Le livre d’algèbre d’al-Khwārizmī

Sources

[14] R. Rashed *Al-Khwarizmi, le commencement de l’algèbre (texte établi, traduit et commenté par R. Rashed),* Librairie Blanchard, Paris, 2007.

[15] A. Djebbar *L’algèbre arabe, genèse d’un art*, Vuibert-Adapt, 2005.

Un dossier sur l’algèbre de langue arabe a été préparé par A. Djebbar pour Culturemath.

Extrait 1, fin de la **préface**[1]

La faveur de Dieu a accordé à l’imam al-Ma’mun, Prince des Croyants, outre le Khalifa dont il lui a consenti l’héritage, l’a investit de l’habit et l’a orné du lustre ; en plus de cela, le désir des belles-lettres de s’attirer ceux qui s’y adonnent, de se les approcher, de répandre sur eux sa protection et de les aider à éclaircir ce qui était impénétrable et à faciliter ce qui était difficile, m’ont exhorté à composer dans le calcul de l’algèbre et de l’*al-muqabala* un livre concis ; j’ai voulu qu’il enferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui en lui est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu’ils traitent les uns avec les autres lorsqu’il s’agit de l’arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration, et d’autres choses relevant du calcul et de ses sortes – en y mettant avant tout la bonne volonté et en espérant que les hommes de lettres lui consentent la place qui est la sienne, grâce aux bienfaits de Dieu très haut, à ses dons majestueux, à la beauté de ses mises à l’épreuve, dont ils sont les dépositaires. C’est de Dieu que me vient le succès en cela et en toute autre chose. C’est à lui que je m’en remets, Lui le Seigneur du Trône Sublime. La Bénédiction de Dieu soit sur tous les prophètes et tous les messagers.

Extrait 2 : **les trois modes** [2]

J’ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d’*al-jabr* et d’*al-muqabala*, selon trois modes qui sont : les racines, les *carrés*, et le nombre simple, qui n’est rapporté ni à une racine, ni à un *carré*.

La racine, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l’unité, les nombres qui sont au-dessus d’elle, et les fractions qui sont en dessous.

Le *carré* est ce qu’on obtient lorsqu’on multiplie la racine par elle-même.

Extrait 3 : **la première équation combinée** [3]

J’ai trouvé que ces trois modes – les racines, les *carrés* et les nombres – se combinent, et on aura les trois genres combinés, qui sont : des *carrés* plus des racines sont égaux à un nombre ; des *carrés* plus un nombre sont égaux à des racines ; des racines plus un nombre sont égaux à des *carrés*.

[1] [14] p.94
[2] [14] p.96
[3] [14] p.100-102.

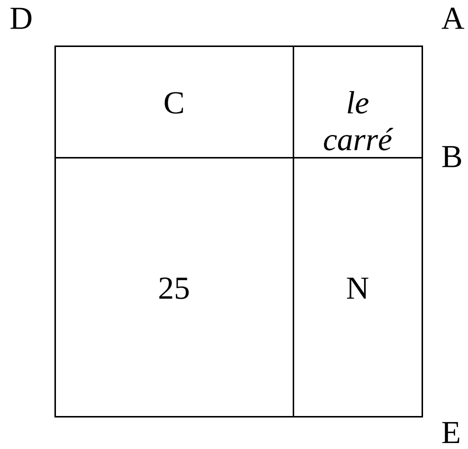
Les *carrés* plus les racines égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un *carré* plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un *carré* quelconque <une quantité> égale à dix racines, le tout sera trente-neuf.

Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; il vient, dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du *carré* que tu veux, et le *carrés* est neuf.

De même, si on considère deux *carrés*, ou trois, ou plus, ou moins, ramène-le à un seul *carré*, et ramène les racines et les nombres qui sont avec eux à ce à quoi tu as ramené le *carré*.

