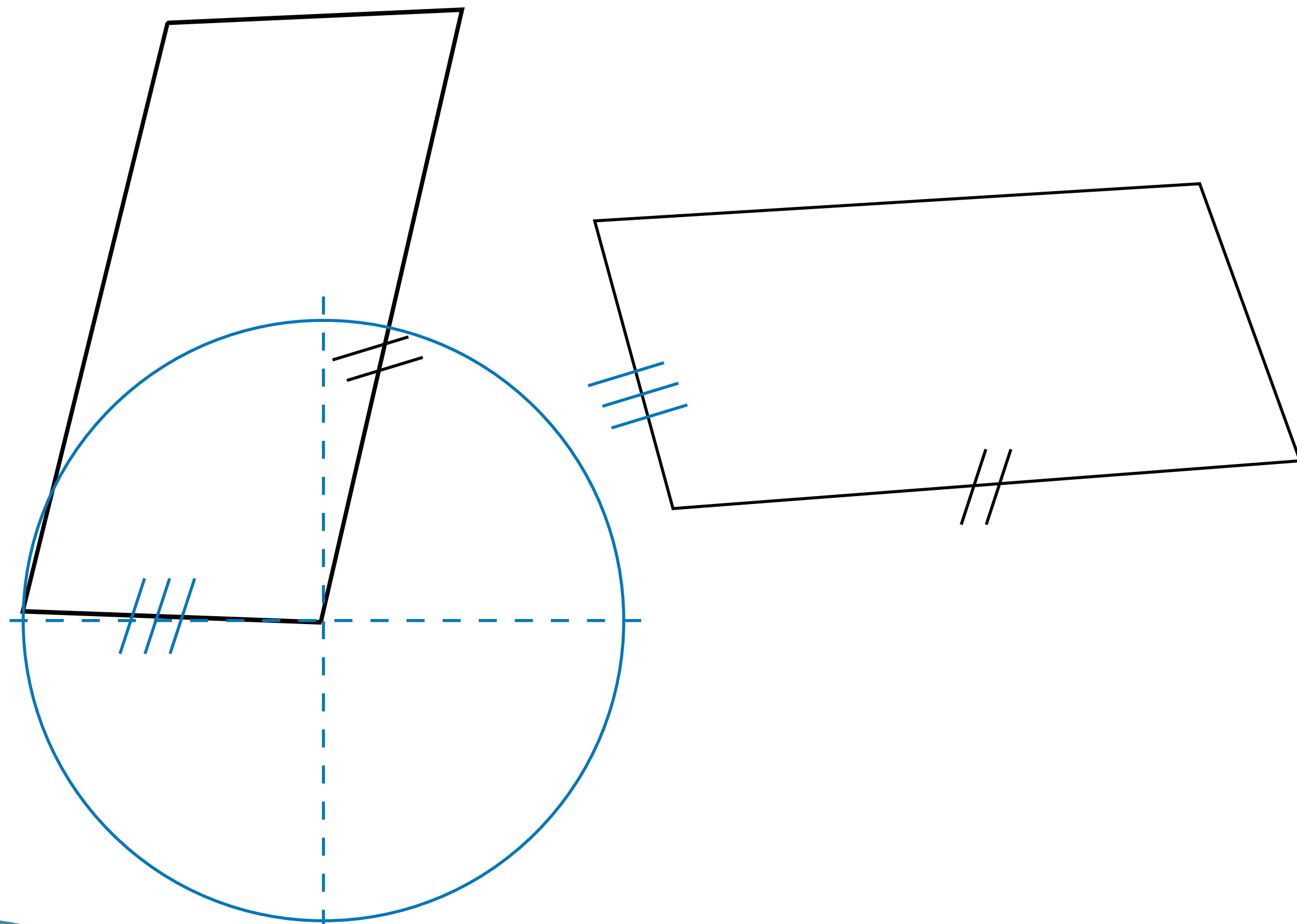
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



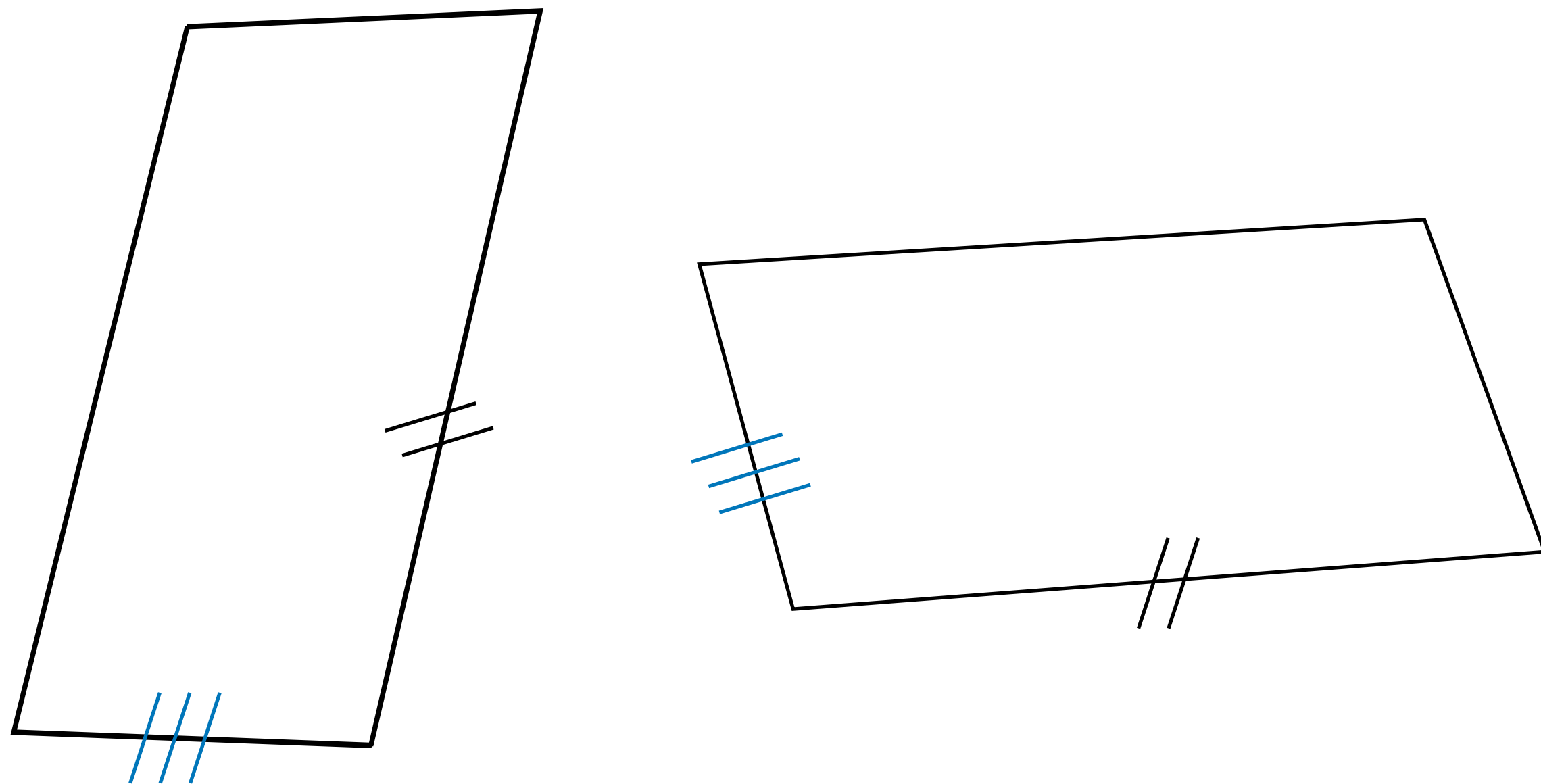
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



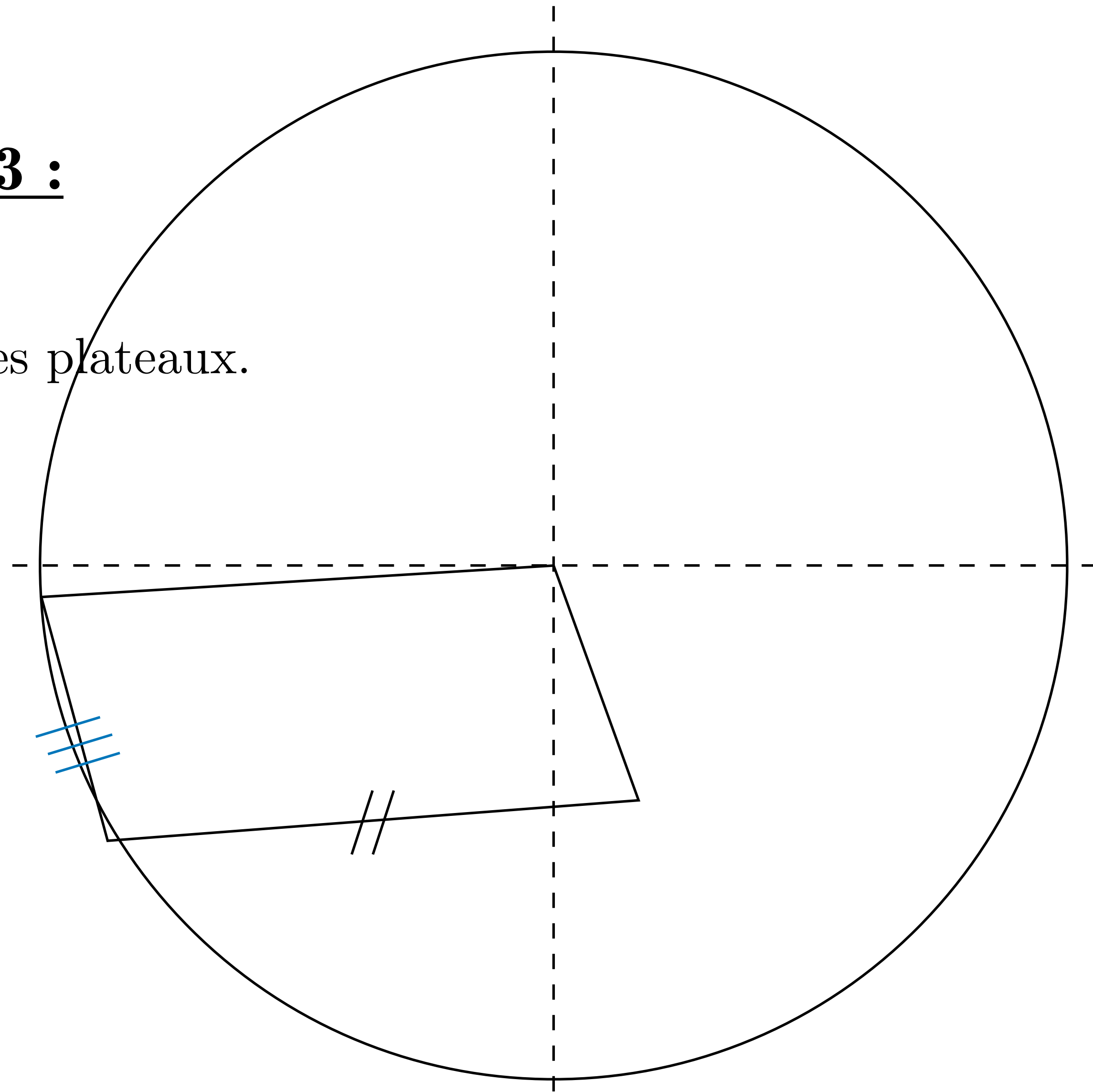
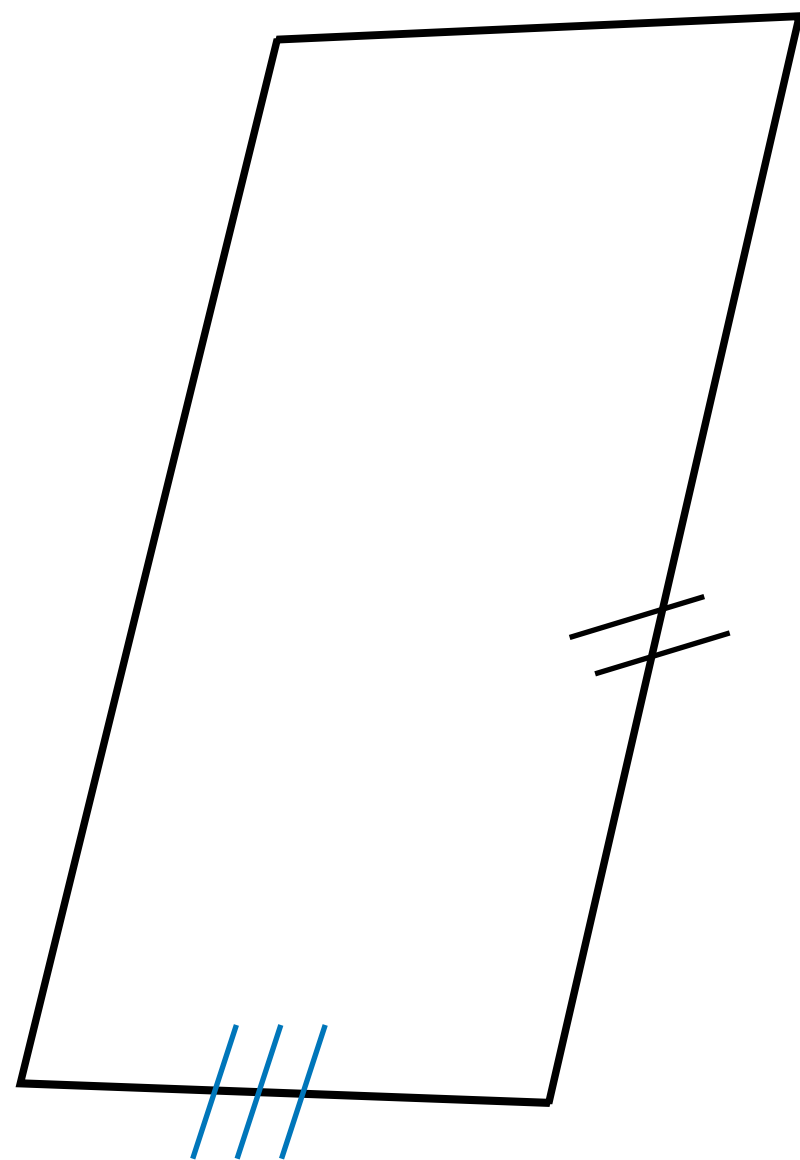
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



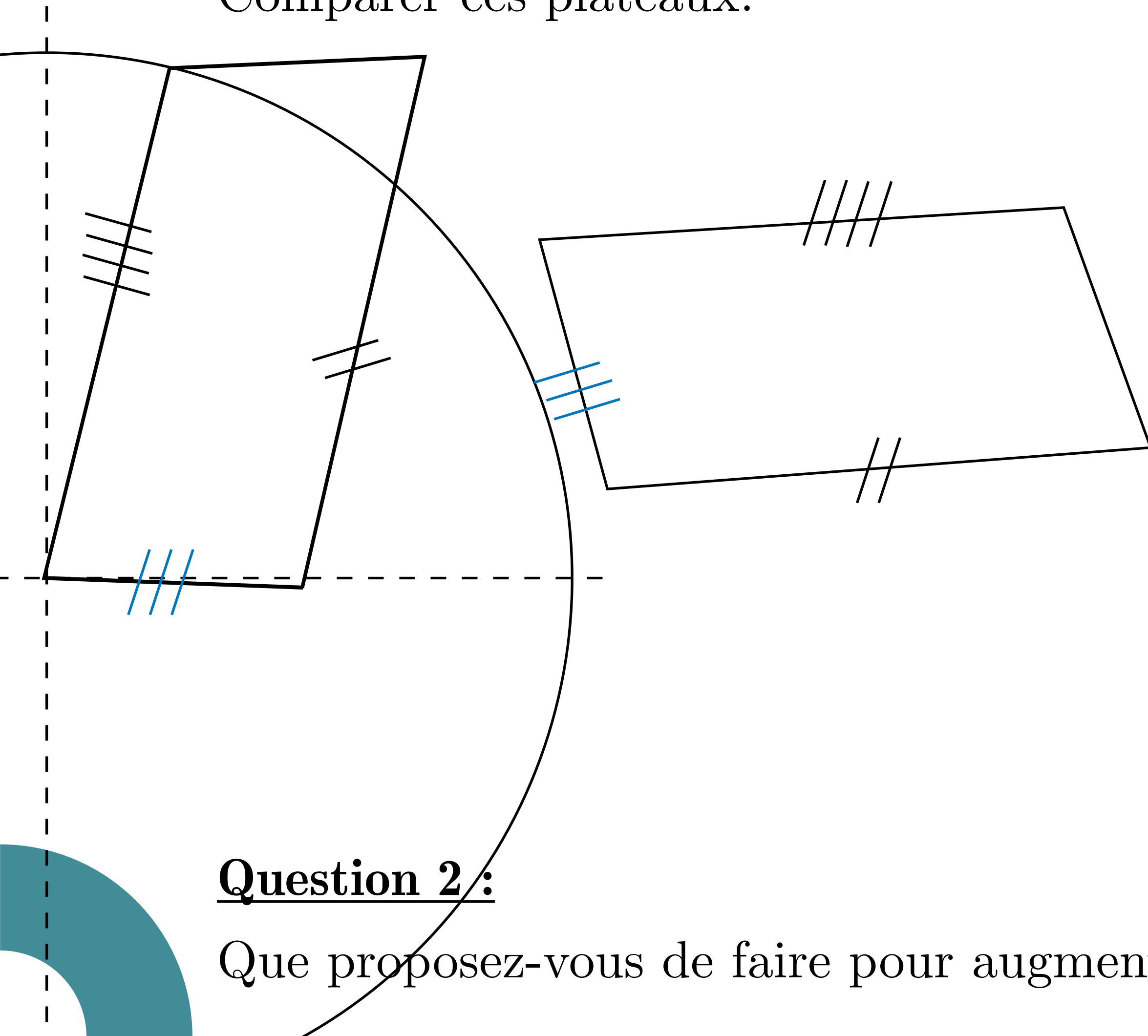
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



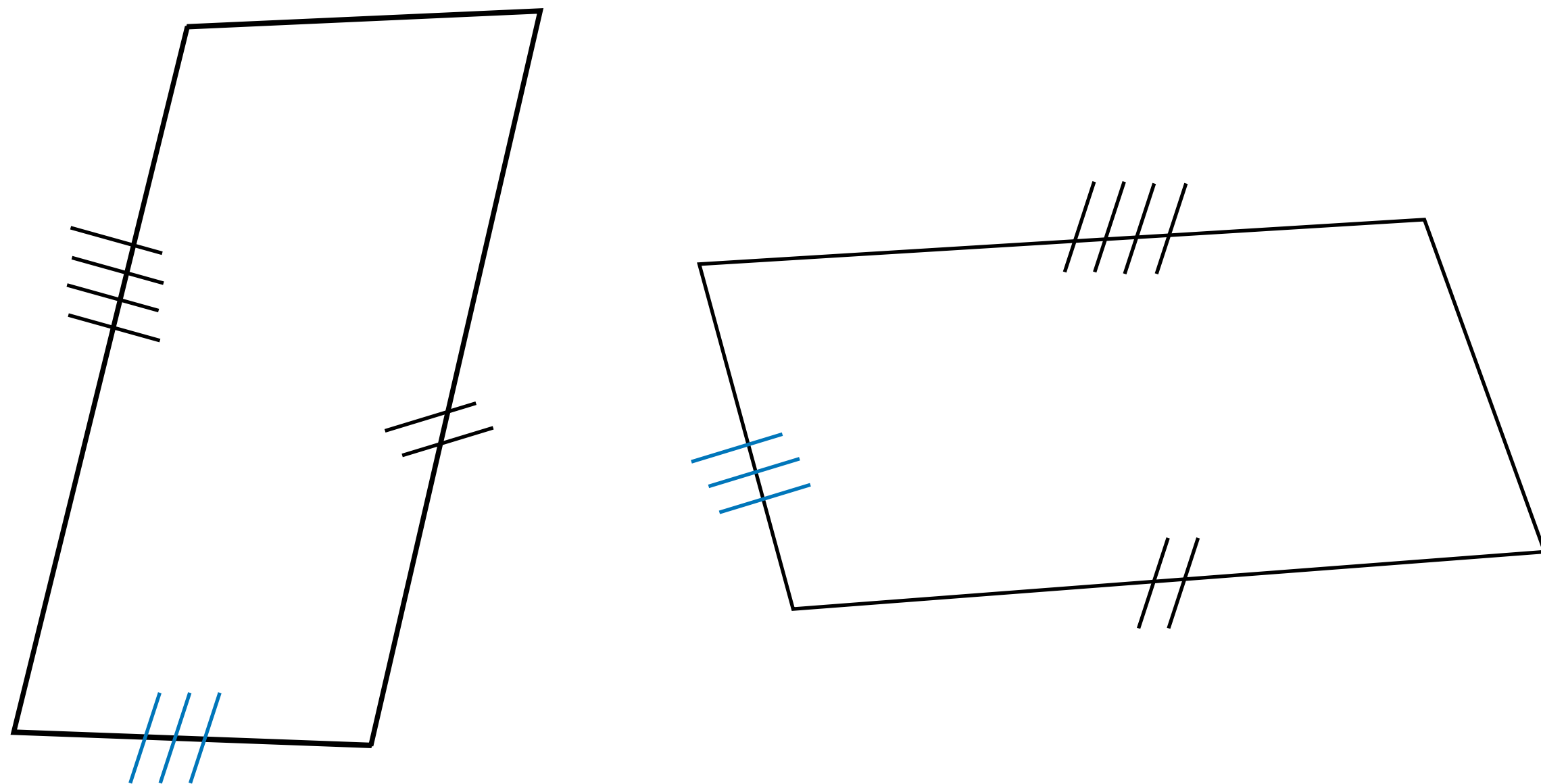
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



