Algèbre littérale et symbolique à la Renaissance

Document 1 : un poème de Tartaglia (1535)[1]

Pour résoudre les équations du type $x^3 + px = q$, Tartaglia propose sa méthode sous forme de petit poème :

Quando chel cubo con le cose apresso, Se guaglia a qualche numero discreto,Trovan dui altri differenti in esso, Dapoi terrai questo per consueto, Ch'el lor' produtto sempre fia equale / Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo generale, Delli for lati cubi ben sottrati, Varra la tua cosa principale.

Traduction anglaise : *When the cube with the things next after, Together equal some number apart, Find two others that by this differ, And this you will then keep as a rule, That their product will always be equal, To a third cubed of the number of things, The difference then in general between, The sides of the cubes subtracted well, Will be your principal thing.*

Document 2 : l'algorithme explicite dans l'*Ars Magna* de Cardan (1545)[2]

REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum ſua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica ſui Binomij, reſiduũ quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio.

Exemplum. cubus & 6 poſitiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in ſe, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ eſt ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:10, horum accipe ℞ cub & minue illam quę eſt Apotomæ, ab ea quæ eſt Binomij, habebis rei æſtimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cubꝰ p:6 rebꝰ æq̄lis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

[1] Source : J. Stedall *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press 2008. p.325-327

[2] Disponible en ligne http://filolinux.dipafilo.unimi.it/cardano/testi/opera.html. L'extrait se trouve p.30 du pdf.

Traduction anglaise partielle[3] :

RULE

Having raised a third part of the number of things to a cube, to which you add the square of half the number in the equation and take the root of the total, consider the square [root], which you will take twice; and to one of them you add half the number which you have already multiplied by itself, from the other you will subtract half of the same, and you will have the binome with its apotome, whence taking the cube root of the apotome from the cube root of its binome, the difference that comes from this, is the value of the thing.

For example, a cube and 6 things are equal to 20; raise 2, the third part of 6, to its cube, which makes 8; multiply 10, half the number, by itself, which makes 100; add 100 and 8, which makes 108; take the root which is $\mathcal{R}$ 108 and replicate it; to one add 10, half the number, from the other take just the same; you will have the binome $\mathcal{R}$ 108 p: 10, and the apotome $\mathcal{R}$ 108 m: 10; take the cube roots of these, and subtract that of the apotome from that of the binome; you will have the value of the thing, $\mathcal{R}$v:cube: $\mathcal{R}$ 108 p: 10 m: $\mathcal{R}$v:cube $\mathcal{R}$ 108 m: 10.

Document 3 : une équation du second degré chez Viète[4] (1540-1603)

Si A quad. – B in A 2, aequetur Z plano. A-B esto E. Igitur E quad. Aequattur Z plano + B quad. (…) Itaque $\sqrt{\text{Z plano+B quad.}}$ +B fit A, de qua primum quaerebarur.

Document 4 : une mystérieuse « proposition » chez Viète[5]

PROPOSITIO IIII.

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{Si A quadrato-cubus,} \\
- \left\{\begin{array}{l}\text{B}\\ \text{D}\\ \text{G}\\ \text{H}\\ \text{K}\end{array}\right\} \text{in A quad.quad.} \\
+ \left\{\begin{array}{l}\text{B in D}\\ \text{B in G}\\ \text{B in H}\\ \text{B in K}\\ \text{D in G}\\ \text{D in H}\\ \text{D in K}\\ \text{G in H}\\ \text{G in K}\\ \text{H in K}\end{array}\right\} \text{in A cubum,} \\
- \left\{\begin{array}{l}\text{B in D in G}\\ \text{B in D in H}\\ \text{B in D in K}\\ \text{B in G in H}\\ \text{B in G in K}\\ \text{B in H in K}\\ \text{D in G in H}\\ \text{D in G in K}\\ \text{D in H in K}\\ \text{G in H in K}\end{array}\right\} \text{in A quad.} \\
+ \left\{\begin{array}{l}\text{B in D in G in H}\\ \text{B in D in G in K}\\ \text{B in D in H in K}\\ \text{B in G in H in K}\\ \text{D in G in H in K}\end{array}\right\} \text{in A}
\end{array}\right\} \text{aequetur B in D in G in H in K.}
$$

A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1 QC. — 15 QQ. + 85 C. — 225 Q. + 274 N. *aequatur* 120.

