

Algèbre littérale et symbolique à la Renaissance

Document 1 : un poème de Tartaglia (1535)¹

Pour résoudre les équations du type $x^3 + px = q$, Tartaglia propose sa méthode sous forme de petit poème :

Quando chel cubo con le cose apresso, Se guaglia a qualche numero discreto, Trovan dui altri differenti in esso, Dapoi terrai questo per consueto, Ch'el lor' prodotto sempre fia eguale / Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo generale, Delli for lati cubi ben sottrati, Varra la tua cosa principale.

Traduction anglaise : *When the cube with the things next after, Together equal some number apart, Find two others that by this differ, And this you will then keep as a rule, That their product will always be equal, To a third cubed of the number of things, The difference then in general between, The sides of the cubes subtracted well, Will be your principal thing.*

Document 2 : l'algorithme explicite dans l'*Ars Magna* de Cardan (1545)²

R E G V L A.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam feminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta & cubica Apotomæ ex & cubica sui Binomij, residuū quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est & 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomium & 108 p:10, & Apotomen & 108 m:10, horum accipe & cub^{us} & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, & v: cub: & 108 p: 10 m: & v: cubica & 108 m: 10.

cub ⁹ p: 6 reb ⁹ æq̄lis 20	
2	20
8	10
	108
& 108 p: 10	
& 108 m: 10	
& v: cu. & 108 p: 10	
m: & v: cu. & 108 m: 10	

¹ Source : J. Stedall *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press 2008. p.325-327

² Disponible en ligne <http://filolinux.dipafilo.unimi.it/cardano/testi/opera.html>. L'extrait se trouve p.30 du pdf.

Traduction anglaise partielle³ :

RULE

Having raised a third part of the number of things to a cube, to which you add the square of half the number in the equation and take the root of the total, consider the square [root], which you will take twice; and to one of them you add half the number which you have already multiplied by itself, from the other you will subtract half of the same, and you will have the binome with its apotome, whence taking the cube root of the apotome from the cube root of its binome, the difference that comes from this, is the value of the thing.

For example, a cube and 6 things are equal to 20; raise 2, the third part of 6, to its cube, which makes 8; multiply 10, half the number, by itself, which makes 100; add 100 and 8, which makes 108; take the root which is \mathcal{R} 108 and replicate it; to one add 10, half the number, from the other take just the same; you will have the binome \mathcal{R} 108 p: 10, and the apotome \mathcal{R} 108 m: 10; take the cube roots of these, and subtract that of the apotome from that of the binome; you will have the value of the thing, \mathcal{R} v:cube \mathcal{R} 108 p: 10 m: \mathcal{R} v:cube \mathcal{R} 108 m: 10.

Document 3 : une équation du second degré chez Viète⁴ (1540-1603)

Si A quad. - B in A 2, aequetur Z plano. A-B esto E. Igitur E quad. Aequatur Z plano + B quad. (...) Itaque $\sqrt{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ + B fit A, de qua primum quaerebarur.

Document 4 : une mystérieuse « proposition » chez Viète⁵

PROPOSITIO IIII.

Si A quadrato-cubus,

$\left. \begin{matrix} B \\ D \\ G \\ H \\ K \end{matrix} \right\}$ in A quad. quad.

$\left. \begin{matrix} B \text{ in } D \\ B \text{ in } G \\ B \text{ in } H \\ B \text{ in } K \\ D \text{ in } G \\ D \text{ in } H \\ D \text{ in } K \\ G \text{ in } H \\ G \text{ in } K \\ H \text{ in } K \end{matrix} \right\}$ in A cubum.

$\left. \begin{matrix} B \text{ in } D \text{ in } G \\ B \text{ in } D \text{ in } H \\ B \text{ in } D \text{ in } K \\ B \text{ in } G \text{ in } H \\ B \text{ in } G \text{ in } K \\ B \text{ in } H \text{ in } K \end{matrix} \right\}$ in A quad.

$\left. \begin{matrix} B \text{ in } D \text{ in } G \text{ in } H \\ B \text{ in } D \text{ in } G \text{ in } K \\ B \text{ in } D \text{ in } H \text{ in } K \\ B \text{ in } G \text{ in } H \text{ in } K \\ D \text{ in } G \text{ in } H \text{ in } K \end{matrix} \right\}$ in A

aequetur B in D in G in H in K.

A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.
 1 Q.C. - 15 Q.Q. - 85 C. - 215 Q. - 274 N. Aequatur 120.
 Fit 1 N. 1. 2. 3. 4. vel 5.

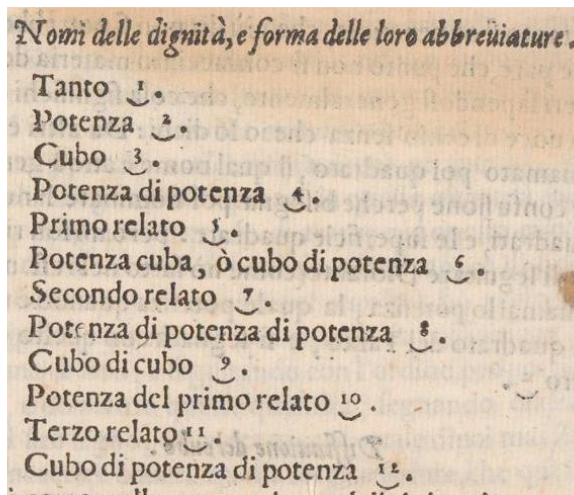
³ Source : J. Stedall, *op. cit.*

⁴ Sur Viète, nous renvoyons au site de Jean-Paul Guichard : <http://www.cc-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueil.html>