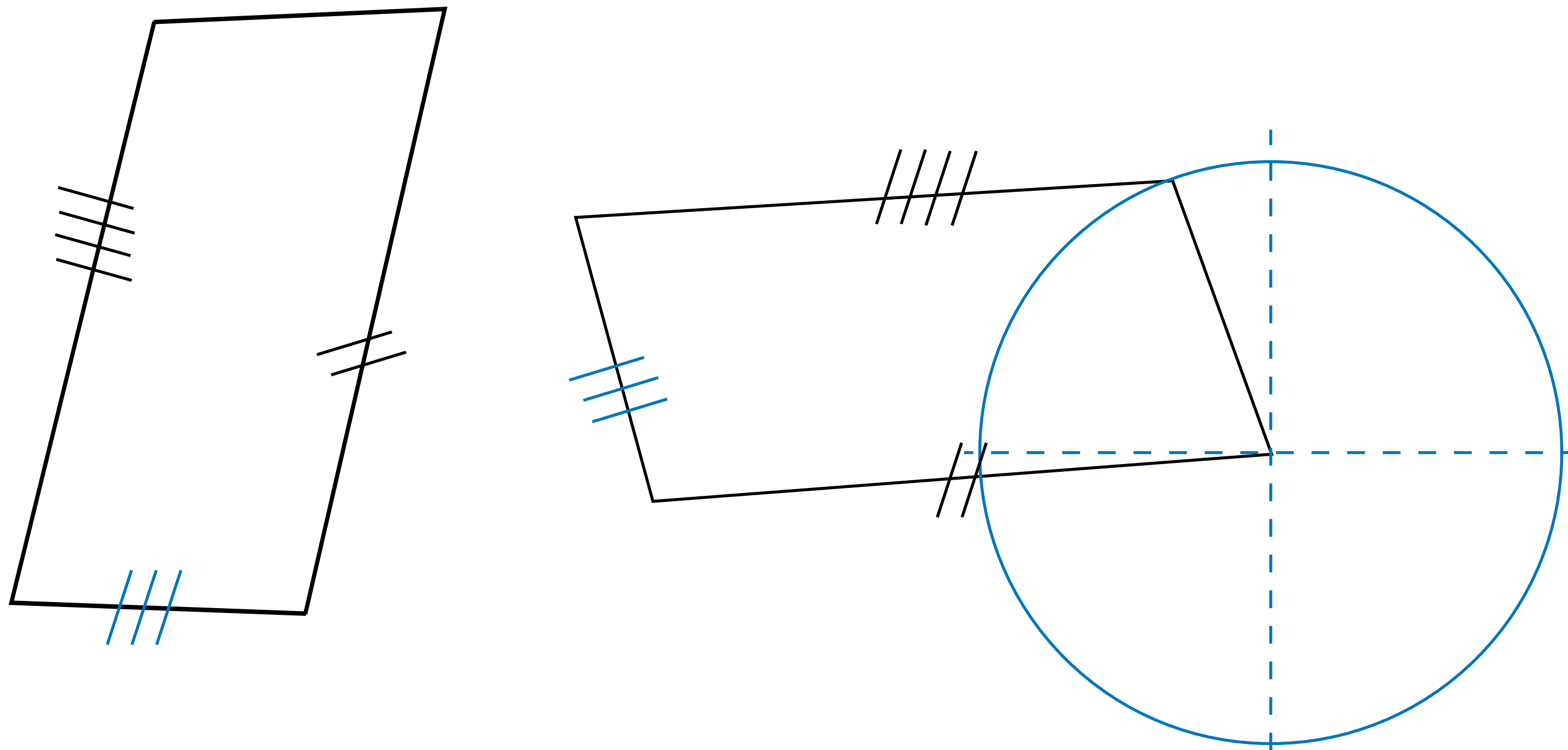
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



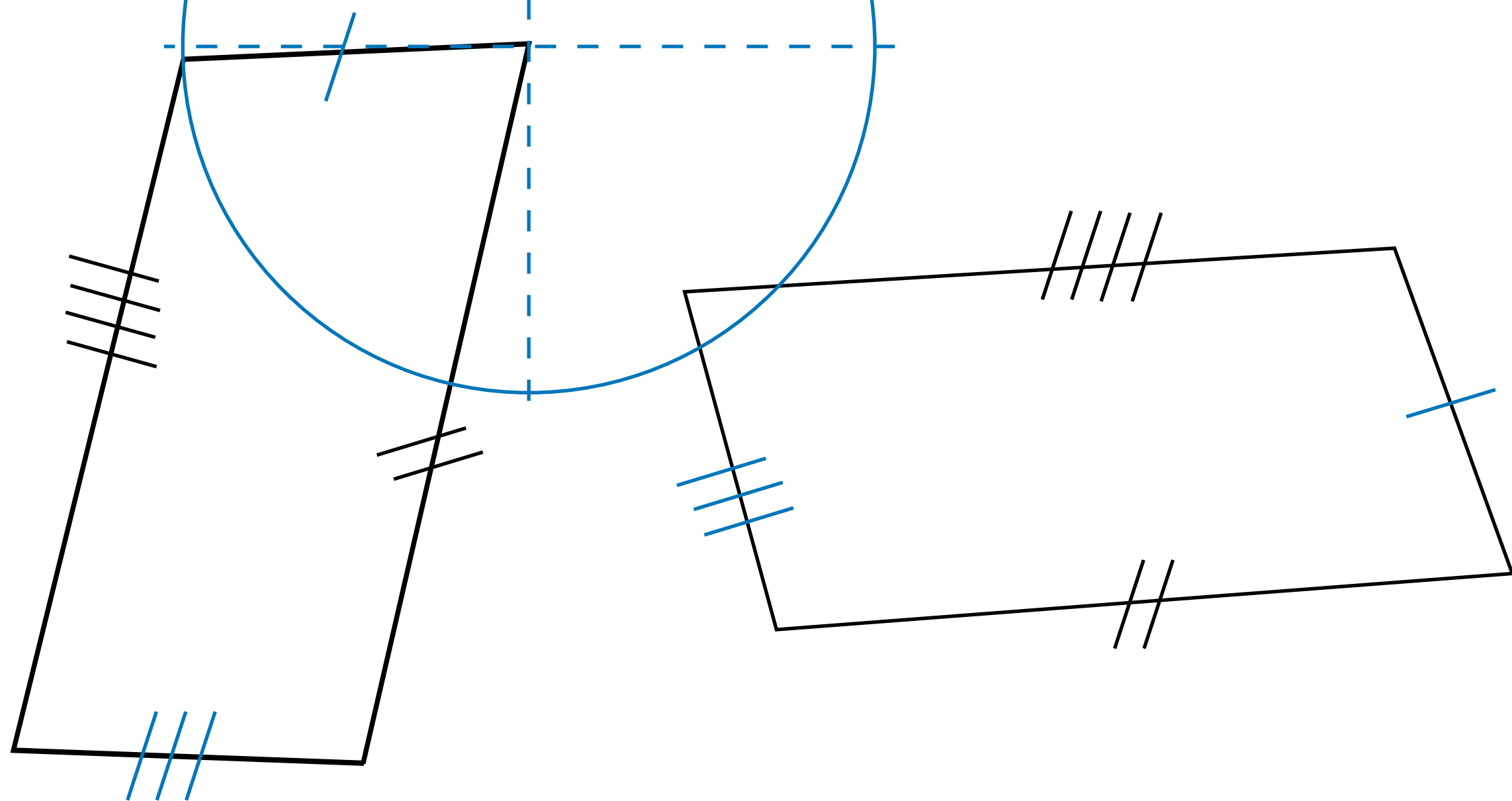
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



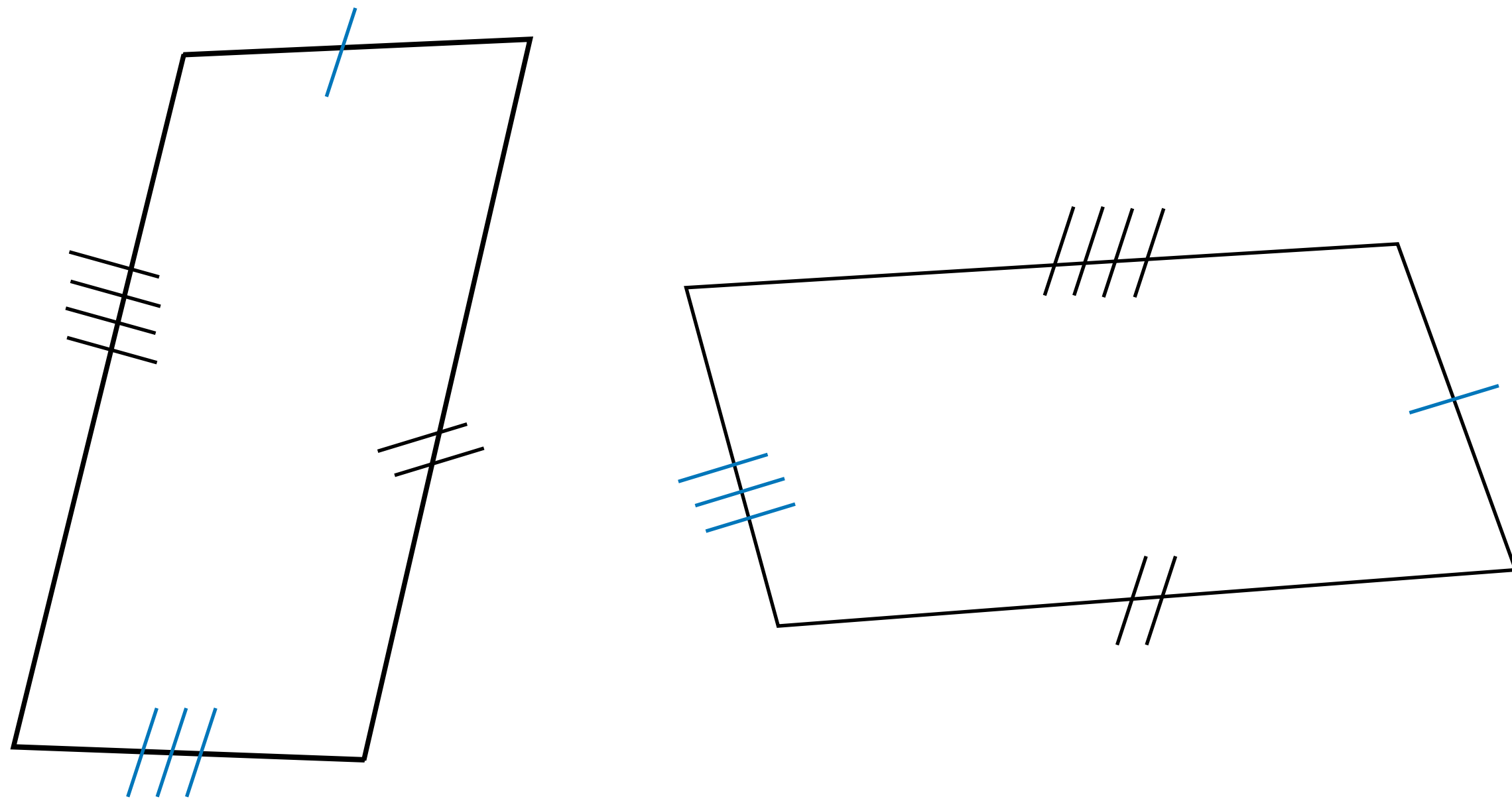
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



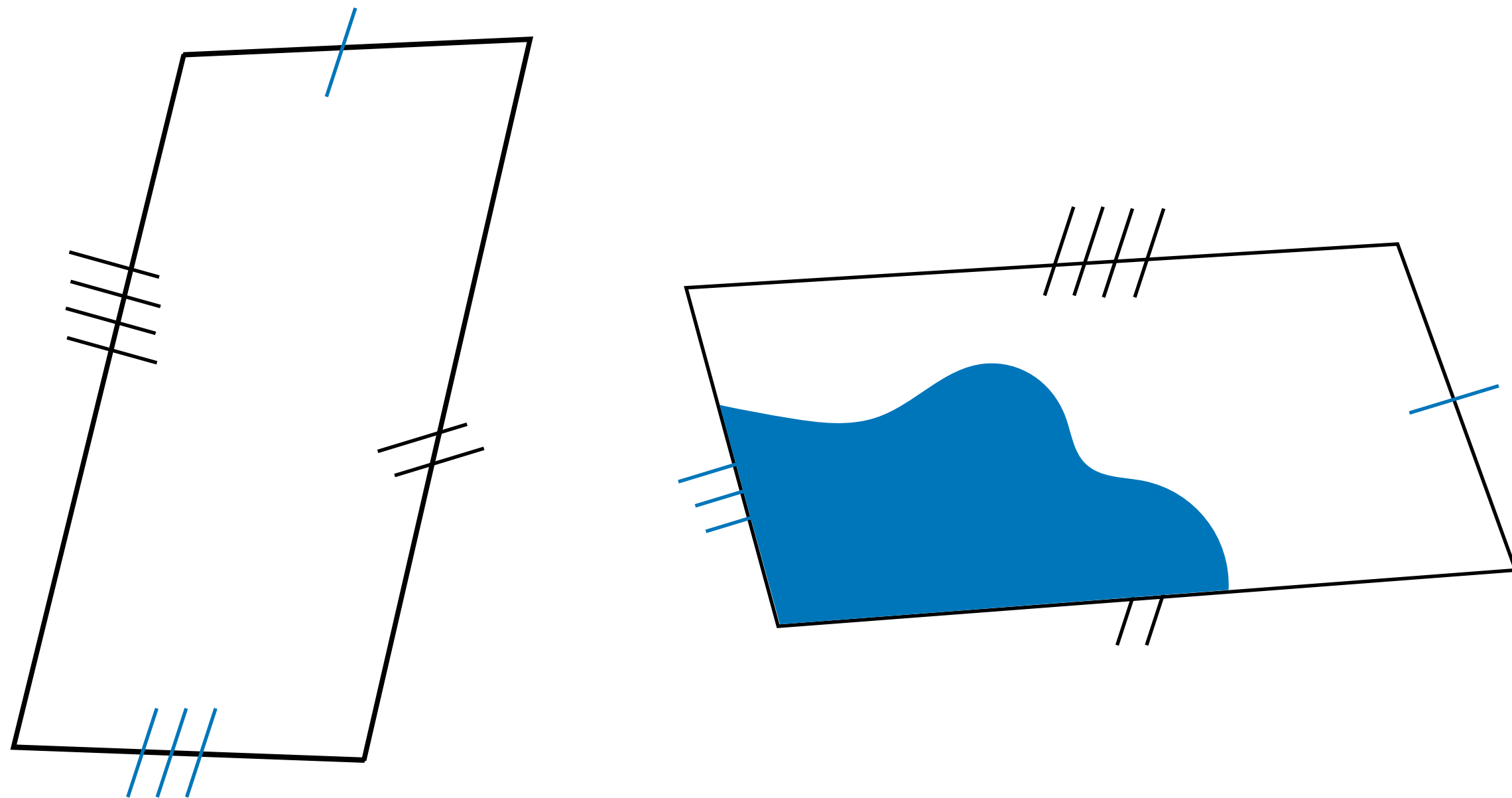
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



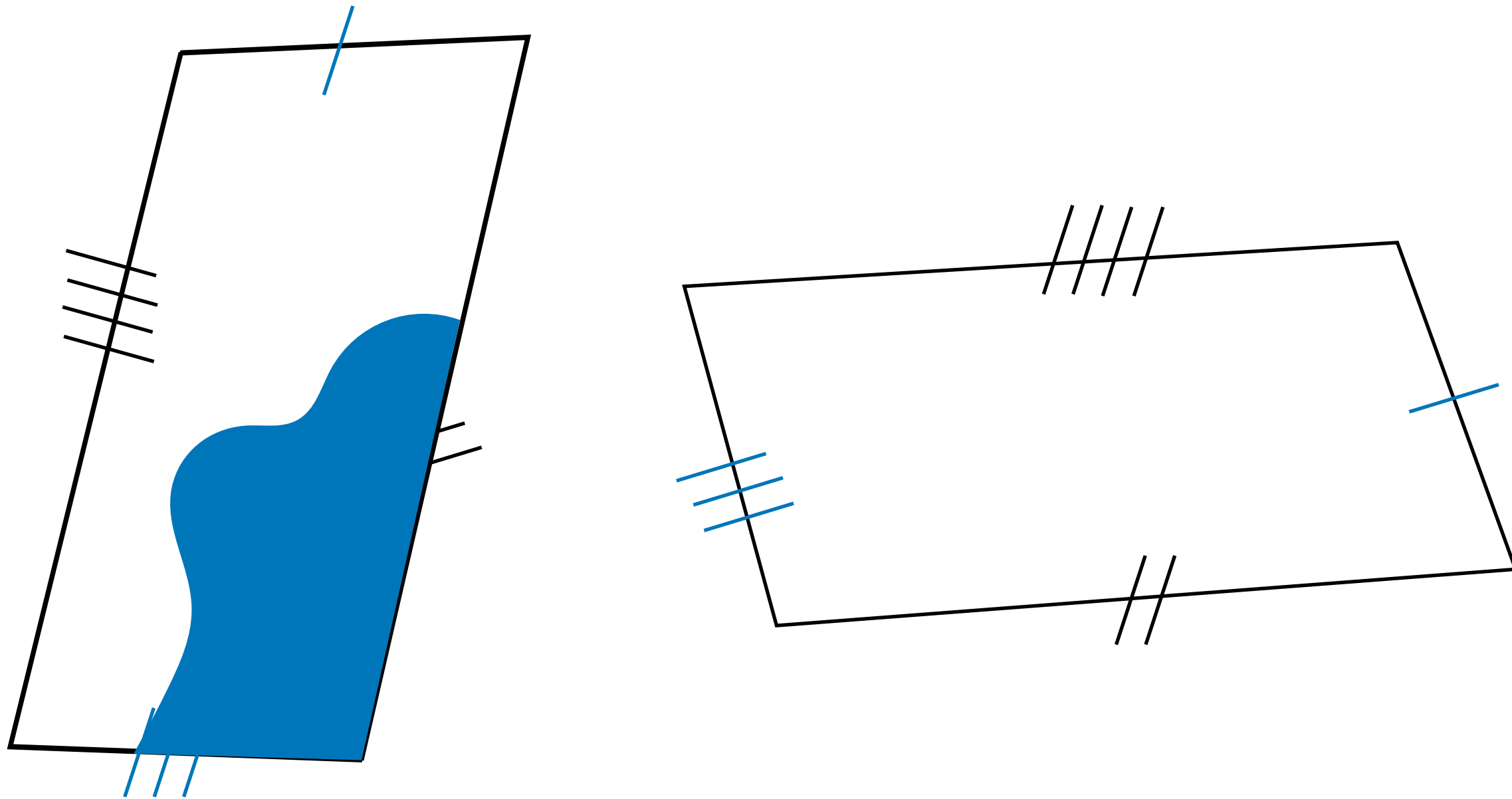
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



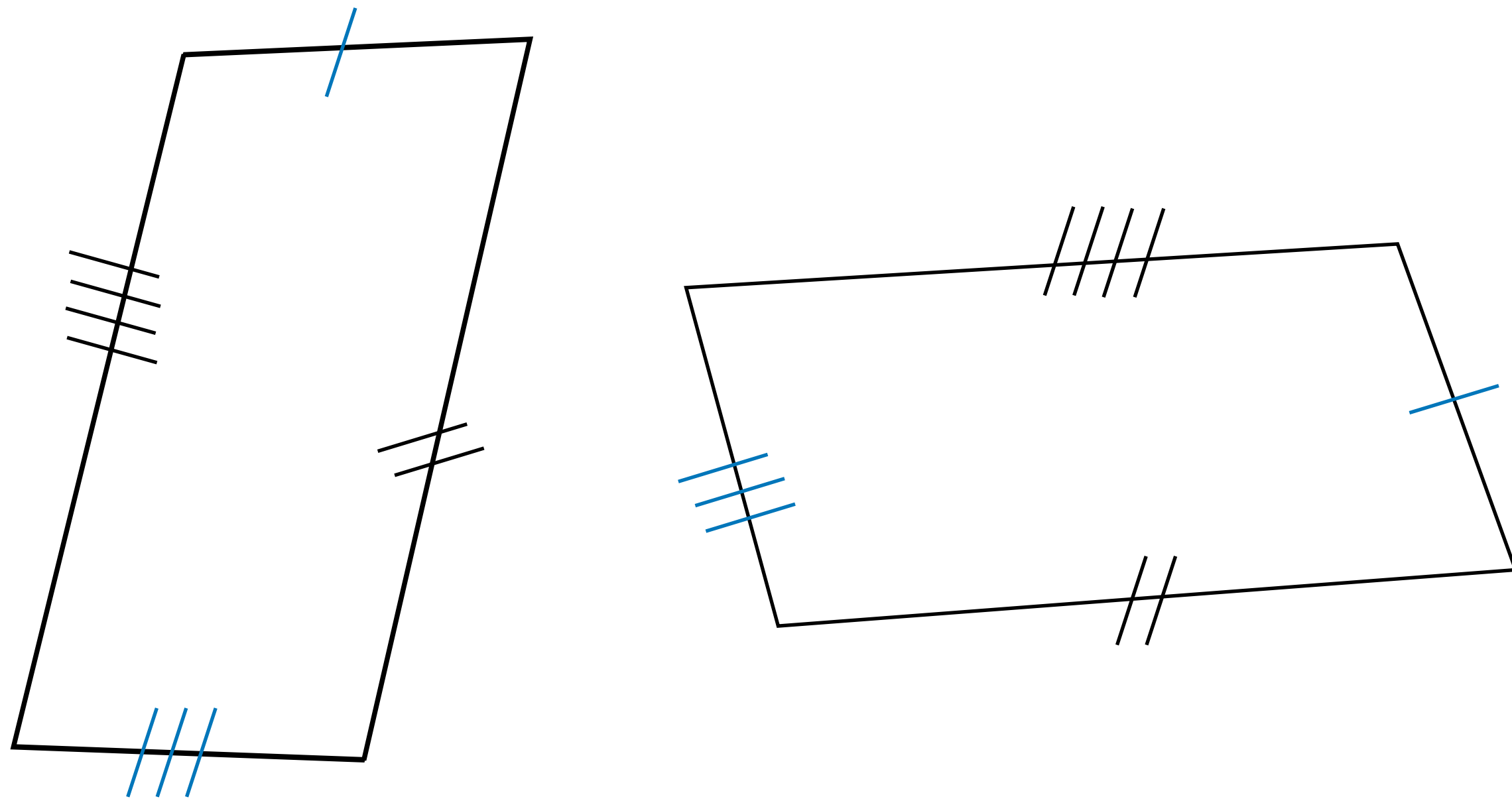
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