Extrait 4 : **deuxième justification de cet algorithme** [4]

Il y a aussi une autre figure qui mène à cela. Soit la surface *AB*, qui est le *carré*. Nous cherchons à lui ajouter dix de ses racines. Nous partageons dix en deux moitiés ; on aura cinq, dont nous faisons deux surfaces de part et d'autre de la surface *AB* ; soit les deux surfaces *C* et *N*. La longueur de chacune des deux surfaces sera de cinq coudées, qui est la moitié des dix racines, et sa largeur est égale au côté de la surface *AB*. Il nous reste un carré à partir <de l'un> des angles de la surface *AB*, qui est cinq par cinq, et cinq est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées de part et d'autre de la première surface. Nous savons alors que la première surface est le *carré*, que les deux surfaces qui sont de part et d'autre de celle-ci sont dix racines ; que tout cela est donc trente-neuf et qu'il reste pour compléter la plus grande surface le carré de cinq par cinq – ce qui est vingt-cinq que nous ajoutons à trente-neuf pour compléter la plus grande surface , qui est la surface *DE*. On obtient de tout cela soixante-quatre ; nous prenons sa racine, qui est huit, et qui est l'un des côtés de la plus grande surface ; si nous en retranchons une quantité égale à ce que nous lui avons ajouté, qui est cinq, il reste trois, qui est le côté de la surface *AB* – qui est le *carré* – et qui est sa racine ; le *carré* est neuf. Voici la figure :



[4] [14] p.110-112

Extraits 5 : exemple de règle de **calcul algébrique** [5]

Je t'enseigne comment multiplier les unes par les autres les choses qui sont les racines, si elles sont seules, si elles sont avec un nombre, si elles sont diminuées d'un nombre ou si elles sont retranchées d'un nombre.

Sache que, pour tout nombre multiplié par un autre nombre, il est nécessaire d'additionner l'un des nombres autant de fois que l'autre contient d'unité.

Si on a des dizaines auxquelles on a ajouté des unités, ou dont on a retranché des unités, il est nécessaire de les multiplier quatre fois : les dizaines par les dizaines, les dizaines par les unités, les unités par les dizaines et les unités par les unités. Ainsi, si les unités qui sont avec les dizaines sont ajoutées, la quatrième multiplication est additive ; et si elles sont toutes retranchées, la quatrième multiplication est aussi additive. Mais si les unes sont ajoutées et les autres retranchées, la quatrième multiplication est soustractive. (…) Si on dit : dix plus une chose par elle-même ; tu dis : dix par dix est cent, dix par une chose est dix choses, dix par une chose est aussi dix choses, une chose par une chose est un *carré* additif. On a donc cent dirhams plus vingt choses, plus un *carré* additif.

Extrait 6 : **deux problèmes « abstraits »** [6]

Troisième problème.

Tu as divisé dix en deux parties, puis tu as divisé l'une par l'autre ; le quotient obtenu est quatre.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose ; l'autre est dix moins une chose. Tu divises ensuite dix moins une chose par une chose pour avoir quatre. Or tu sais que, lorsque tu as multiplié le quotient par le diviseur, tu retrouveras le bien que tu as divisé ; le quotient dans ce problème est quatre et le diviseur est une chose. Multiplie quatre par une chose ; on a quatre choses égales au bien que tu as divisé, qui est dix moins une chose. Restaure le dix par la chose, et ajoute-là aux quatre choses ; on a cinq choses égales à dix ; un chose est deux, qui est l'une des deux parties.

Ce problème t'a amené à l'un des six procédés qui est : « des racines sont égales à un nombre ».

Quatrième problème.

Tu as multiplié le tiers d'un bien plus un dirham par son quart plus un dirham. On a vingt.