Fit 1 N. 1. 2. 3. 4. *vel* 5.

---

[3] Source : J. Stedall, *op. cit.*

[4] Sur Viète, nous renvoyons au site de Jean-Paul Guichard :
http://www.cc-parthenay.fr/parthenay/crepart/GUICHARDJp/VIETEaccueill.html
Remarque : ce passage est tiré de l'édition des œuvres de Viète réalisée 50après la première édition ; on y trouve des symboles (comme la racine carrée) qui ne sont pas dans l'original.

[5] Francisci Vietae Fontenaeensis de aequationum recognitione et emendatione tractatus duo per Alexandrum Andersonum. Paris, Laquehay, 1615. p.129. Disponible sur GoogleBooks.

Document 5 : L'*Algebra* de Bombelli (1572)[6]. Noms et notations pour les puissances de l'inconnue ; produits de monômes.

Nomi delle dignità, e forma delle loro abbreuiature.

Tanto $\overset{1}{\smile}$.
Potenza $\overset{2}{\smile}$.
Cubo $\overset{3}{\smile}$.
Potenza di potenza $\overset{4}{\smile}$.
Primo relato $\overset{5}{\smile}$.
Potenza cuba, ò cubo di potenza $\overset{6}{\smile}$.
Secondo relato $\overset{7}{\smile}$.
Potenza di potenza di potenza $\overset{8}{\smile}$.
Cubo di cubo $\overset{9}{\smile}$.
Potenza del primo relato $\overset{10}{\smile}$.
Terzo relato $\overset{11}{\smile}$.
Cubo di potenza di potenza $\overset{12}{\smile}$.

(…)

$\overset{1}{\smile}$ uia $\overset{1}{\smile}$ fa $\overset{2}{\smile}$ $\overset{2}{\smile}$ uia $\overset{2}{\smile}$ fa $\overset{4}{\smile}$
$\overset{1}{\smile}$ uia $\overset{2}{\smile}$ fa $\overset{3}{\smile}$ $\overset{2}{\smile}$ uia $\overset{3}{\smile}$ fa $\overset{5}{\smile}$
$\overset{1}{\smile}$ uia $\overset{3}{\smile}$ fa $\overset{4}{\smile}$ $\overset{2}{\smile}$ uia $\overset{4}{\smile}$ fa $\overset{6}{\smile}$
$\overset{1}{\smile}$ uia $\overset{4}{\smile}$ fa $\overset{5}{\smile}$ $\overset{2}{\smile}$ uia $\overset{5}{\smile}$ fa $\overset{7}{\smile}$

(…)

4 $\overset{2}{\smile}$ uia 6 $\overset{2}{\smile}$ fa 24 $\overset{4}{\smile}$
5 $\overset{1}{\smile}$ uia 7 $\overset{3}{\smile}$ fa 35 $\overset{4}{\smile}$
3 $\overset{1}{\smile}$ uia 8 $\overset{2}{\smile}$ fa 24 $\overset{3}{\smile}$

Document 6 : justification algébrique de l'algorithme de résolution d'une équation du second degré chez Bombelli[7].

Capitolo di Potenze, e Tanti eguali à Numero.