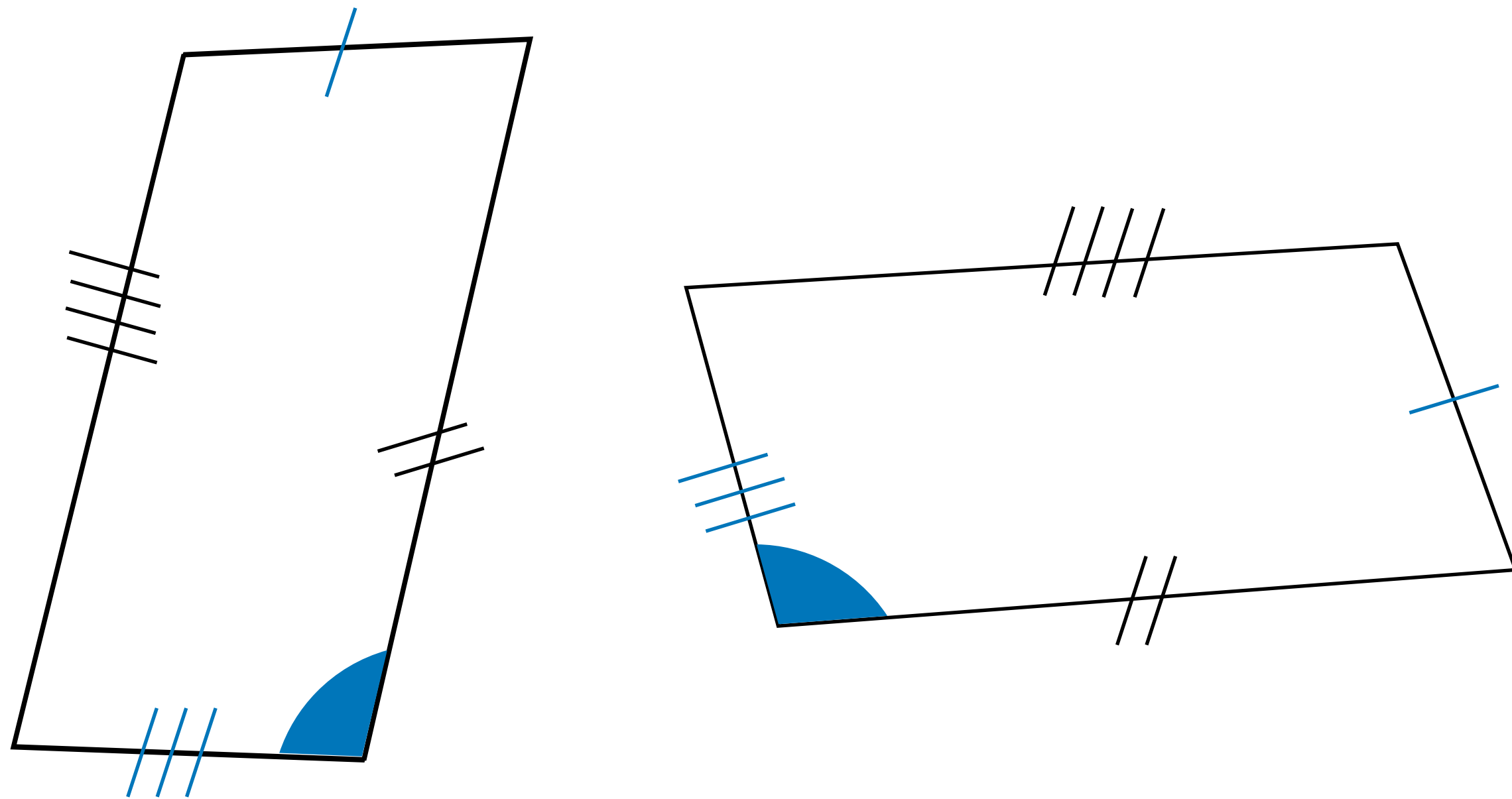
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



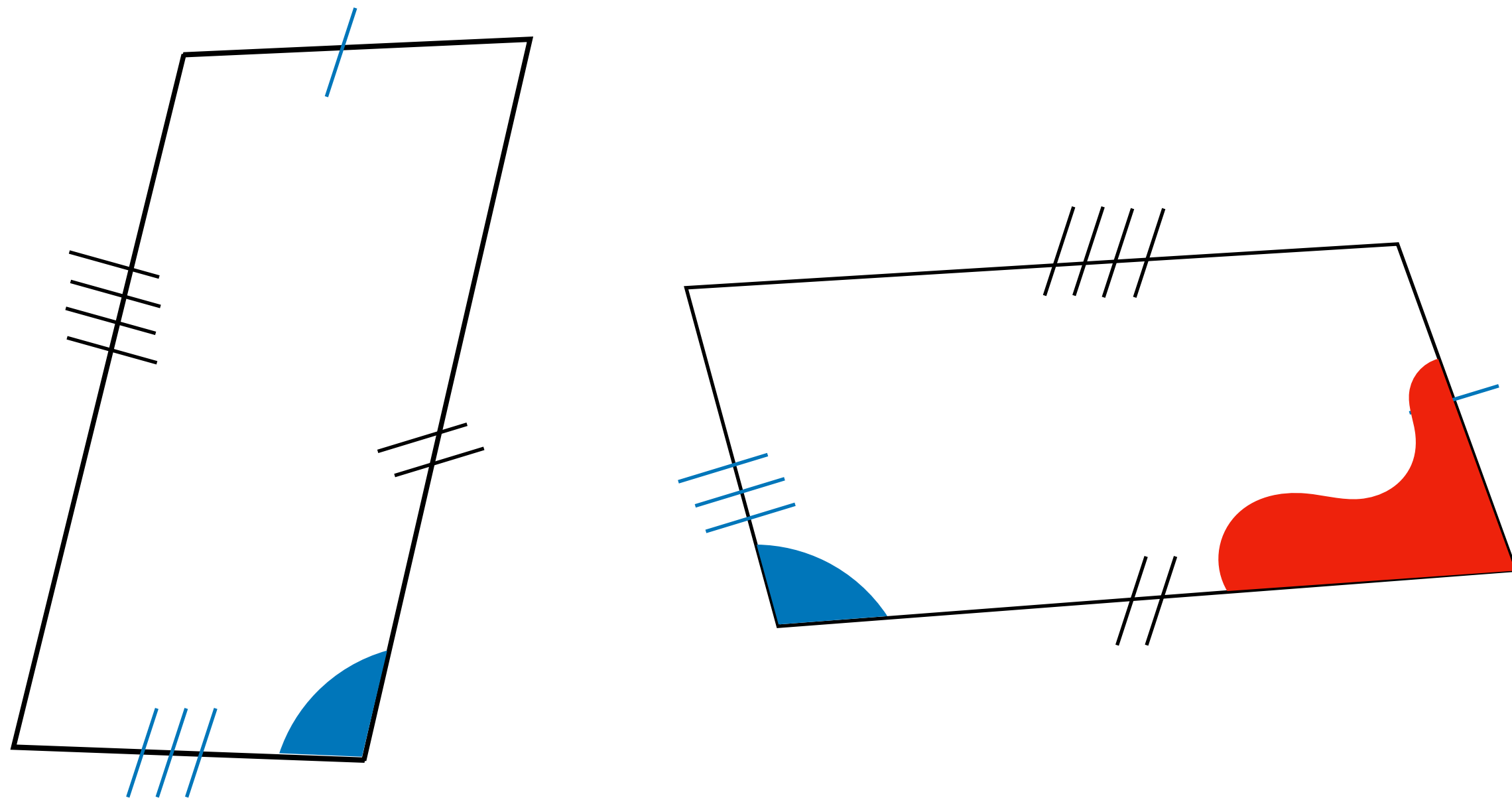
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



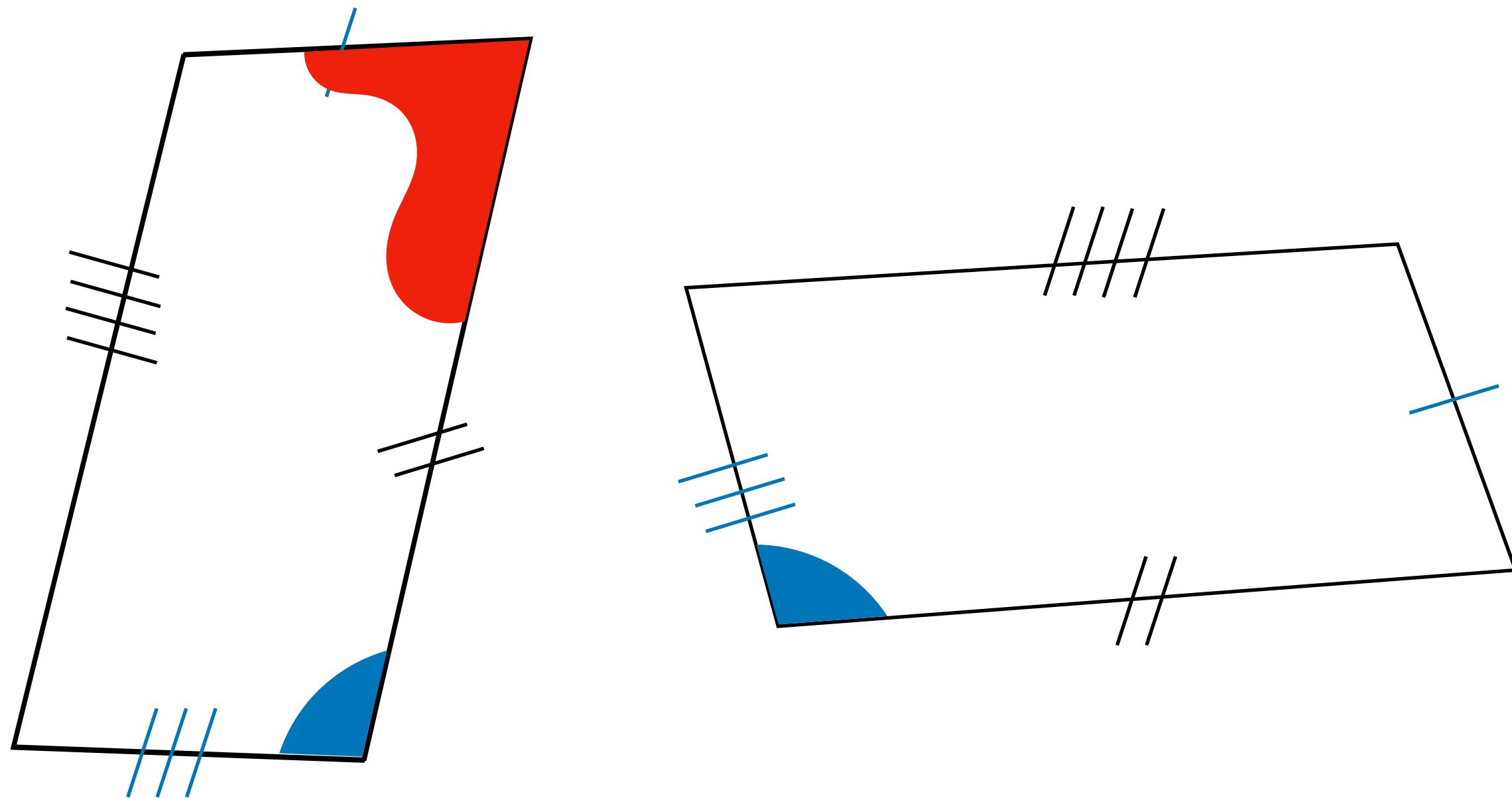
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



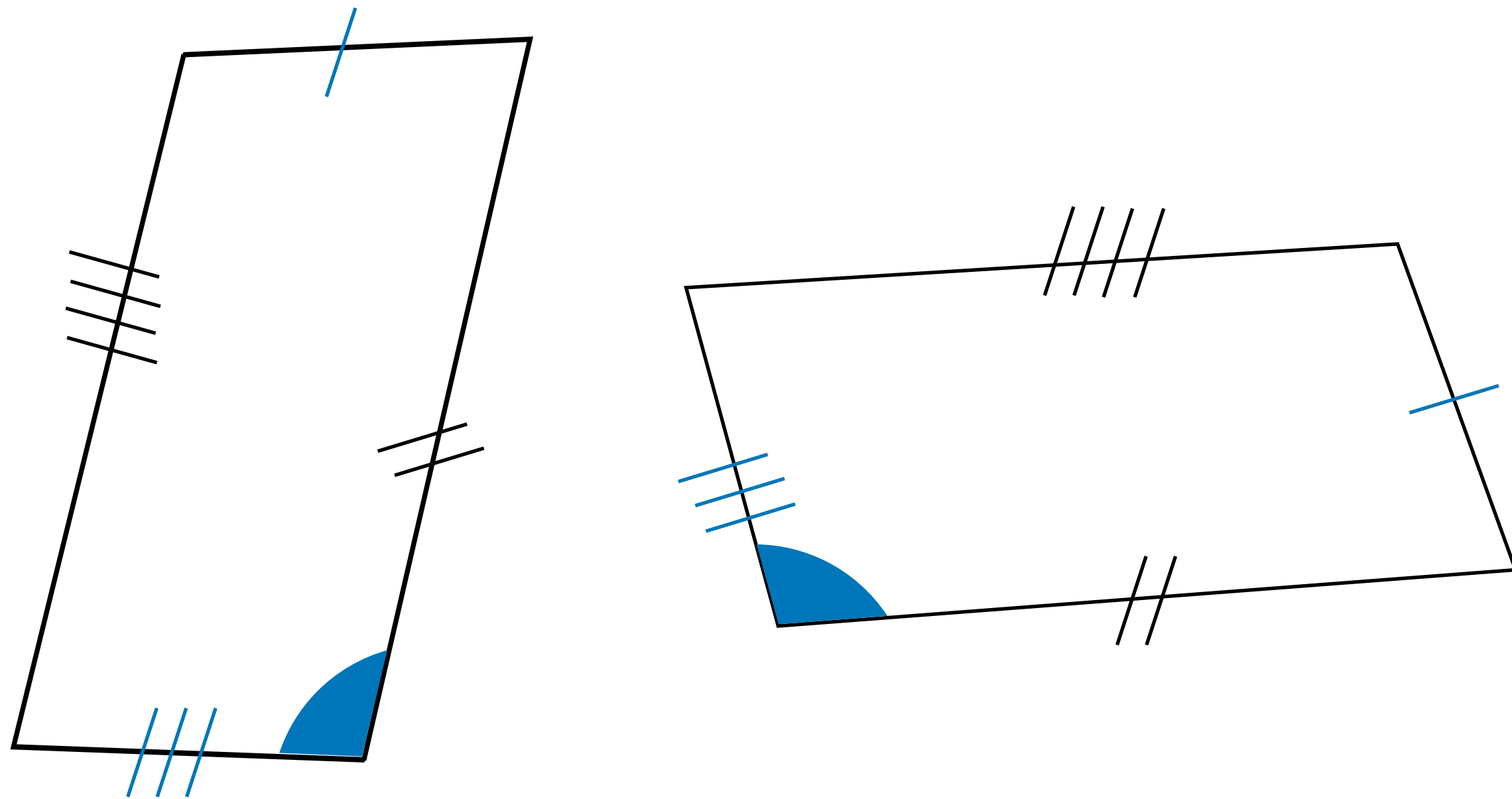
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



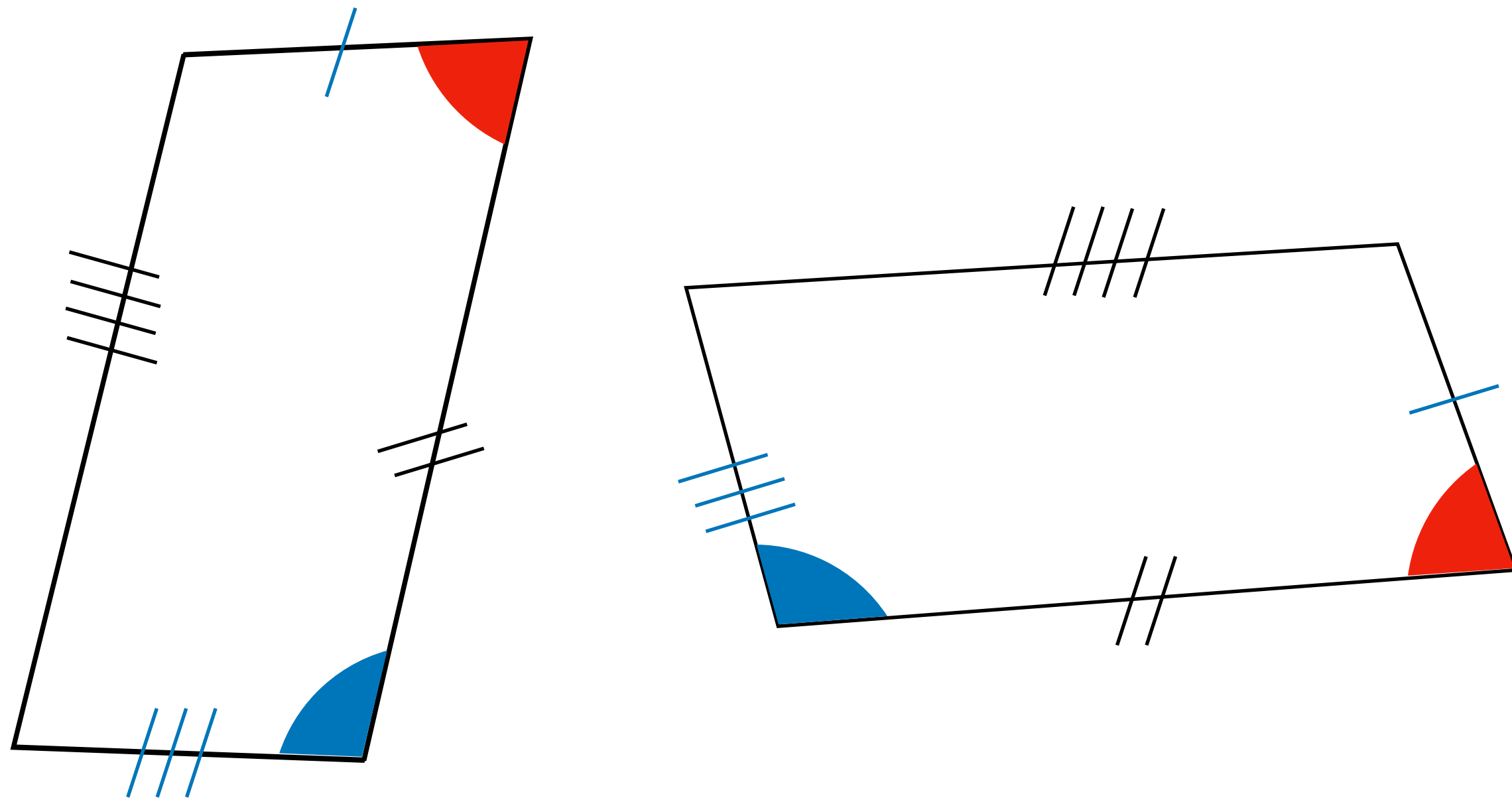
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



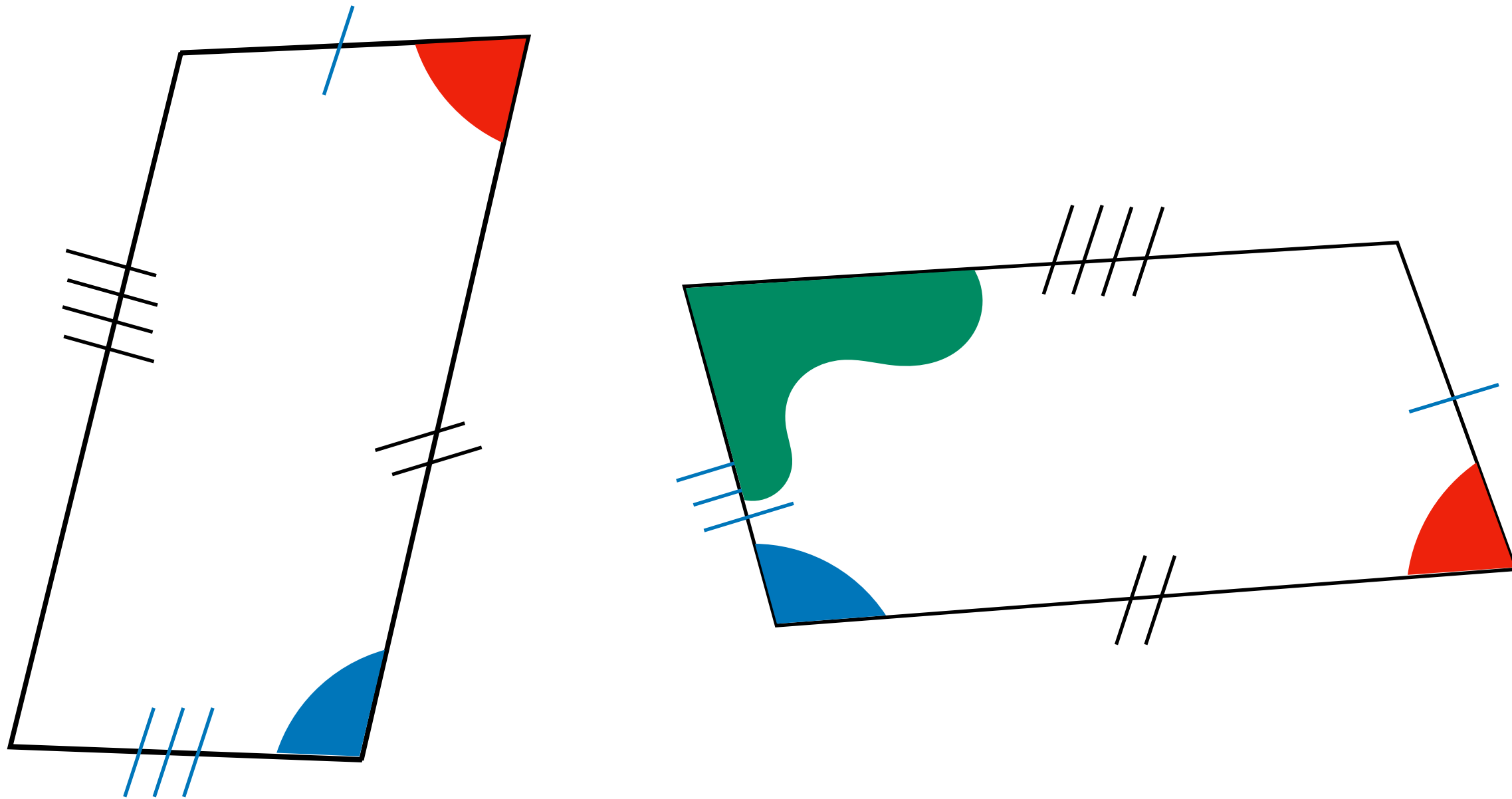
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