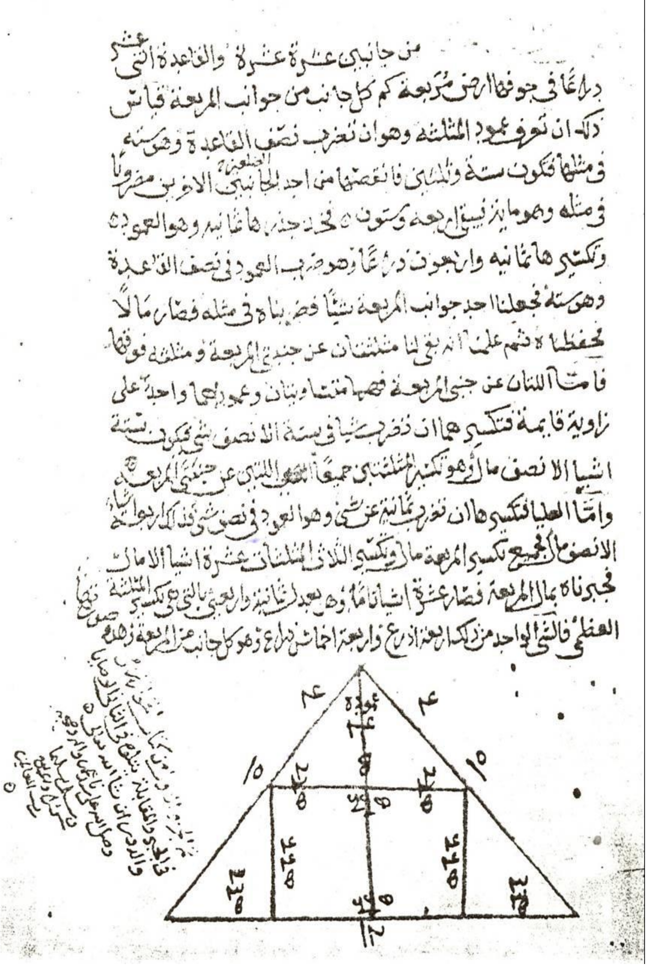
On l'infère ainsi : tu multiplies le tiers d'une chose par le quart d'une chose ; on a la moitié d'un sixième d'un *carré*. Tu multiplies un dirham par le tiers d'une chose, on a le tiers d'une chose ; et un dirham par le quart d'une chose vaut le quart d'une chose ; et un dirham par un dirham vaut un dirham. Tout cela est la moitié d'un sixième d'un *carré*, plus le tiers d'une chose, plus le quart d'une chose, plus un dirham, et est égal à vingt dirhams. Ôte de vingt un dirham valant l'autre dirham, il reste dix-neuf dirhams égaux à la moitié du sixième d'un *carré*, plus le tiers d'une chose plus un quart d'une chose. Complète ton *carré* ; pour le compléter, tu multiplies tout ce que tu as par douze ; ce que tu as sera un *carré* plus sept racines, qui sont égaux à deux cent vingt-huit dirhams. Partage en deux moitiés le nombre des racines ; multiplie la moitié par elle-même ; le

[5] [14] p.122-124
[6] [14] p.148-150

produit sera douze plus un quart, que tu ajoutes au nombre qui est deux cent vingt-huit ; on a deux cent quarante quatre plus un quart. Prends sa racine, quinze plus un demi ; soustrais-en la moitié du nombre des racines, qui est trois plus un demi, il reste douze, qui est le bien.

Ce problème t'a mené à l'un des six procédés, qui est : « des *carré* plus des racines égaux à un nombre ».

Extrait 7 : énoncé d'un **problème dans un contexte de mensuration** [7]



Si on dit : soit un terrain triangulaire, dont deux des côtés sont dix coudées, dix coudées, et la base douze coudées, à l'intérieur duquel se trouve un terrain carré, combien est le côté de ce terrain carré ?

Extrait 8 : le premier problème du **livre des testaments** [8]

Un homme meurt et laisse deux fils ; il légué un tiers de son bien à un homme étranger et laisse un avoir de dix dirhams et une somme de dix dirhams que lui doit un de ses deux fils.

Extrait 9 : début du chapitre sur l'affranchissement en cours de maladie [9]

Un homme, <le maître>, affranchit deux esclaves au cours de sa maladie. Le maitre meurt et laisse un fils et une fille ; puis un de deux esclaves meurt, laisse un bien plus grand que son prix et laisse une fille.

[7] [14] p.228. Source iconographique : site culturemath
[8] [14] p.232
[9] [14] 298