(…)

Faccisi in questa guisa. Agguaglisi 2 $\overset{2}{\smile}$ p. 12 $\overset{1}{\smile}$ à 32 riduchinsi à 1 $\overset{2}{\smile}$ (com'è detto di sopra) si hauerà 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 6. $\overset{1}{\smile}$ eguali à 16. operisi (come si mostrò di sopra quando si disse del pigliare il lato di potenze, e Tanti) che pigliato la metà delli Tanti, ch'è 3, & aggiontolo al lato della potenza, ch'è 1 $\overset{1}{\smile}$, fa 1 $\overset{1}{\smile}$ p. 3, che il suo quadrato è 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 6. $\overset{1}{\smile}$ p. 9, e noi uoleuamo 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 6 $\overset{1}{\smile}$ però se si aggiongerà 9. ad ambe due le parti, si hauerà 1 $\overset{2}{\smile}$ p. 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 9. eguali à 25, che tolto il lato d'1 $\overset{2}{\smile}$ p. 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 9. farà 1 $\overset{1}{\smile}$ p. 3, e questo è eguale al lato di 25. cioè à 5, che leuato il 3. da ciascuna delle parti restarà 2. eguale à 1 $\overset{1}{\smile}$, ed'il Tanto ualerà 2.

Remarque : Bombelli fournit plus loin (p.252 et suiv.) une « démonstration » (*dimostratione*) de nature géométrique.

[6] Tous les extraits de Bombelli sont issus de l'édition de 1579, disponible en ligne sur http://mathematica.sns.it/opere/9/ ou http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877
Document 5 : p.204-205
[7] *Op. cit.* p.248-249

Document 7 : pour le 3ème degré, reprise de Cardan[8]

Capitolo di Cubo eguale à Tanti, e numero.

(…)

Agguagliſi 1 $\overset{3}{\smile}$ à 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 40. Pigliſi il terzo delli Tanti, ch'è 2, cubiſi fa 8, e queſto ſi caua del quadrato

$\overset{3}{\smile}$ 1. Eguale à $\overset{1}{\smile}$ 6. p. 40.

2. 20.

2. 20.

4. 400.

2. 8.

8. 392.

R.q.392.

20.p.R.q.392. 20.m.R.q.392.

R.c.L20.p.R.q.392⌋ .p.R.c.L 20.m.R.q.392.⌋

Lati. 2.p.R.q.2. 2.m.R.q.2, che ſommati inſieme fanno 4, ch'è la ualuta del Tanto.

Document 8 : un cas un peu étrange[9] : $x^3 = 15x + 4$

Ancora ſi può procedere nella agguagliatione di tal Capitolo in queſta guiſa. Agguagliſi 1 $\overset{3}{\smile}$ à 15 $\overset{1}{\smile}$ p.4, pigliſi il terzo delli Tanti, che è 5, cubiſi fà 125, e queſto ſi caui del quadrato della metà del numero, ch'è 4, reſta m.121 (ilqual ſi chiamerà più di meno) che di queſto pigliata la R.q. ſarà p.di m.11, che aggionta con la metà del numero, fa 2.p.di m.11, che pigliatone il lato cubico, ed'aggionto col ſuo reſiduo, fa 2.p. di m.1. & 2.m.di m.1, che gionti inſieme fanno 4, e 4. è la ualuta del Tanto. Et benche à molti parerà queſta coſa ſtraua

[8] Bombelli *op. cit.* p.290.-291.
[9] Bombelli *op. cit.* p.294.

Document 9 : des règles de calcul sur *più di meno* et *meno di meno*, introduites en vue de la résolution des équations du 3ème degré[10]

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

Document 10: déjà chez Cardan[11]

A propos du problème : partager 10 en deux parties dont le produit est 40, Cardan écrit « *manifestum est quad casus seu quaestio est impossibilis* ».
Il lance cependant l'algorithme général de résolution des équations du second degré, qui donne deux écritures :

5. p̄. ℞. m̄. 15.
5 m̄. ℞. m. 15.

Vérification par calcul du produit : 25. m. m. 15. quad. est 40.

Pour aller plus loin :

J. Stedall *Mathematics emerging, a sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press 2008.
A. Dahan & J. Peiffer *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*, Point-Seuil 1986.
E. Barbin (dir.) *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*. Adapt-Vuibert, 2005.
D. Flament *Histoire des nombres complexes : entre algèbre et géométrie*, CNRS éditions, 2003.

[10] Bombelli *op. cit.* p.169.
[11] Cardan *Ars Magna*, *op. cit.* Disponible sur http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf p.67 du pdf.