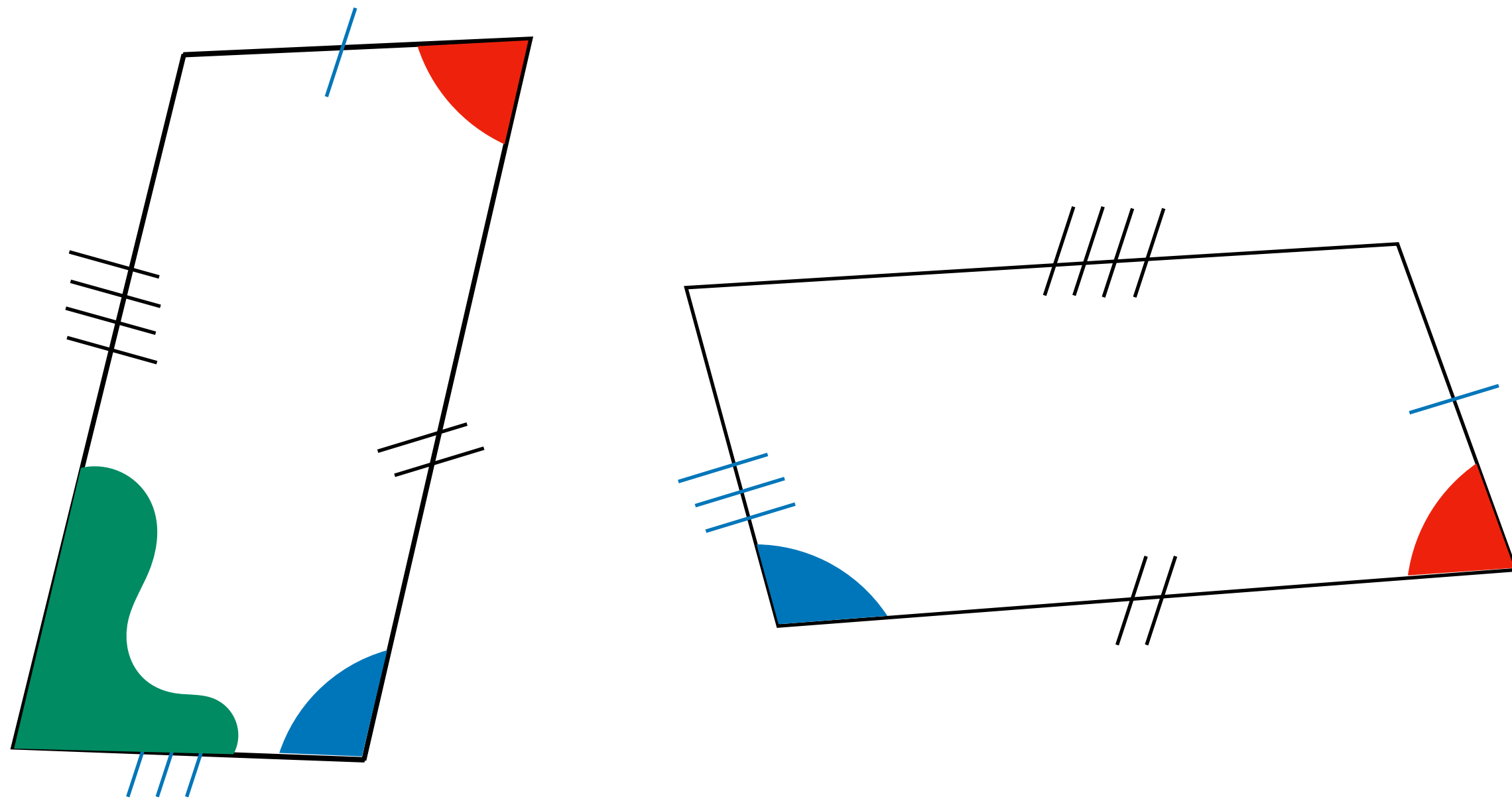
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



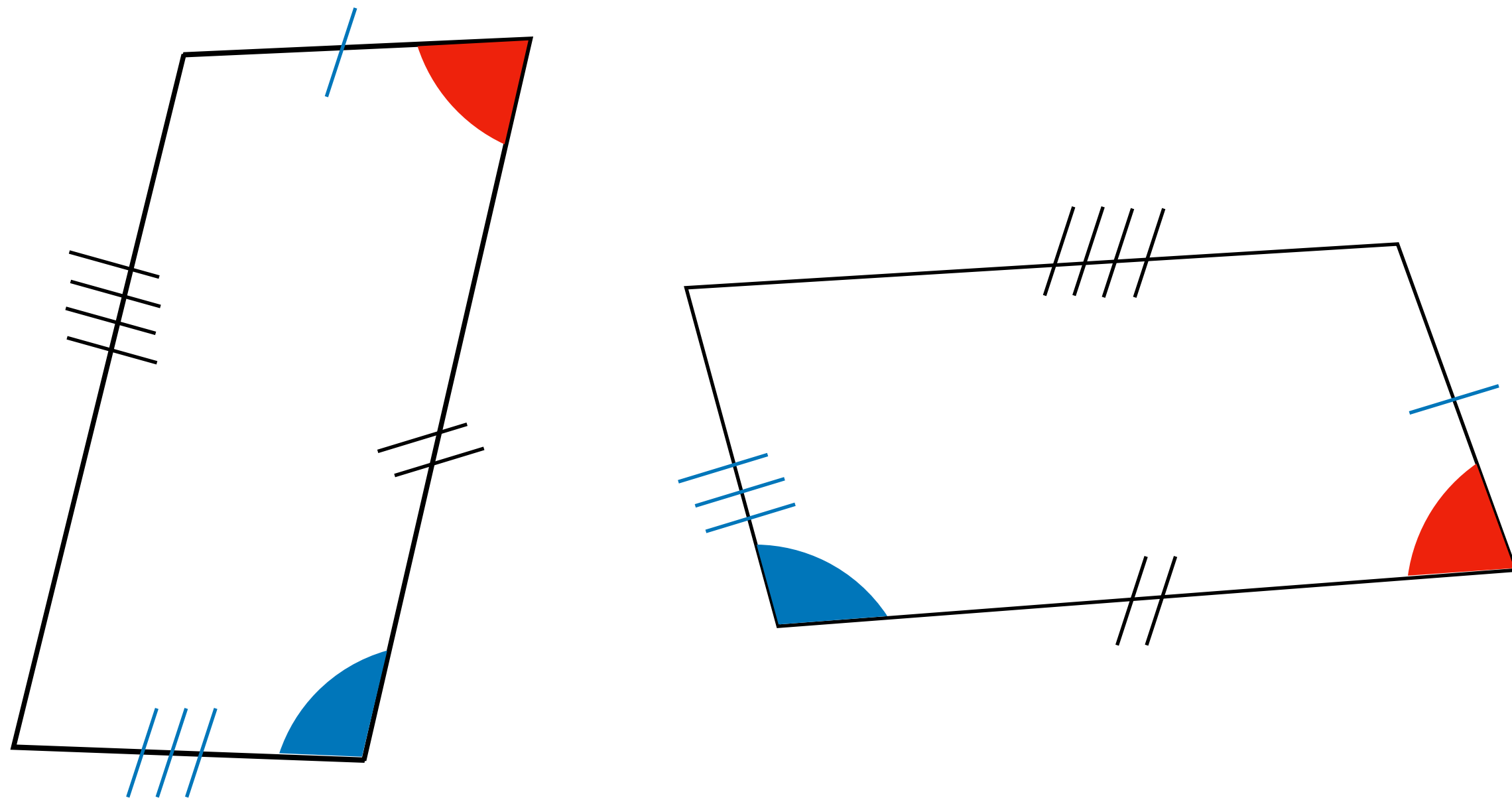
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



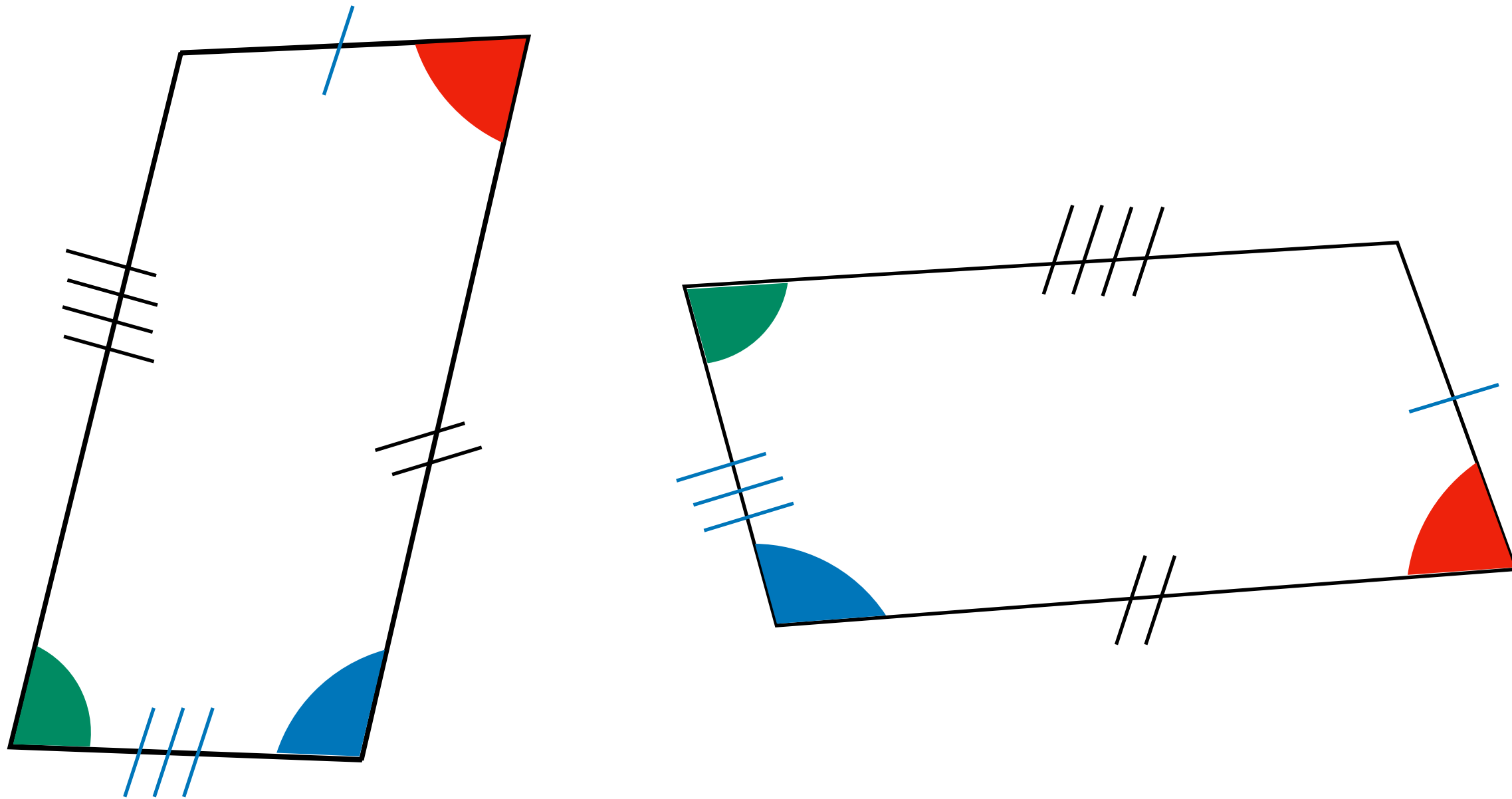
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



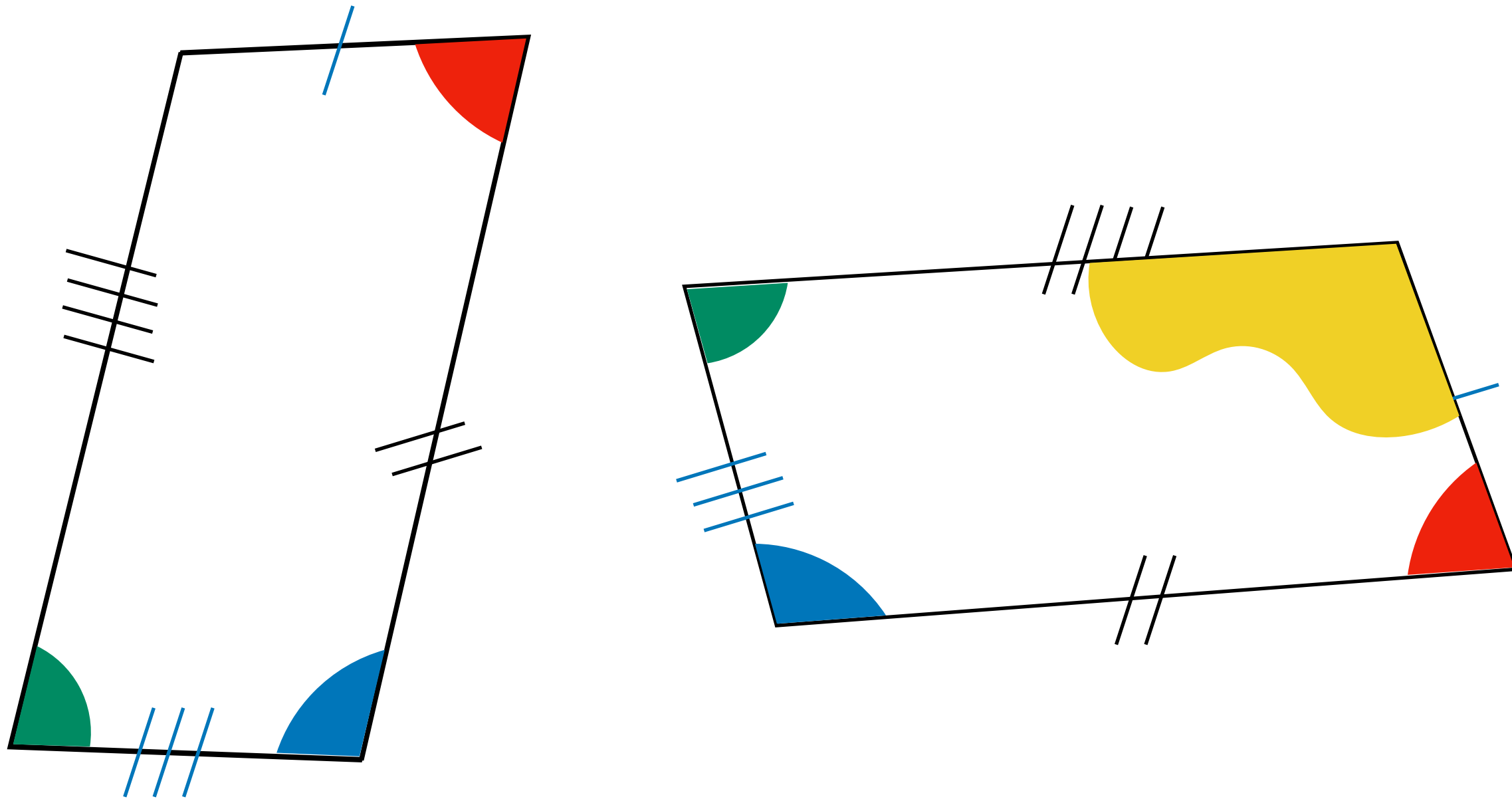
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



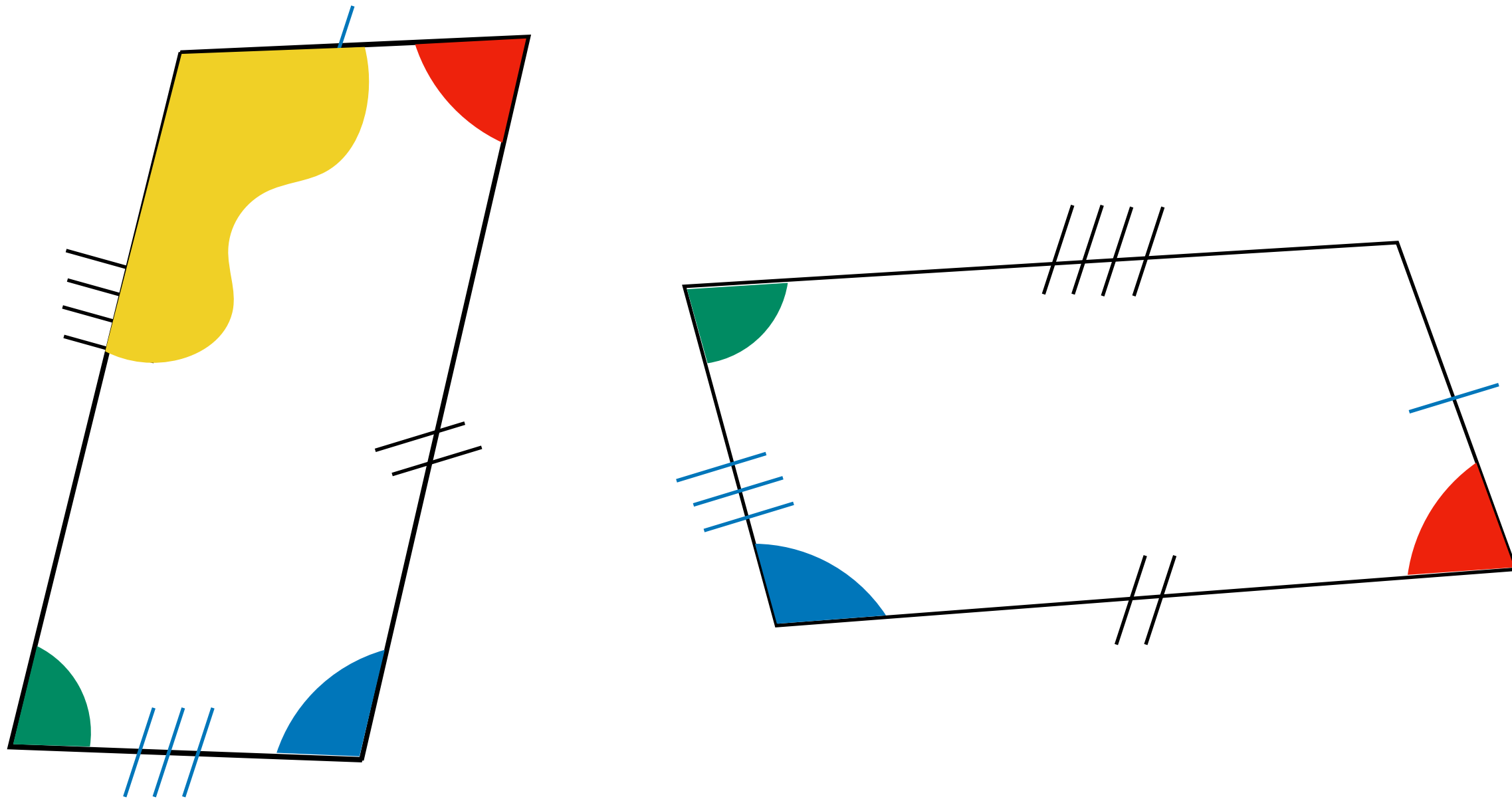
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



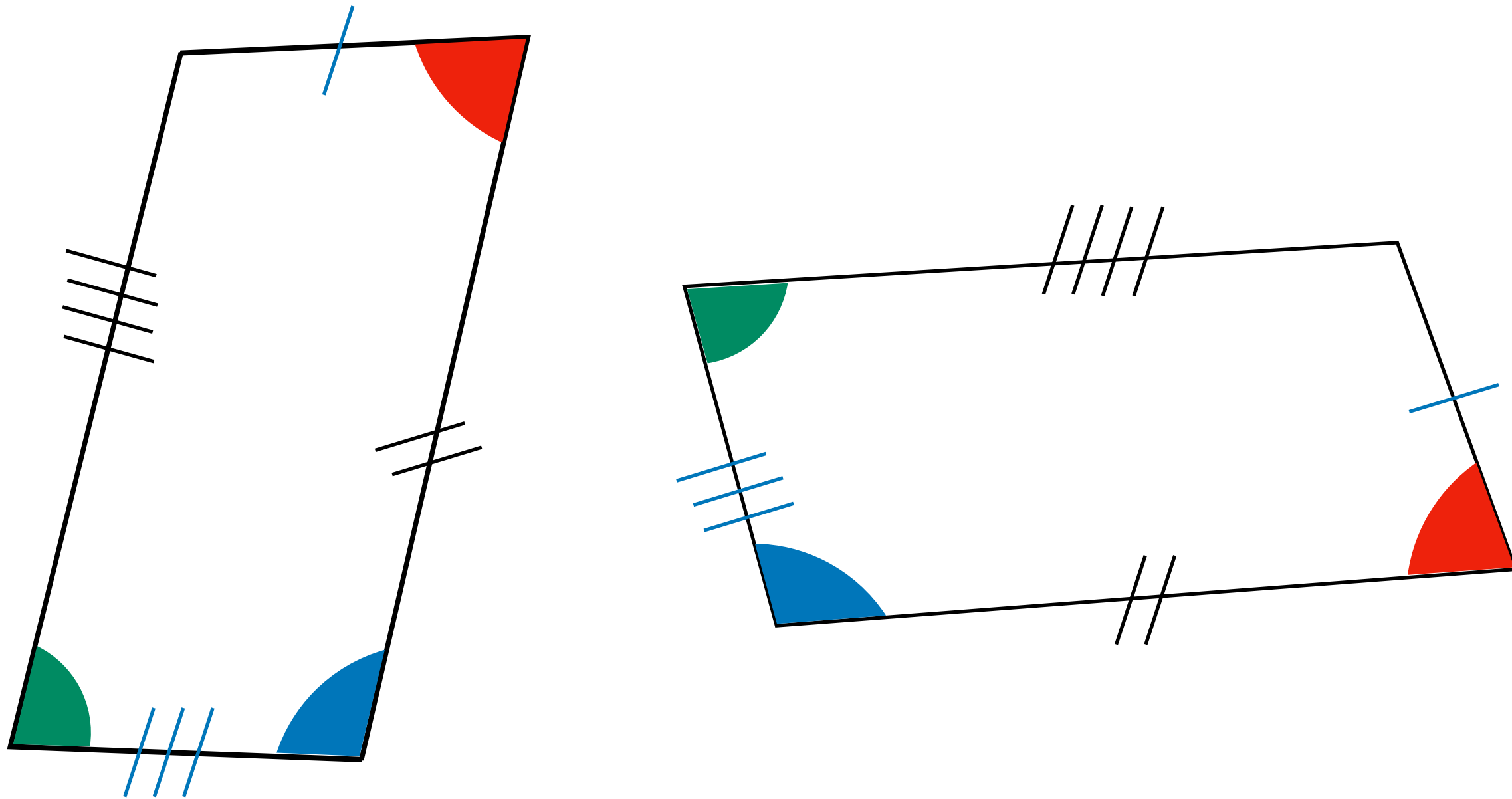
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