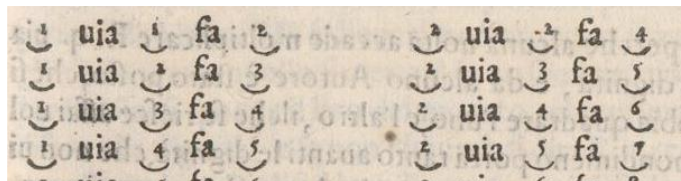
Remarque : ce passage est tiré de l'édition des œuvres de Viète réalisée 50 ans après la première édition ; on y trouve des symboles (comme la racine carrée) qui ne sont pas dans l'original.

⁵ Francisci Vietae Fontanaeensis de aequationum recognitione et emendatione tractatus duo per Alexandrum Andersonum. Paris, Laquehay, 1615. p.129. Disponible sur GoogleBooks.

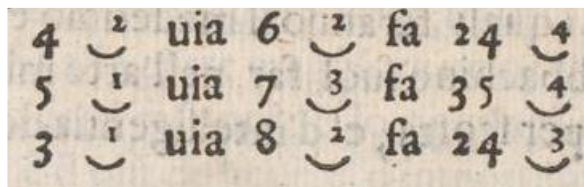
Document 5 : L'*Algebra* de Bombelli (1572)⁶. Noms et notations pour les puissances de l'inconnue ; produits de monômes.



(...)



(...)



Document 6 : justification algébrique de l'algorithme de résolution d'une équation du second degré chez Bombelli⁷.

Capitolo di Potenze, e Tanti eguali à Numero.

(...)

Faccisi in questa guisa. Agguagli si ² p. 12 ¹ à 32
 riduchinfi à 1 ² (com'è detto di sopra) si hauerà 1 ²
 p. 6. ¹ eguali à 16. operisi (come si mostrò di sopra
 quando si disse del pigliare il lato di potenze, e Tanti)
 che pigliato la metà delli Tanti, ch'è 3, & aggiuntolo al
 lato della potenza, ch'è 1 ², fa 1 ² p. 3, che il suo qua
 drato è 1 ² p. 6. ¹ p. 9, e noi uoleuamo 1 ² p. 6 ¹ però
 se si aggiongerà 9. ad ambe due le parti, si hauerà 1 ²
 p. 6 ¹ p. 9. eguali à 25, che tolto il lato d'1 ² p. 6 ¹ p.
 9. farà 1 ² p. 3, e questo è eguale al lato di 25. cioè à 5,
 che leuato il 3. da ciascuna delle parti restarà 2. eguale
 à 1 ², ed'il Tanto ualerà 2.

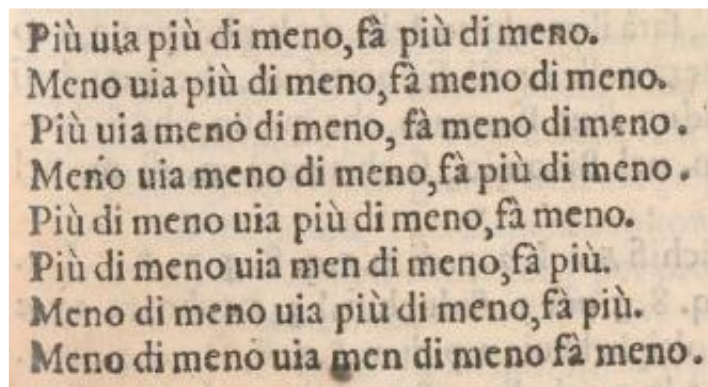
Remarque : Bombelli fournit plus loin (p.252 et suiv.) une « démonstration » (*dimostrazione*) de nature géométrique.

⁶ Tous les extraits de Bombelli sont issus de l'édition de 1579, disponible en ligne sur <http://mathematica.sns.it/opere/9/> ou <http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877>

Document 5 : p.204-205

⁷ *Op. cit.* p.248-249

Document 9 : des règles de calcul sur *più di meno* et *meno di meno*, introduites en vue de la résolution des équations du 3^{ème} degré¹⁰



Document 10: déjà chez Cardan¹¹

A propos du problème : partager 10 en deux parties dont le produit est 40, Cardan écrit « *manifestum est quad casus seu quaestio est impossibilis* ».

Il lance cependant l'algorithme général de résolution des équations du second degré, qui donne deux écritures :

$$\begin{array}{l} 5. \text{ p. } 12. \text{ m. } 15. \\ 5. \text{ m. } 12. \text{ m. } 15. \end{array}$$

Vérification par calcul du produit : $25. \text{ m. } 15. \text{ quad. est } 40.$

Pour aller plus loin :

- J. Stedall *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press 2008.
- A. Dahan & J. Peiffer *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*, Point-Seuil 1986.
- E. Barbin (dir.) *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*. Adapt-Vuibert, 2005.
- D. Flament *Histoire des nombres complexes : entre algèbre et géométrie*, CNRS éditions, 2003.

¹⁰ Bombelli *op. cit.* p.169.

¹¹ Cardan *Ars Magna, op. cit.* Disponible sur http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operomnia/vol_4_s_4.pdf p.67 du pdf.