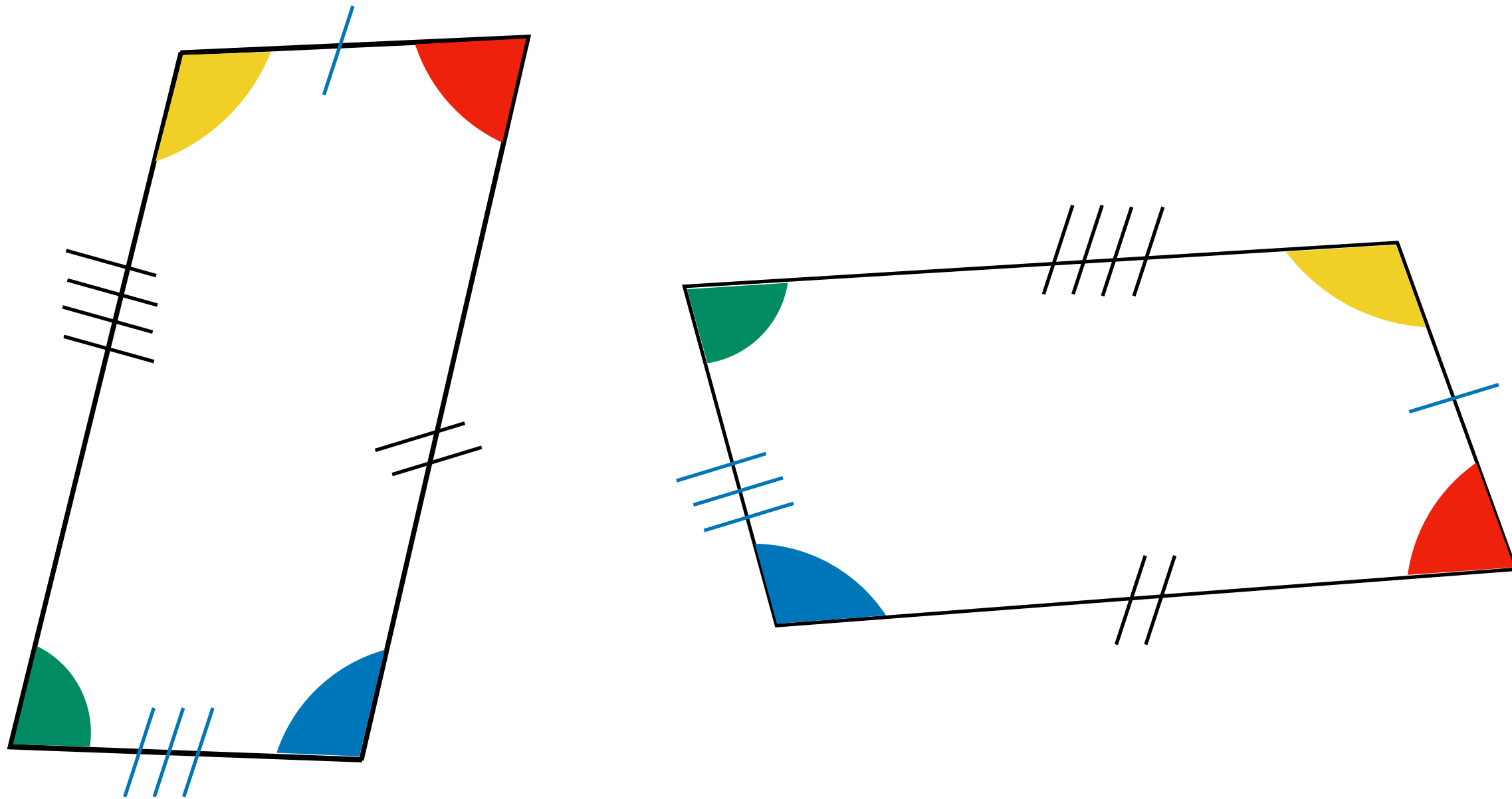
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



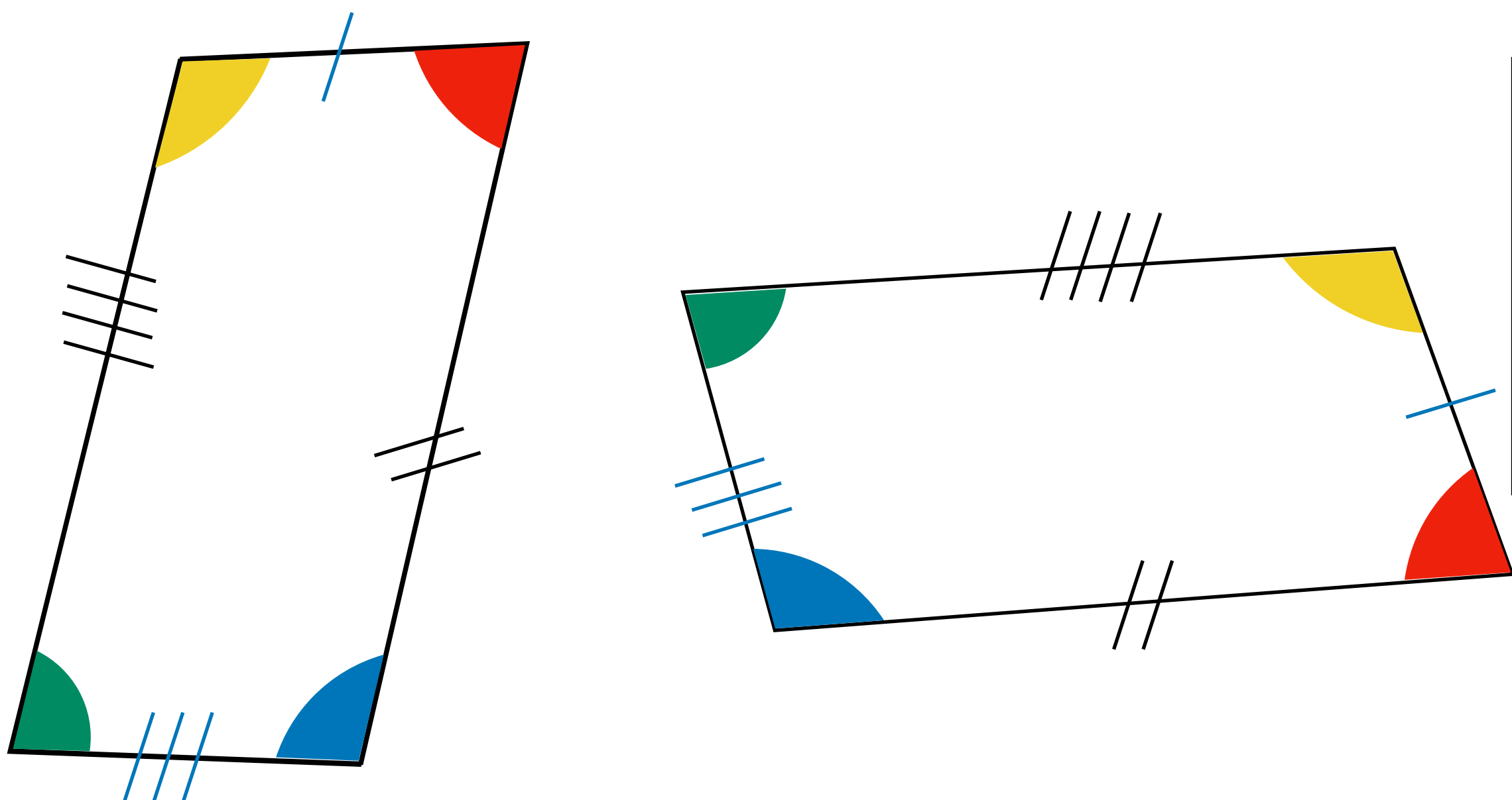
Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.



Procédure possible :

- On compare deux à deux les longueurs des côtés (compas, bande de papier, règle graduée) mais aussi les angles à l'aide de gabarits des angles.

Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?

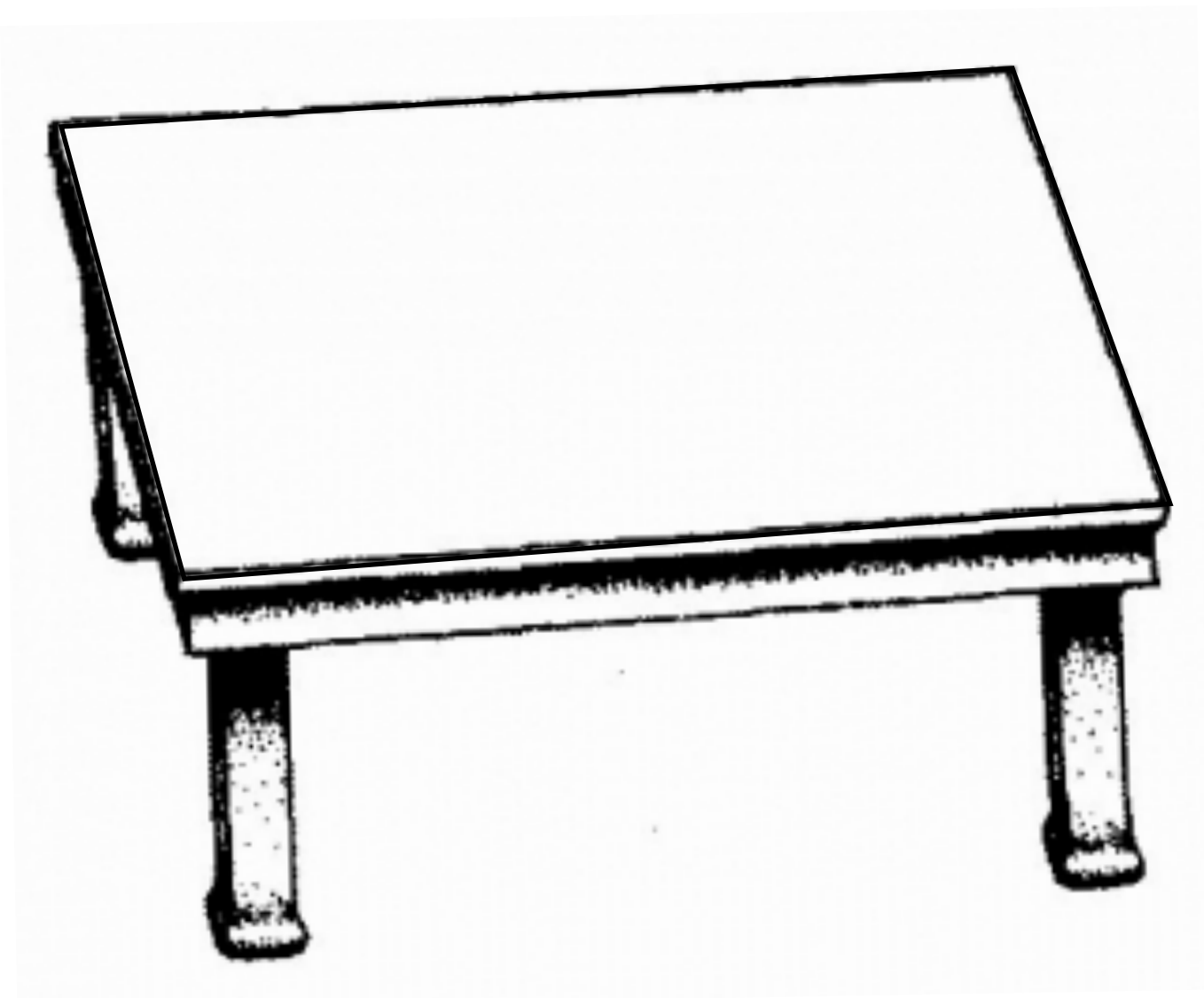
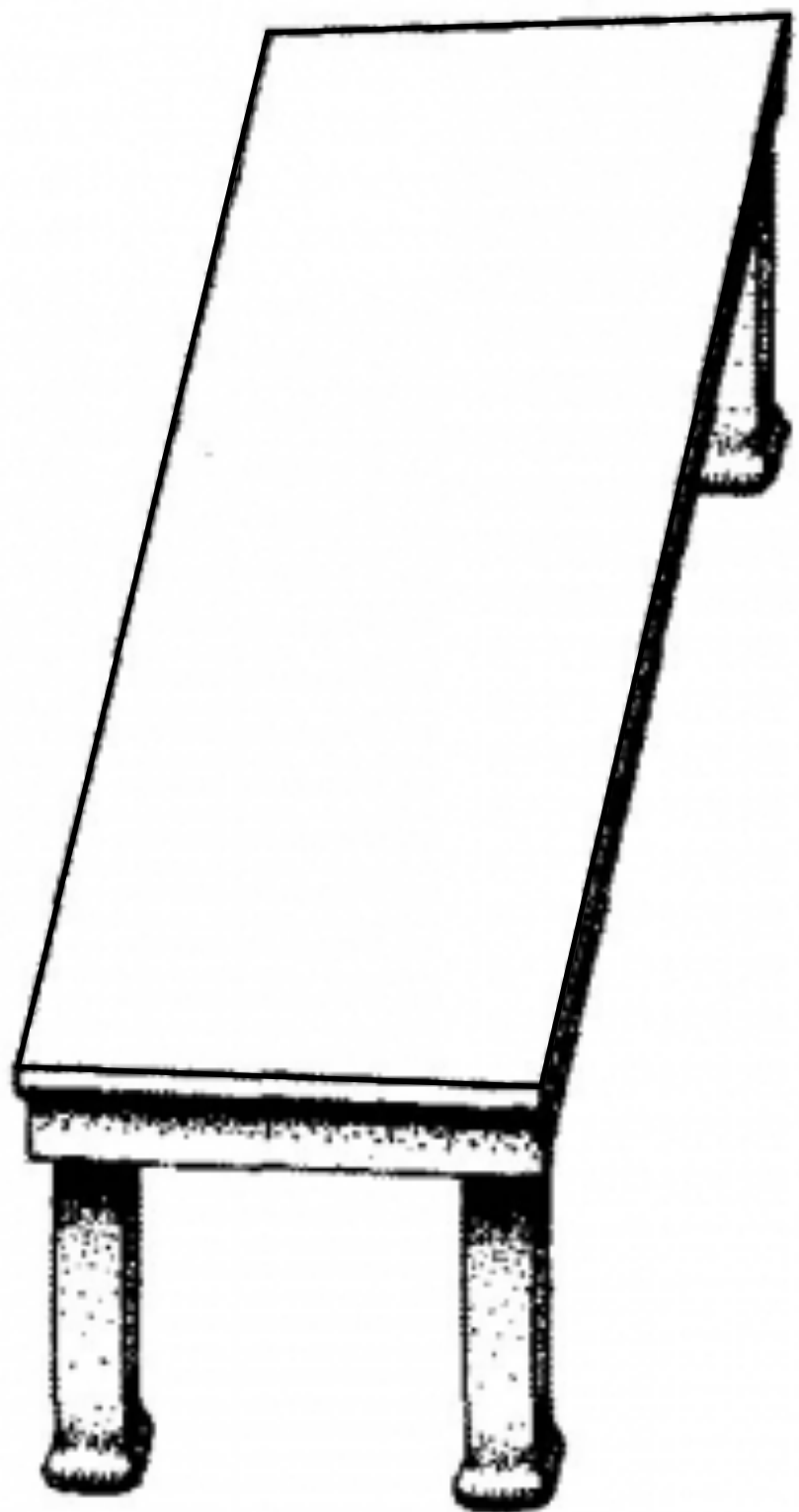
Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.

Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour
augmenter le degré certitude de vos réponses ?



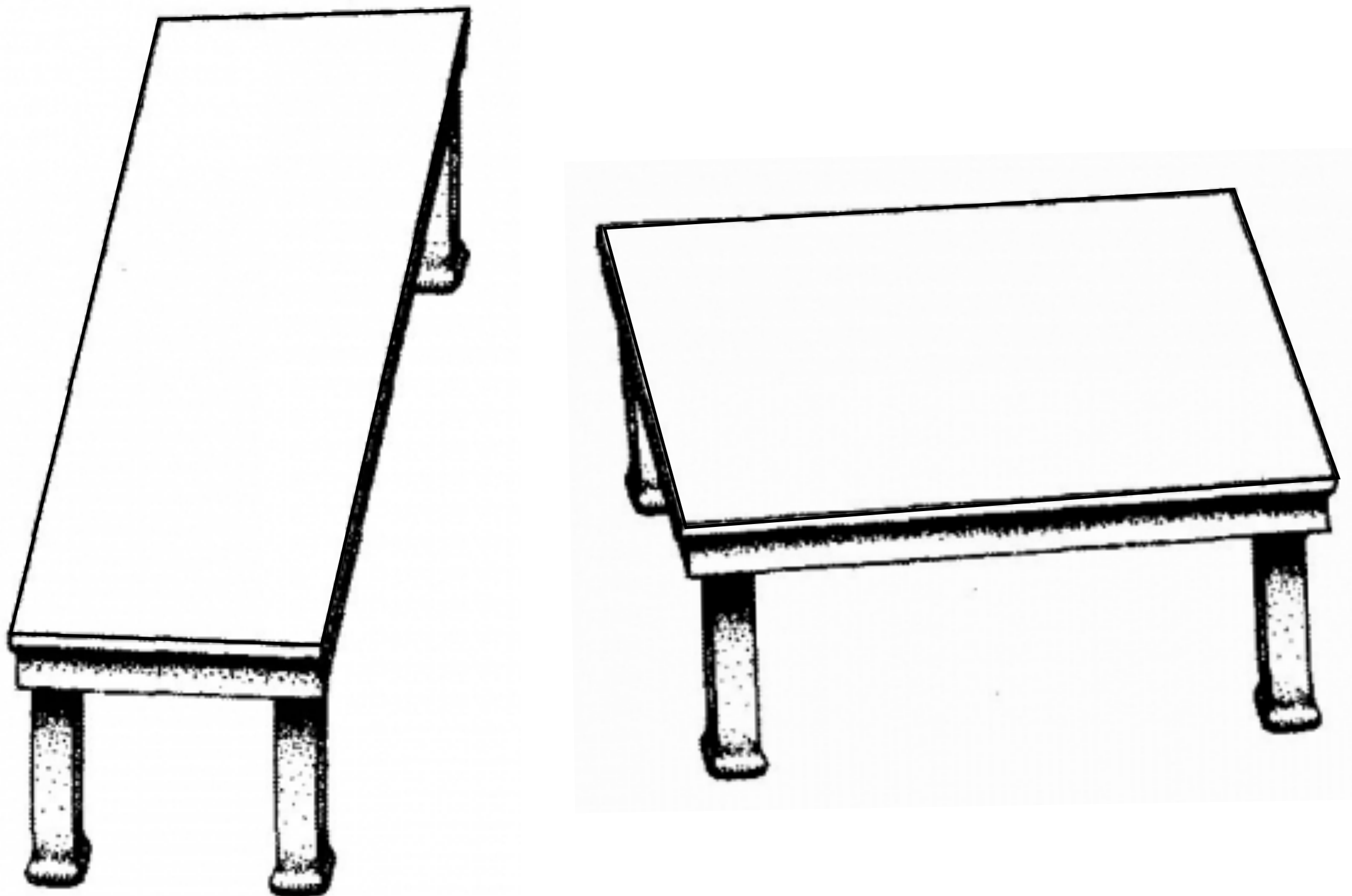
Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.

Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?



Bilan :

- Le rapport perceptif à la géométrie est insuffisant dans certaines situations (illusions d'optique).
- Le rapport instrumenté à la géométrie est un moyen de vérification plus sûr que le rapport perceptif.
- Le rapport instrumenté à la géométrie nécessite de savoir manipuler correctement les instruments de géométrie et de connaître leur(s) usage(s).

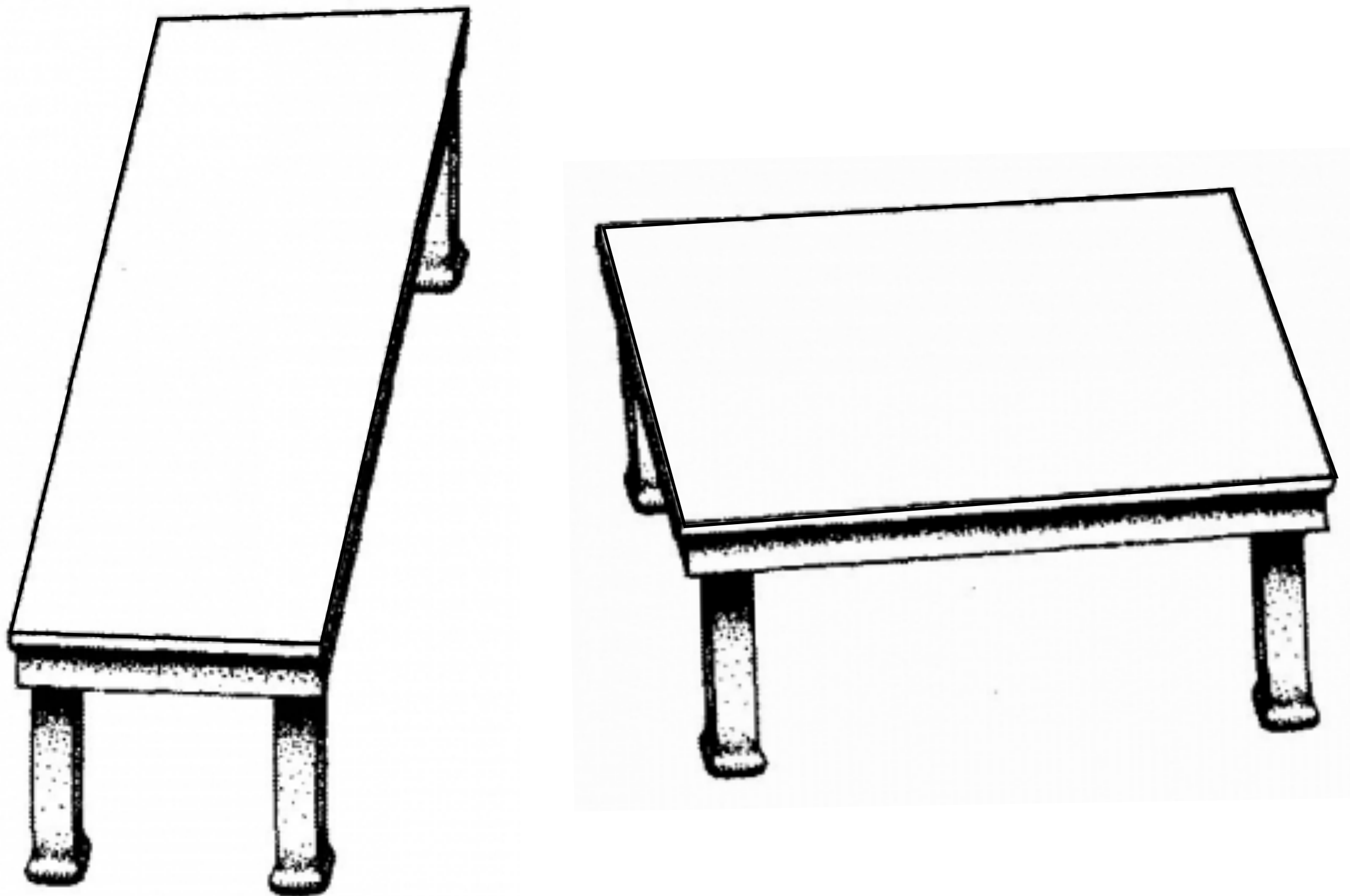
Consigne 3 :

Question 1 :

Comparer ces plateaux.

Question 2 :

Que proposez-vous de faire pour augmenter le degré certitude de vos réponses ?



Pourquoi ne vous a-t-on pas donné immédiatement un support papier ?

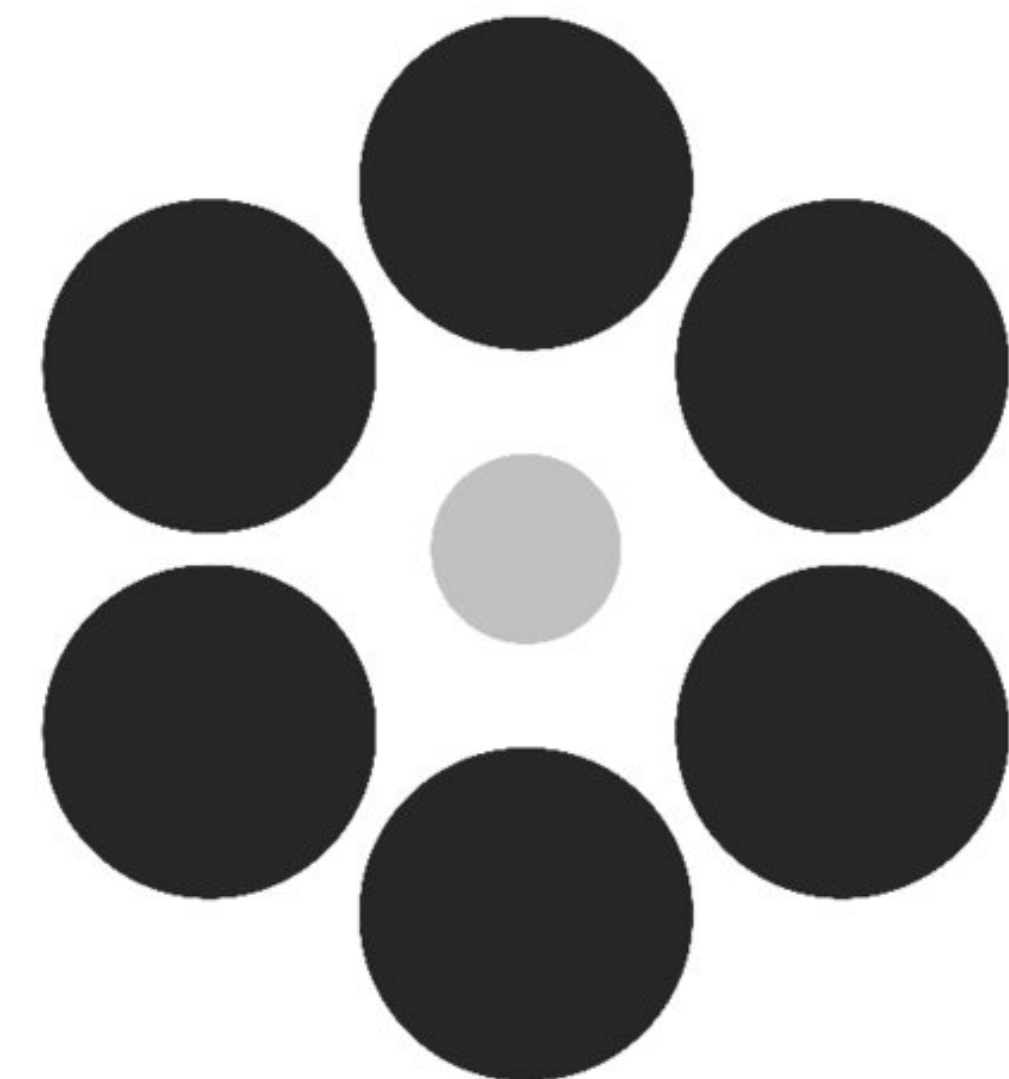
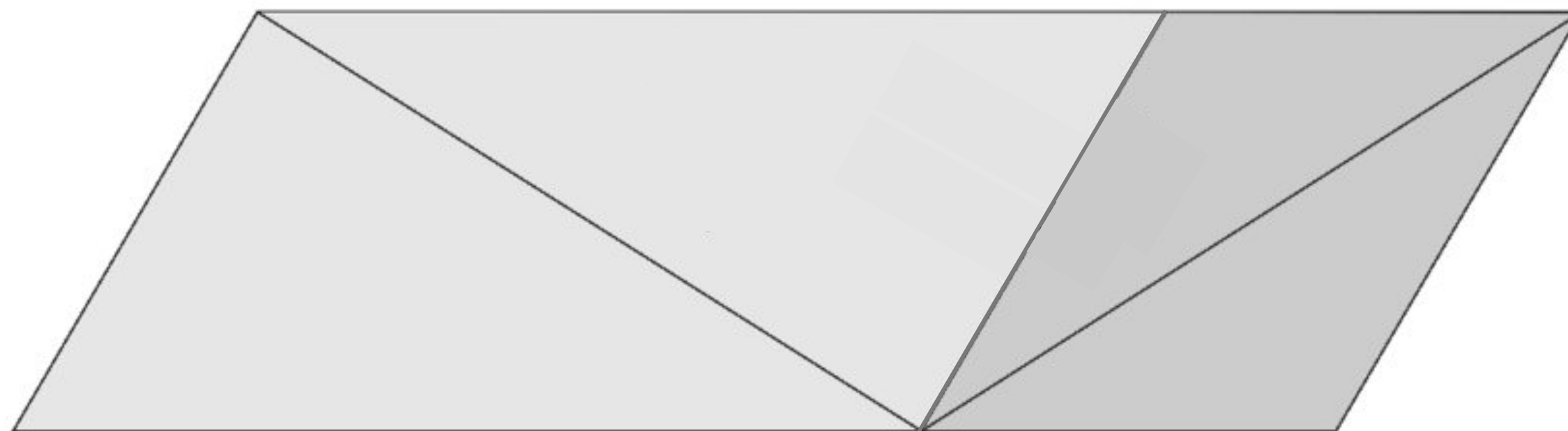
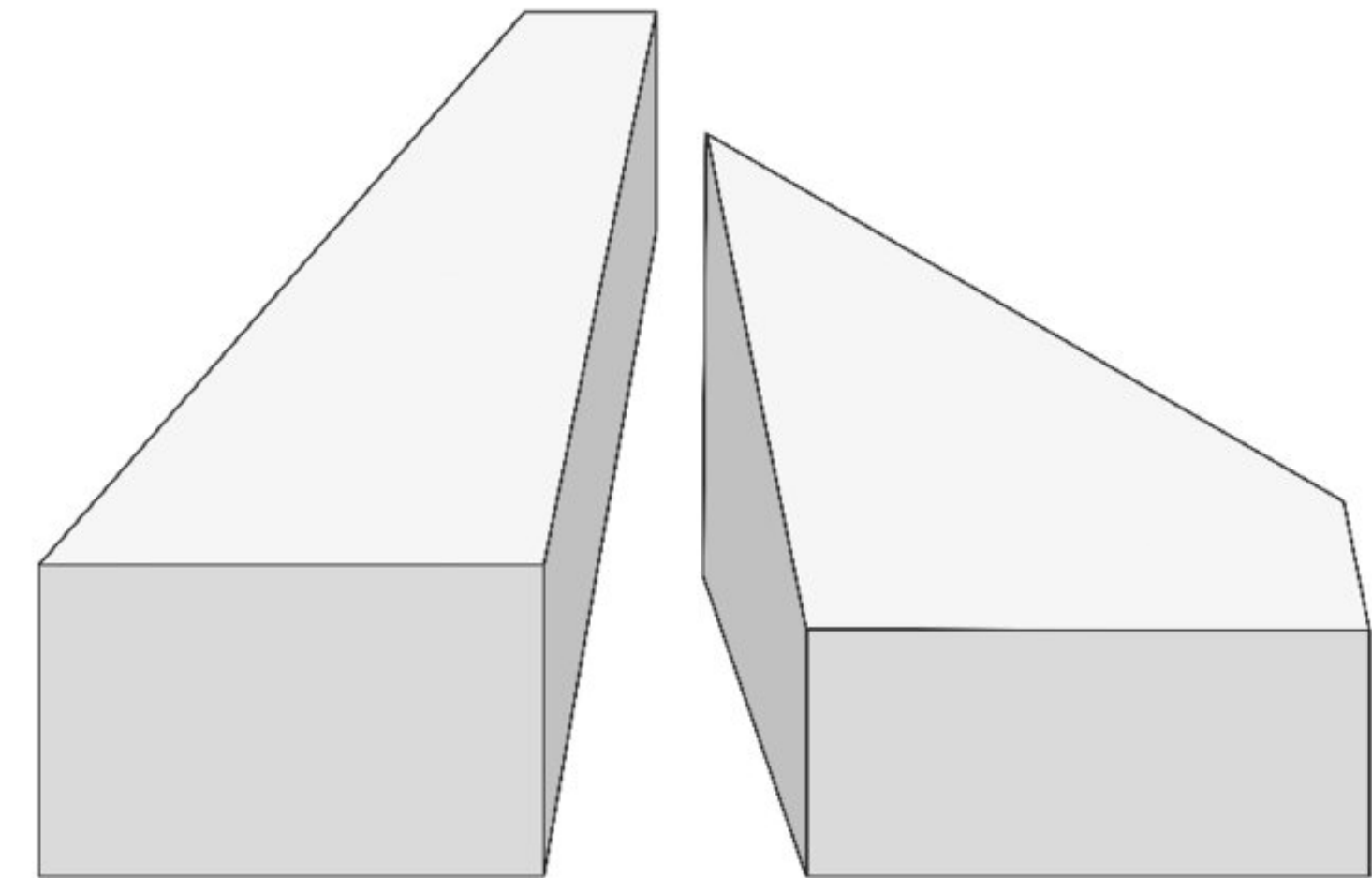
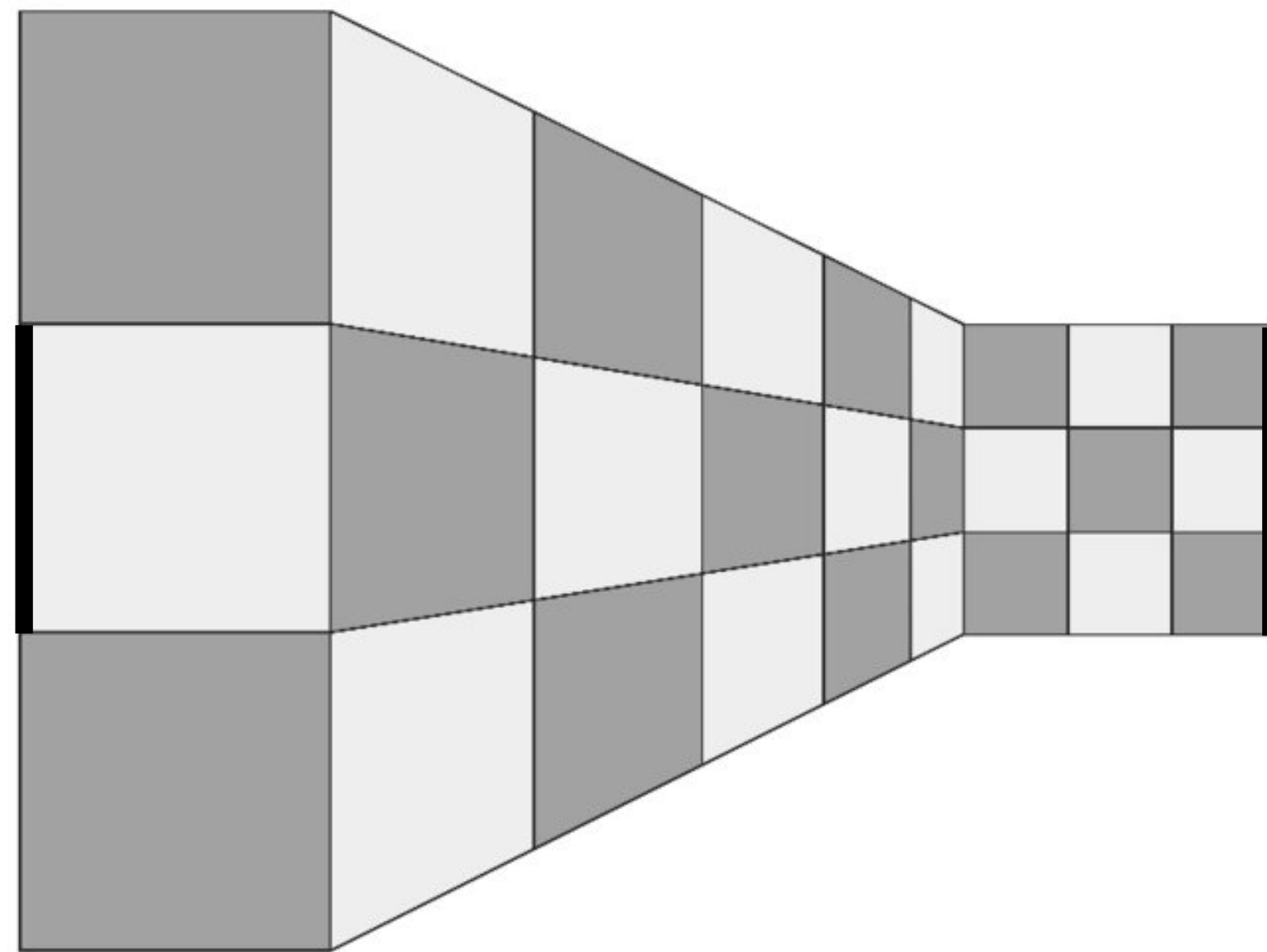
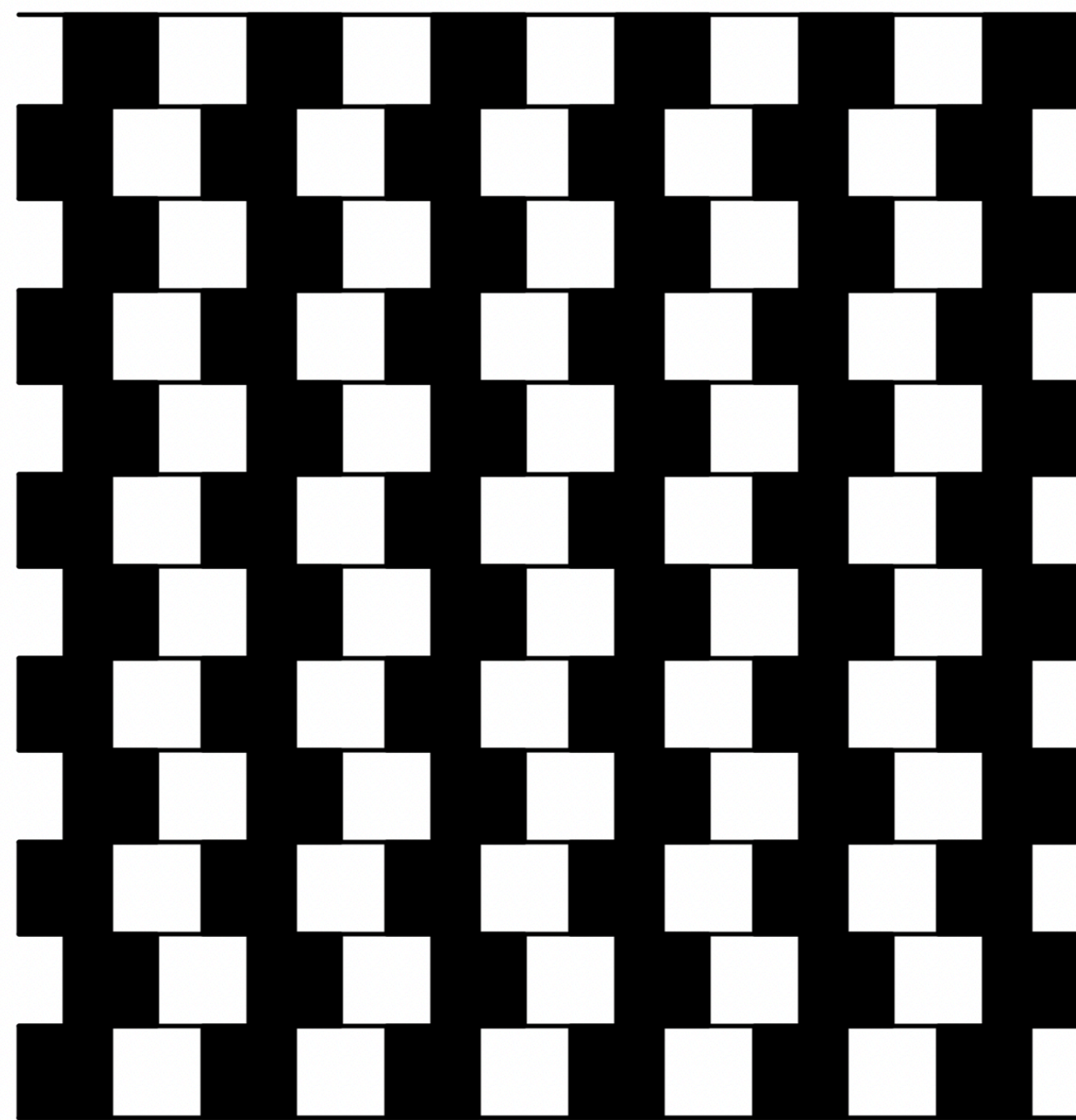
Pour prendre conscience des limites de nos sens (ici, la vue)

Bilan :

- Le rapport perceptif à la géométrie est insuffisant dans certaines situations (illusions d'optique).
- Le rapport instrumenté à la géométrie est un moyen de vérification plus sûr que le rapport perceptif.
- Le rapport instrumenté à la géométrie nécessite de savoir manipuler correctement les instruments de géométrie et de connaître leur(s) usage(s).

Montrer que nos sens ne suffisent pas

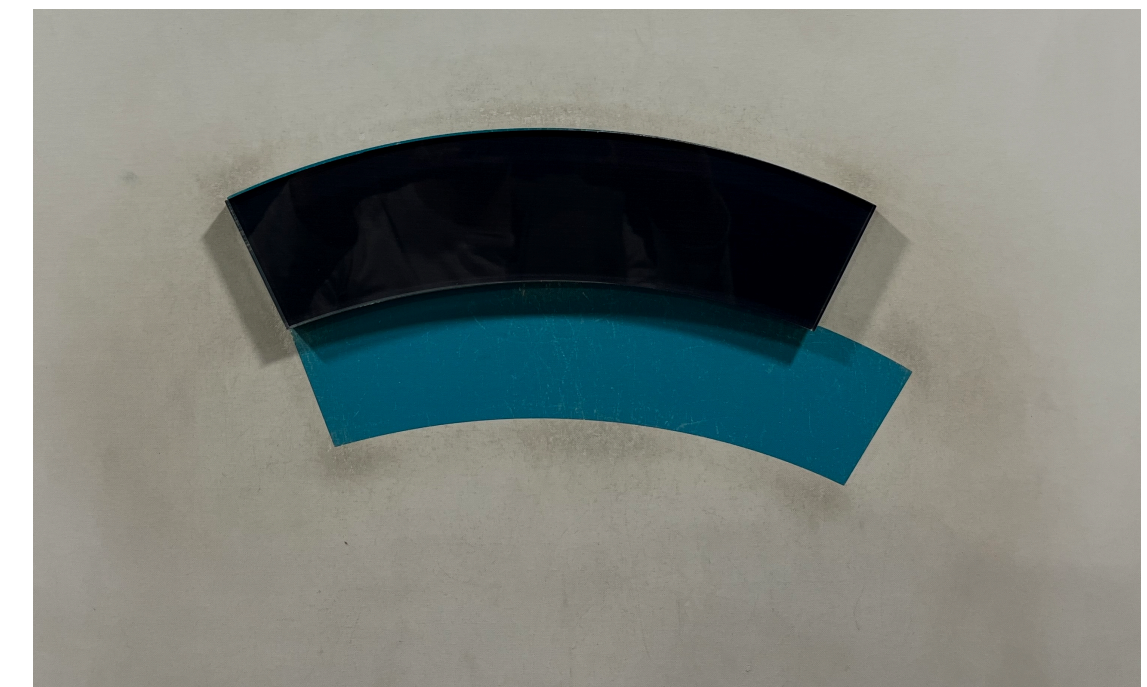
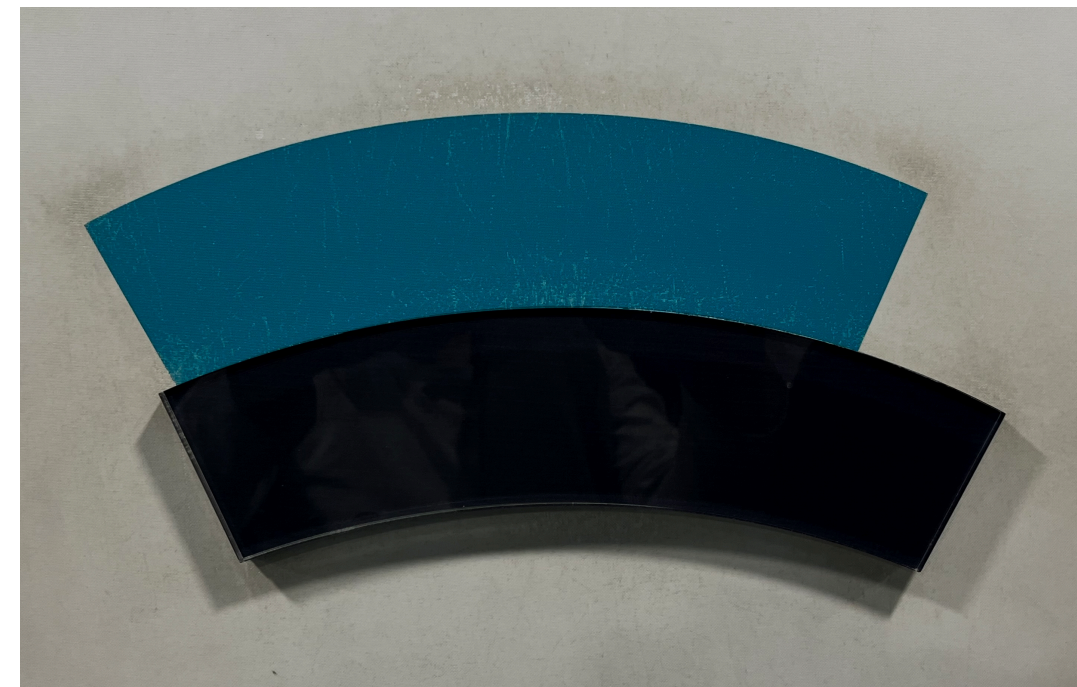
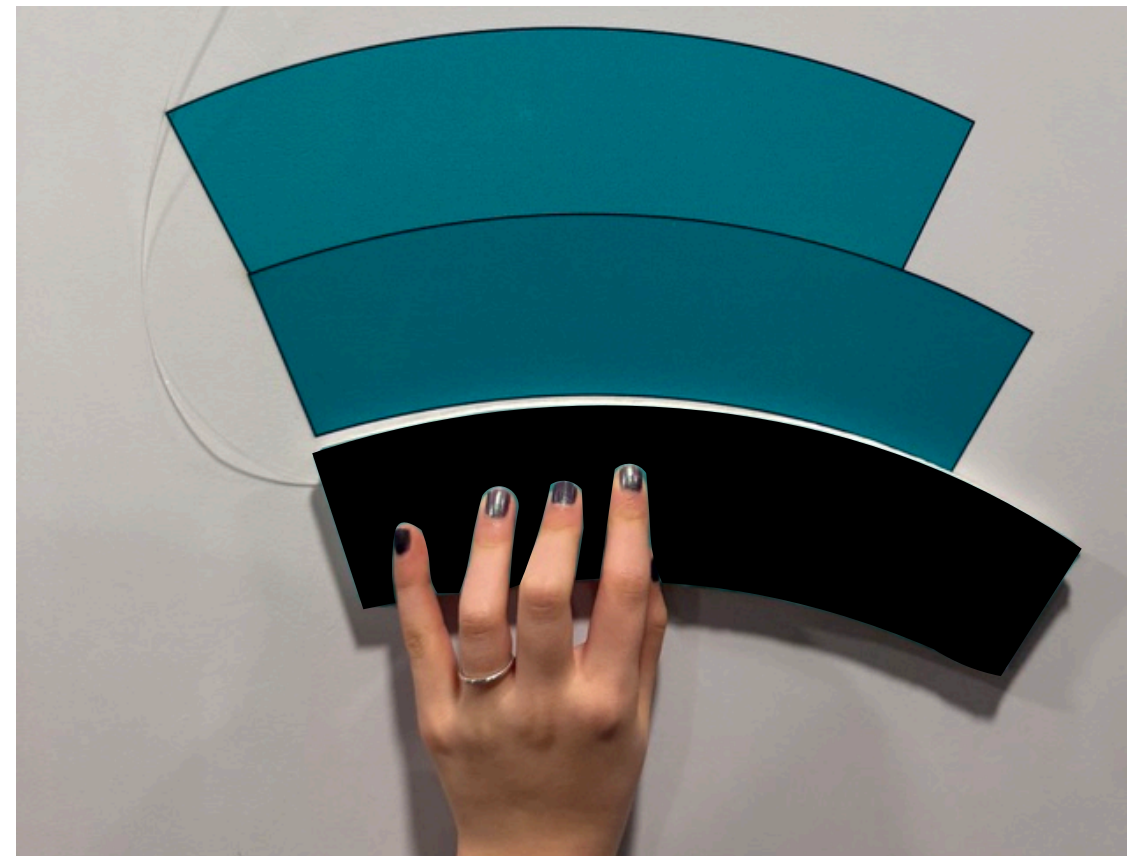
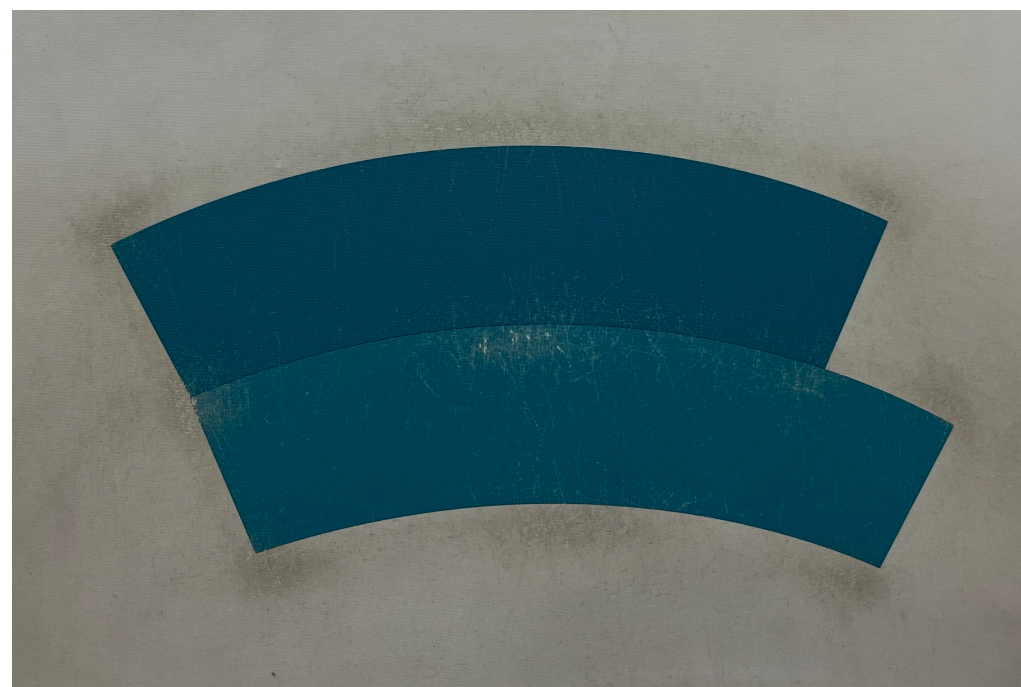
Banque d'illusions :



Illusion de Tichener

Montrer que nos sens ne suffisent pas

Une visite au musée de l'illusion

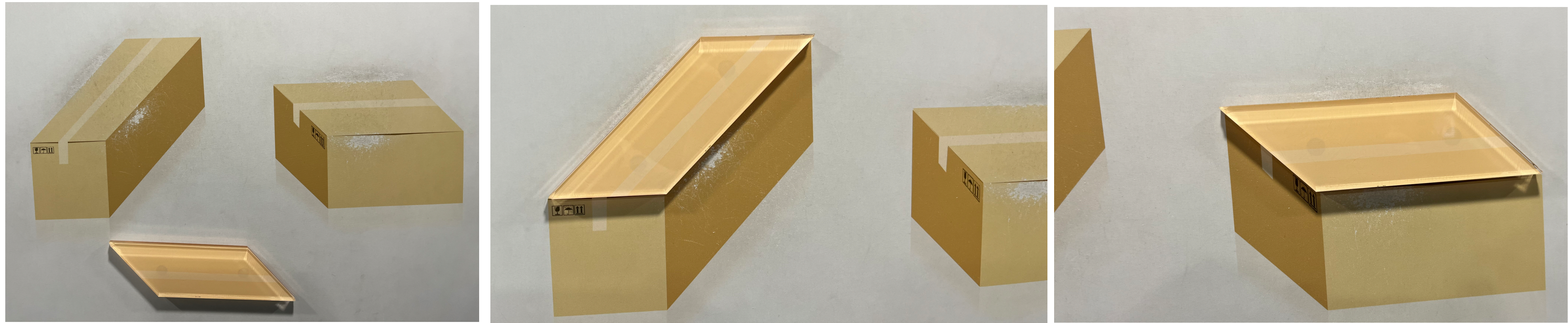


ILLUSION DE JASTROW

La forme inférieure semble être plus grande que la forme supérieure.
En fait, elles sont identiques (comparaison avec la pièce noire).

Montrer que nos sens ne suffisent pas

Une visite au musée de l'illusion



ILLUSION DES BOÎTES DE SHEPARD

Les dessus de ces deux cartons semblent être différents.

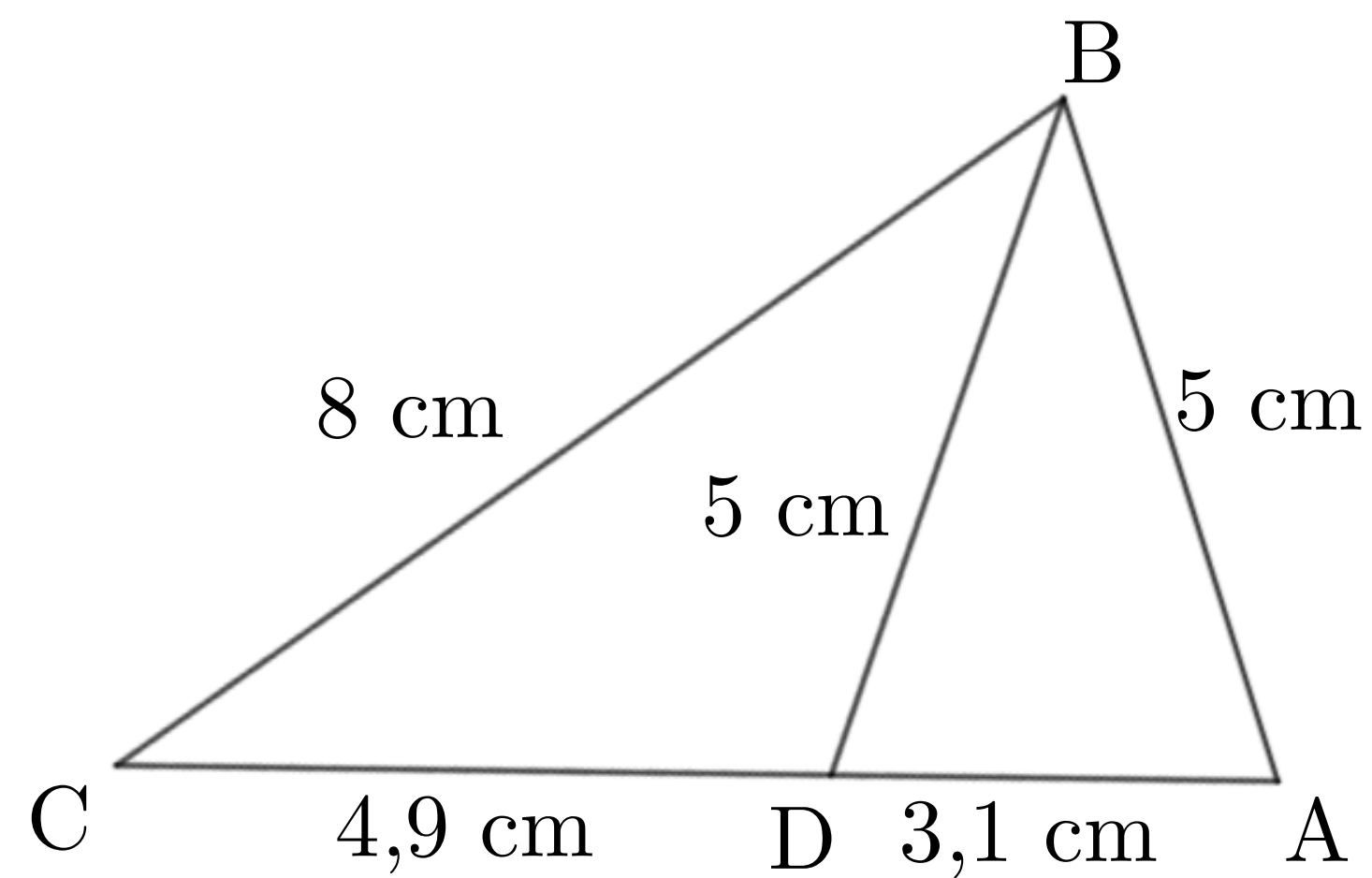
En fait, ils sont identiques (comparaison avec la pièce d'en dessous).

Consigne 4 :

Résoudre ces deux exercices.

Exercice 1 :

- 1) Construire cette figure à taille réelle.
- 2) Écrire votre programme de construction.



Les points A, C et D sont alignés.

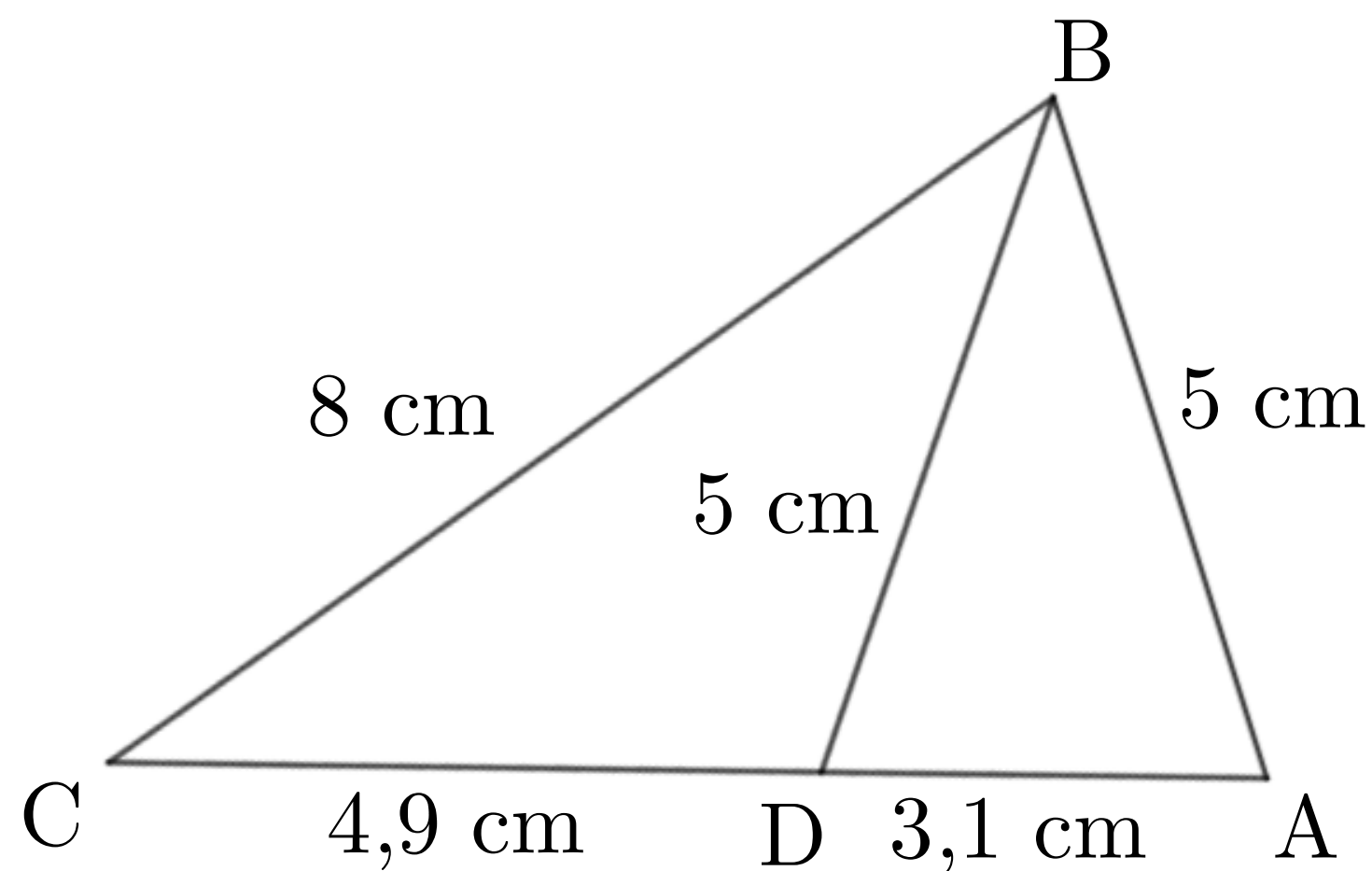
Exercice 2 :

Construire un triangle ayant deux bissectrices perpendiculaires.

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 1 :

- 1) Construire cette figure à taille réelle.
- 2) Écrire votre programme de construction.



Les points A, C et D sont alignés.

Géométrie perceptive/instrumentée :

- Tracer le segment $[AC]$ de longueur 8 cm.
- Placer le point D sur $[AC]$ tel que $AD = 3,1$ cm.
- Tracer le triangle ABD isocèle en B tel que $AB = 5$ cm.
- Tracer le segment $[BC]$ de longueur 8 cm.

Géométrie abstraite :

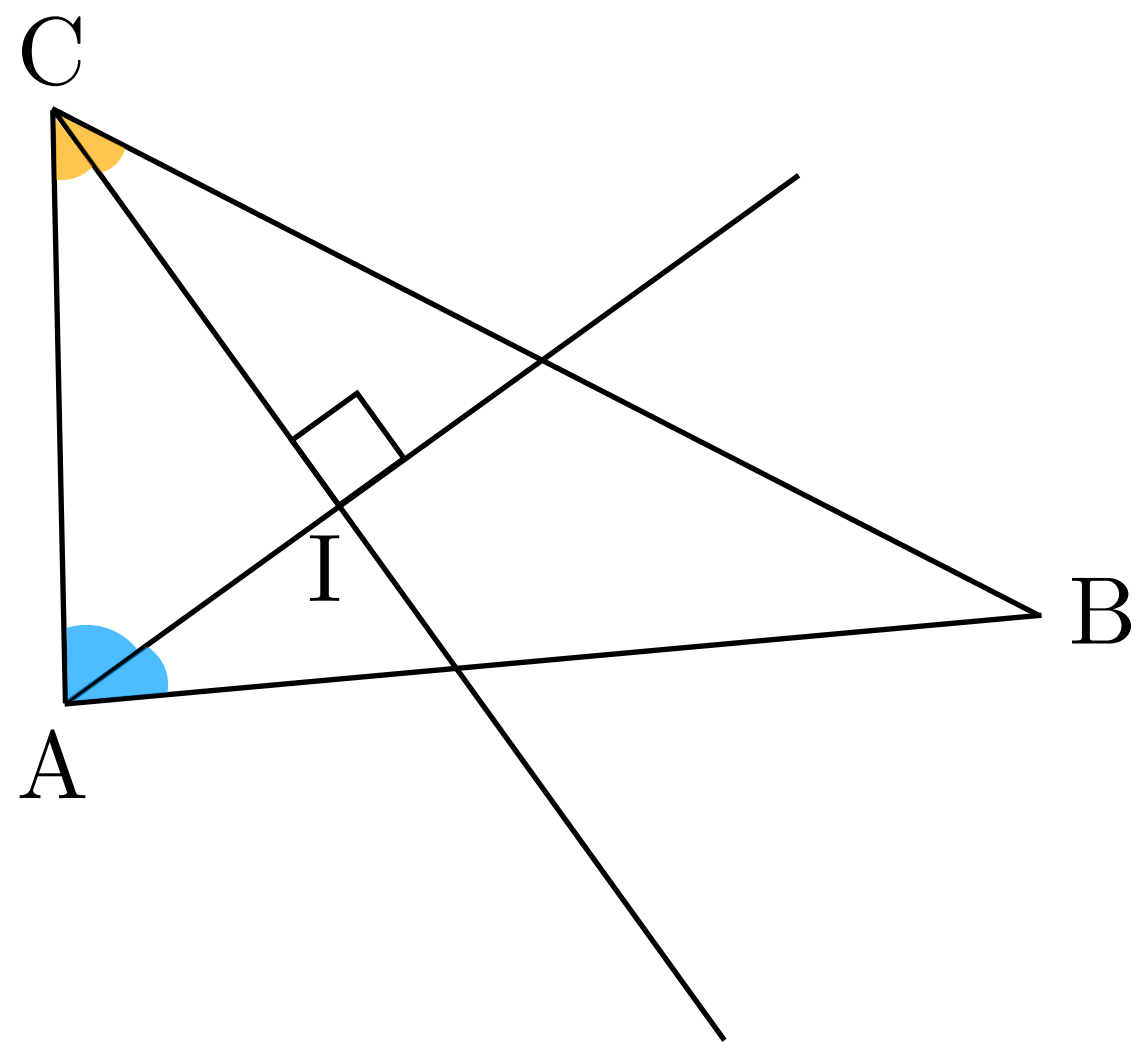
- Le triangle ABC est isocèle en C.
- D'après le cas de similitudes AA, les triangles ABD et ACB sont semblables.
- les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
- D'où $BC = 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \div 3,1 \text{ cm} \approx 8,06 \text{ cm}$
- Donc la figure est impossible à construire.

Intérêt(s) de ce type d'exercices :

- Limites de la géométrie perceptive/instrumentée
- Introduire les règles du « jeu »

Exercice 2 :

Construire un triangle ayant deux bissectrices perpendiculaires.



Intérêt(s) de ce type d'exercices :

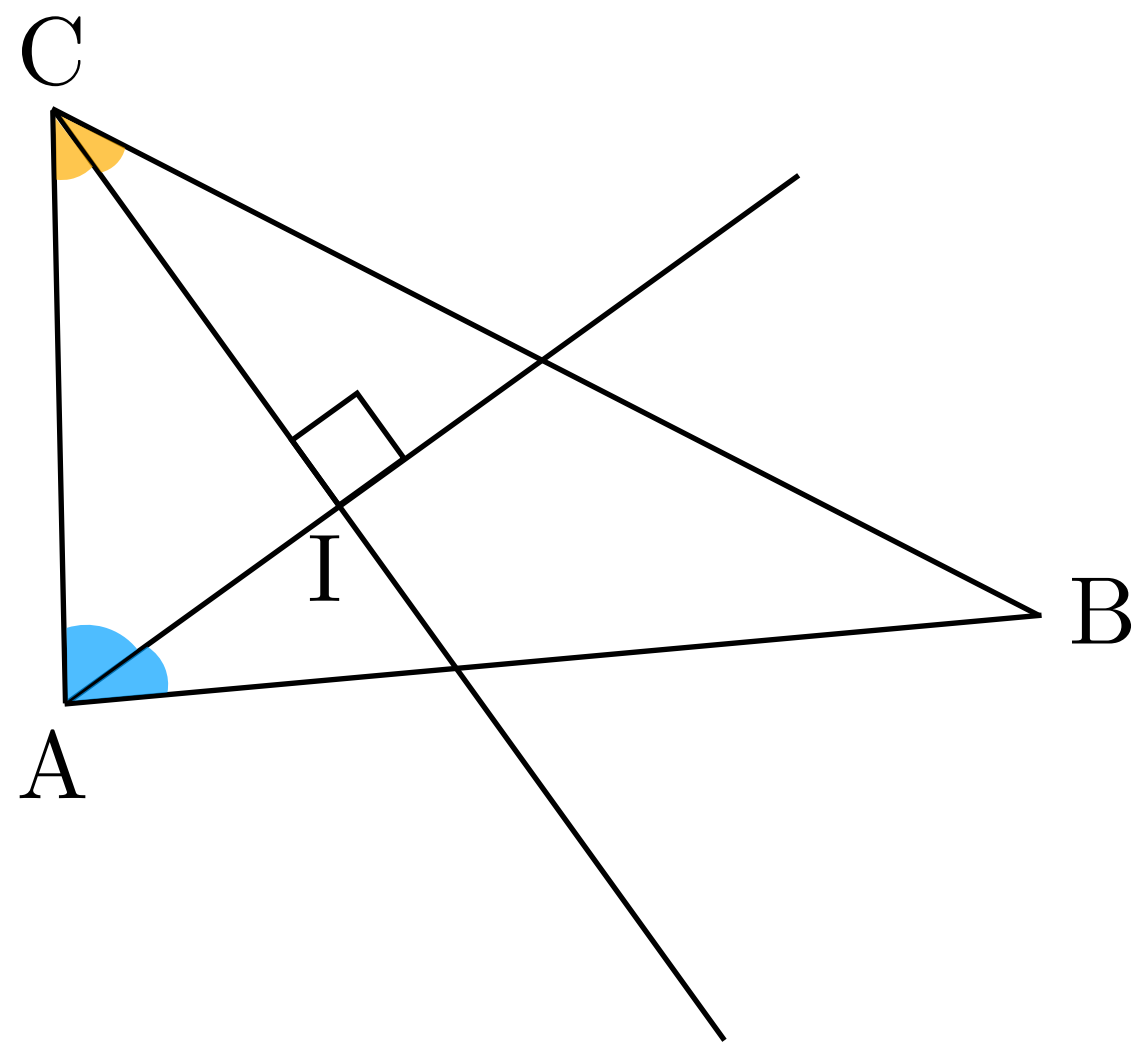
Géométrie instrumentée :

Géométrie abstraite :

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 2 :

Construire un triangle ayant deux bissectrices perpendiculaires.



Intérêt(s) de ce type d'exercices :

- Limites de la géométrie instrumentée
- Nécessité d'expliquer

Géométrie instrumentée :

J'ai fait de nombreuses tentatives mais je n'ai pas trouvé un tel triangle.

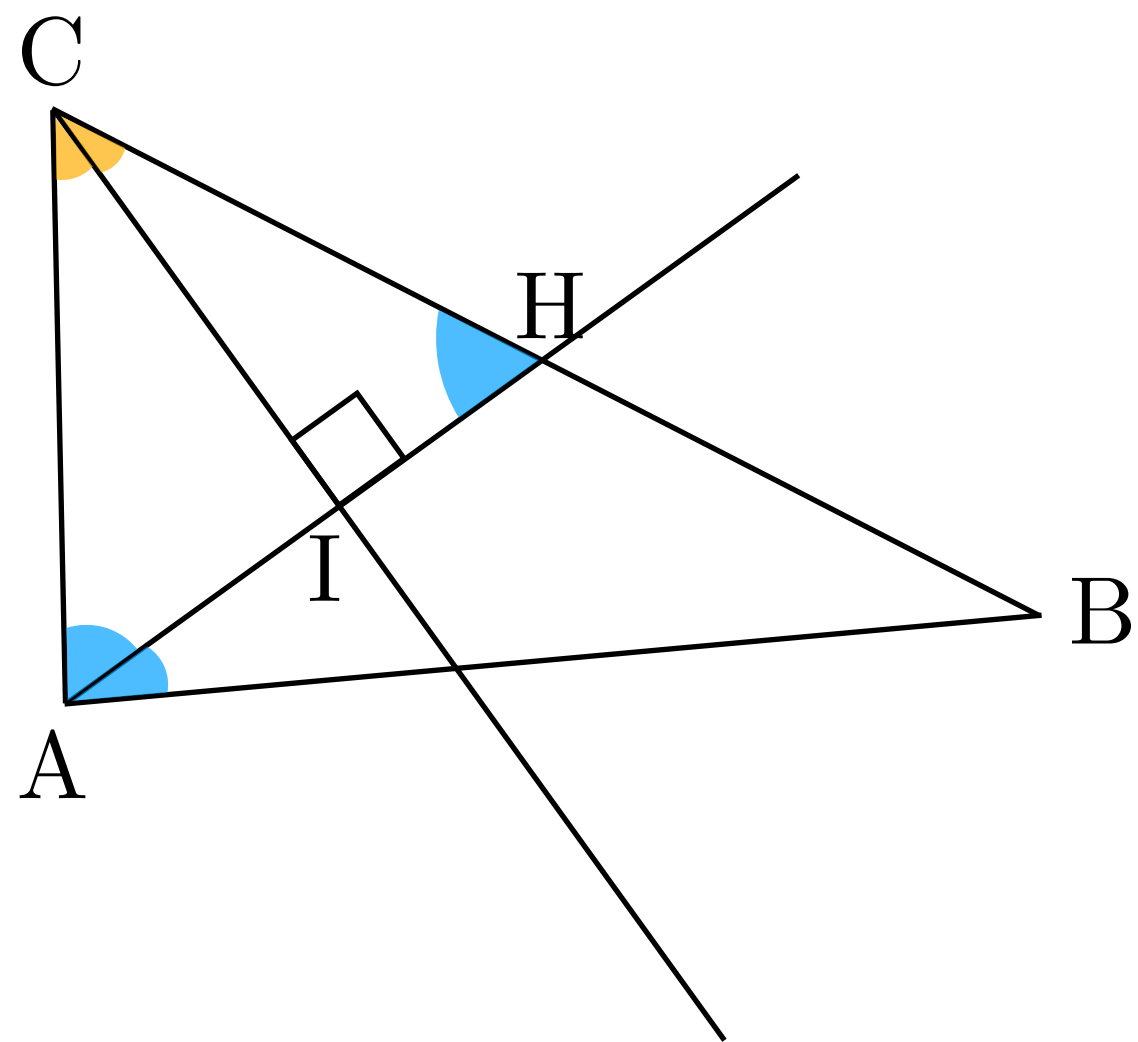
Je me demande si c'est possible mais les instruments ne m'aident pas.

Géométrie abstraite :

- Supposons qu'un tel triangle existe.
- D'après la somme des angles dans un triangle, les angles ICA et IAC sont complémentaires.
- (CI) et (AI) sont des bissectrices donc les angles BCA et BAC sont supplémentaires.
- D'où l'angle ABC est nul.
- Par conséquent, un tel triangle n'existe pas !

Exercice 2 :

Construire un triangle ayant deux bissectrices perpendiculaires.



Intérêt(s) de ce type d'exercices :

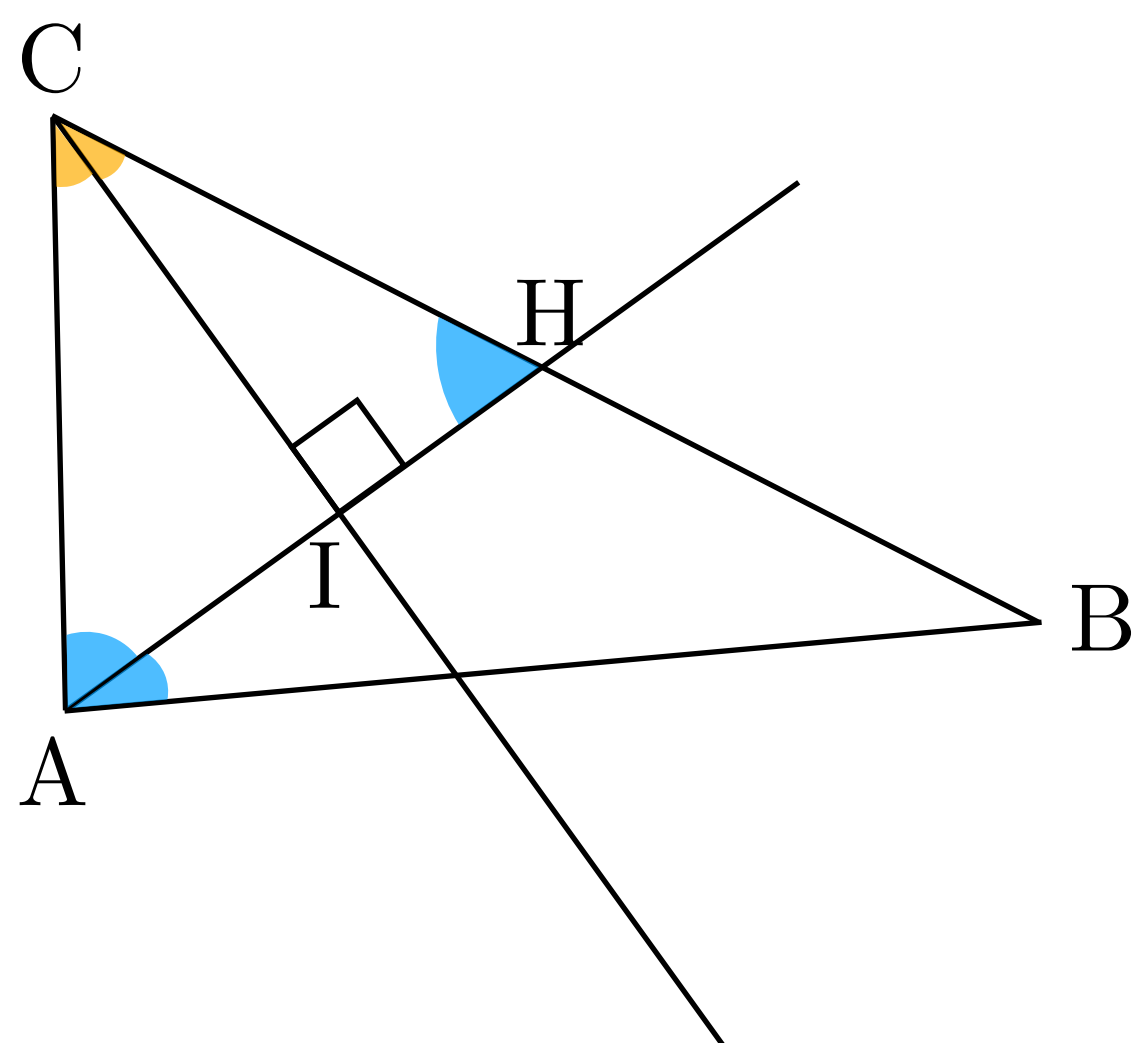
Géométrie instrumentée :

Géométrie abstraite :

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 2 :

Construire un triangle ayant deux bissectrices perpendiculaires.



Intérêt(s) de ce type d'exercices :

- Limites de la géométrie instrumentée
- Nécessité d'expliquer

Géométrie instrumentée :

J'ai fait de nombreuses tentatives mais je n'ai pas trouvé un tel triangle.

Je me demande si c'est possible mais les instruments ne m'aident pas.

Géométrie abstraite :

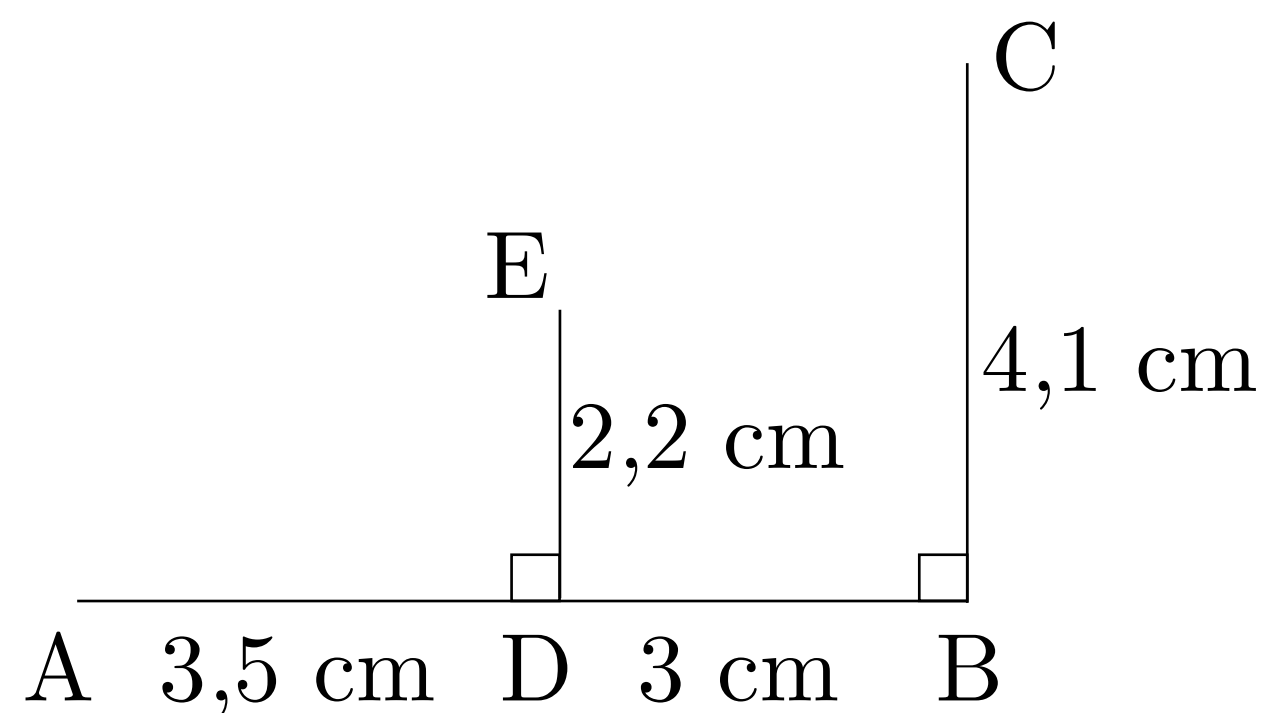
- Supposons qu'un tel triangle existe.
- D'après le cas de similitudes AA, les triangles CIA et CIHB sont semblables.
- leurs angles sont égaux deux à deux.
- D'où $\angle CAI = \angle CIH$
- Comme les angles $\angle CIH$ et $\angle HAB$ sont alternes-internes et égaux, les droites (CH) et (AB) sont parallèles.
- Or, elles se coupent en B.
- Par conséquent, un tel triangle n'existe pas !

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Voici deux exercices accessibles avec des élèves de 6ème et de 5ème :

Exercice 1 :

On considère la figure à taille réelle ci-dessous où les points A, D et B sont alignés.



Les points A, E et C sont-ils alignés ?

Décrire ce que tu as fait durant ta recherche.

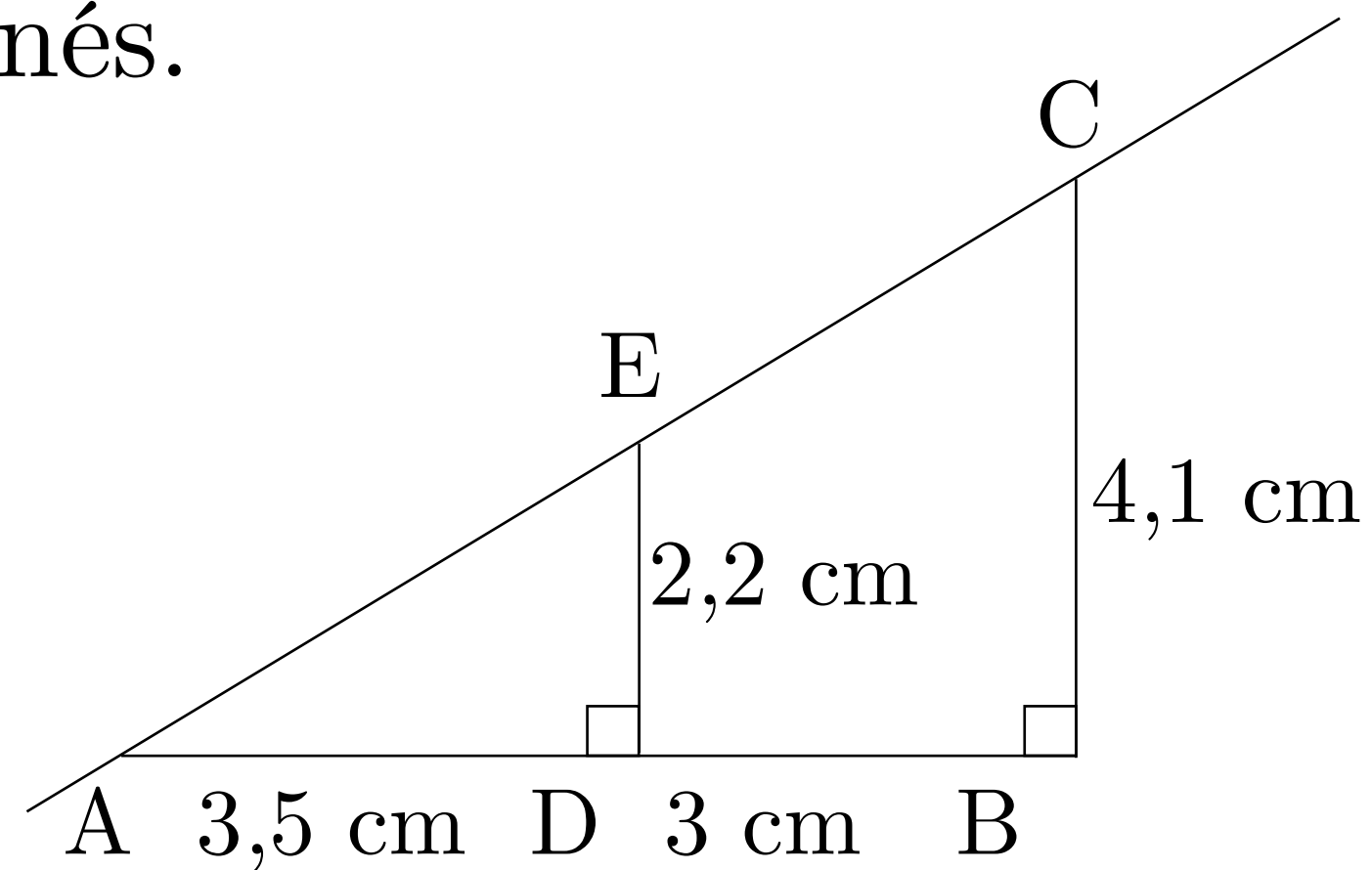
Exercice 2 :

Peut-on construire un triangle ayant deux angles droits ?

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 1 :

On considère la figure à taille réelle ci-dessous où les points A, D et B sont alignés.



Les points A, E et C sont-ils alignés ?
Décrire ce que tu as fait durant ta recherche.

Géométrie perceptive/instrumentée :

- Ça se voit !
- J'ai relié les points A et C par un trait avec la règle puis, j'ai vu que le point E est sur ce trait.

Géométrie abstraite :

Calculer les aires des triangles ABC et DEA et l'aire du trapèze BCED.
Raisonnement par l'absurde.

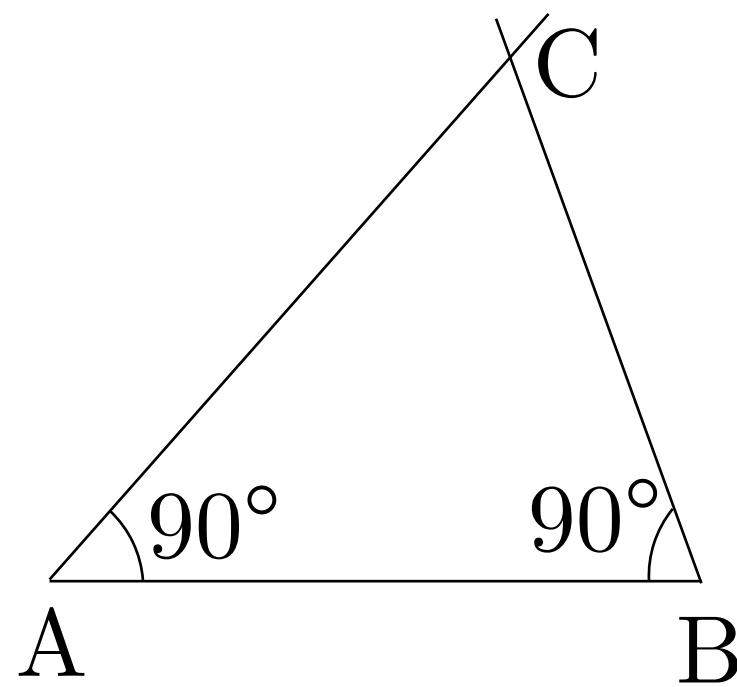
Intérêt(s) de ce type d'exercices :

- Limites de la géométrie perceptive
- Introduire les règles du « jeu »

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 2 :

Peut-on construire un triangle ayant deux angles droits ?



Géométrie abstraite :

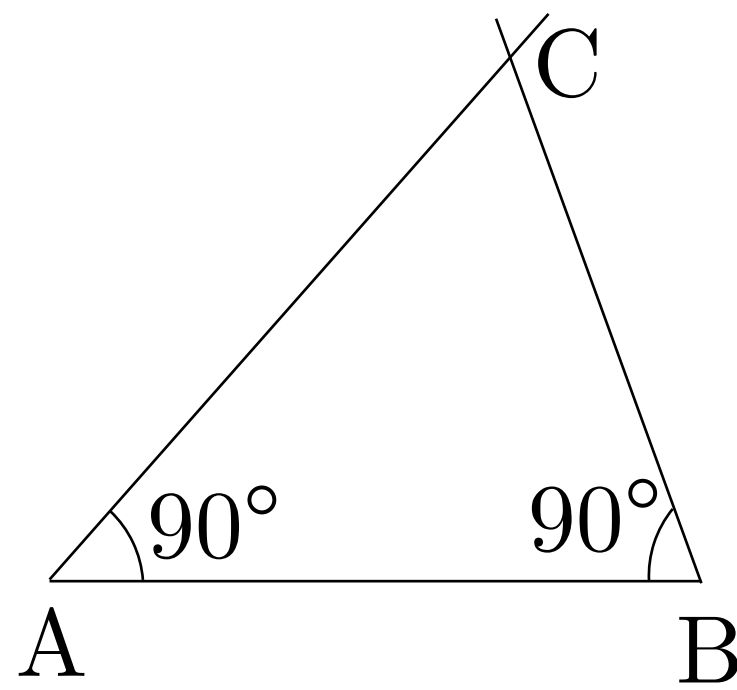
Géométrie instrumentée :

Intérêt(s) de ce type d'exercices :

Montrer que les instruments ne suffisent pas

Exercice 2 :

Peut-on construire un triangle ayant deux angles droits ?

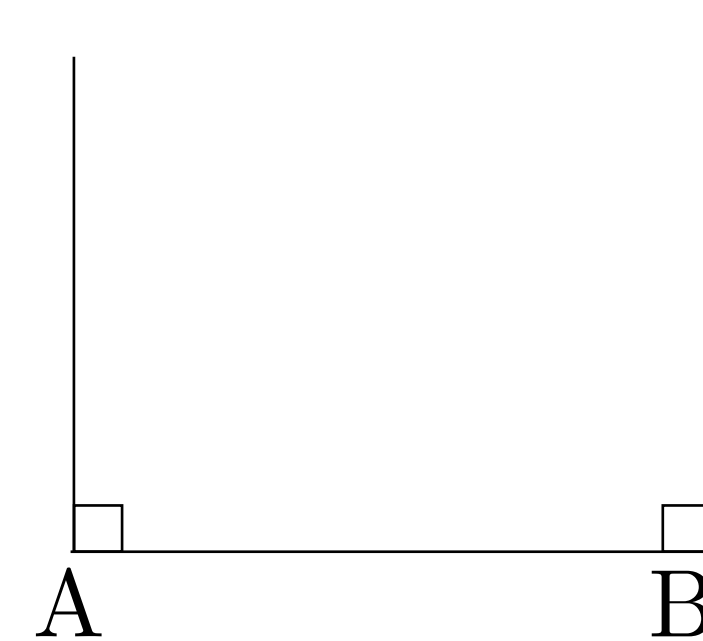


Géométrie abstraite :

Utiliser « deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles » pour obtenir une contradiction.

Géométrie instrumentée :

J'ai utilisé mon équerre et ma règle pour construire cette figure. Mais je ne comprends pas pourquoi les droites ne se croisent pas.



Intérêt(s) de ce type d'exercices :

- Limites de la géométrie instrumentée
- Nécessité d'expliquer

Faire accepter la géométrie déductive

Issu de brochure «Initiation aux raisonnements»
de l'Académie de Bordeaux»



Différents types d'exercices peuvent aider les élèves à accepter la géométrie déductive :

- des illusions d'optique (limite de la géométrie perceptive)
- des figures impossibles à réaliser (justification à l'aide de propriétés)
- des problèmes de construction (utilisation de propriétés lors de la construction)
- des problèmes où les géométries perceptive et/ou instrumentée induisent en erreur
- des problèmes ouverts qui provoquent un débat dans la classe (nécessité de justifier)
- ...