Etude de cas.

Problèmes et exercices : classification – objectifs – modalités de mise en œuvre

En vert : éléments de réponses

Partie I : dans les programmes et les ressources institutionnelles

Cycle 4

Programme de mathématique du cycle 4 : https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4

En particulier dans le préambule, les parties « résolution de problème » et « trace de cours ».

Guide *Résolution de problèmes* au cycle 4 : https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4

Fiche *Types de tâches* : https://eduscol.education.fr/document/17194/download

Ce dernier document dit des choses claires sur les questions flashs et les « tâches intermédiaires » (qui regroupent exercices d'entraînement (applications directes) et de réinvestissement). La catégorie « activité avec prise d'initiative » est inhabituelle, qui regroupe des activités de découverte et des activités de réinvestissement.

Seconde GT

Programme de mathématique de 2nd générale et technologique : https://eduscol.education.fr/document/24553/download

En particulier dans le préambule, les parties « compétences », « diversité de l'activité de l'élève », « trace écrite » et « quelques lignes directrices pour l'enseignement ».

Retenir :

- Pas de relation 1-1 entre types de problèmes et « compétences », ce qui ne signifie pas que tout type de problème est associé à toutes les compétences. Pour un type de problèmes on peut distinguer des compétences spécifiquement visées, et d'autre simplement rencontrées (par exemple, on peut penser que « représenter » se retrouvera presque partout).
- Toute la gamme est valorisée : « Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. (…) L'acquisition de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies. »
  Les différents types de problèmes et d'exercices ne s'opposent pas, ils se répondent. Comprendre que « activité rituelle » ça veut dire « question flash ».
  Remarque : dans ces séances, nous ne traiterons pas que Q flash.
- « L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, mais en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages. »
  - Il ne s'agit pas de valoriser l'erreur ou de refuser de la distinguer de la vérité, au contraire. Mais il faut que le « contrat » relatif à l'erreur soit clair et différent selon les types de problèmes : dans certaines situations (pas toutes), une certaine prise de risque doit être valorisée. En outre, le travail explicite sur l'erreur participe à la fois de la

conceptualisation des connaissances spécifiques en jeu (explicitation et invalidation d'idées fausses) et de l'apprentissage du raisonnement en mathématiques (invalider une affirmation erronée c'est produire un raisonnement correct ou un objet mathématique produit sous contraintes (contre-exemple)).

- De même, selon les moments et les types de problèmes, le « contrat » (qui décrit les rôles et responsabilités respectives des élèves et du professeur) doit préciser la part du collectif et de l'individuel, et elles diffèrent selon les types de problèmes et les phases de travail sur un problème. Par exemple : un élève travaille en général seul sur un exercice d'entraînement, et chaque séance de cours doit comporter des phases de travail où chaque élève interagit seul avec la matière mathématique ; des phases collectives (mais pas que) sont utiles dans les situations plus ouvertes.

Une ressource plus ancienne, mais claire et utile : Accompagnement des programmes de mathématiques de l'école primaire de 2002 (extraits)

Cf. docs d'accompagnement

Plusieurs fonctions pour la résolution de problèmes

Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents :
– problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance ;
– problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer ;
– problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances ;
– problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.
Dans ce dernier cas, nous parlons de « problèmes pour chercher » alors que dans les précédents nous parlions de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque, dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.

- Les problèmes de type 1 ont pour but de construire une nouvelle connaissance, tout en aidant l'élève à abandonner d'autres procédures qu'il avait pu jusqu'à présent utiliser dans ce genre d'activités, mais qui, seront inefficaces. Il est particulièrement important pour ces problèmes de prévoir, quand la situation le permet, des dispositifs permettant aux élèves de <u>valider seuls leur production</u>.

- Les problèmes de type 2 visent la mise en place d'automatismes.

- Les problèmes de type 3 sont le plus souvent contextualisés, et peuvent s'appuyer sur des énoncés dans lesquels l'élève peut avoir à :
* sélectionner des informations pertinentes dans différentes données numériques, dans différents supports (graphiques, textes, tableaux, schémas…) ;
* mettre en place des stratégies de résolution selon différentes étapes, …

- Les problèmes pour chercher ne visent l'acquisition d'aucune connaissance mathématique nouvelle.

Plan classique d'une séquence en mathématiques construite autour de différents types de problèmes

1. Introduction : situation-problème.
2. Confrontation des procédures des élèves mises en œuvre dans la situation problème, et mise en évidence de la pertinence d'un nouvel outil, de l'efficacité d'une procédure par rapport à d'autres, etc.
3. Phase d'institutionnalisation par le maître ; rédaction de « traces écrites » (affiches pour la classe, cahiers des élèves).
4. Phase d'entraînement, application directe de ce qui vient d'être appris, mise en place des automatismes (problèmes pour s'entraîner)
5. Phase d'approfondissement (problèmes de réinvestissement, souvent en changeant de contexte)
6. Evaluation finale (ou sommative)

Remarques : autres types d'évaluation : évaluation diagnostique (avant la séquence, pour tester la maîtrise des éventuels *pre*-requis nécessaires à la séquence) et évaluation formative (tout au long de la séquence, permettant de mettre en place une *différenciation*).

En parallèle de séquences centrées sur l'élaboration de nouvelles connaissances, le maître propose des problèmes pour chercher.

Partie II : Activités d'introduction

Document 1 : La « situation problème », un idéal didactique adossé à des théories de l'apprentissage chez l'enfant.

Un exemple canonique : le Puzzle de Guy Brousseau

http://lesmathsaucollege.e.l.f.unblog.fr/files/2020/05/activite-puzzle-de-brousseau.pdf

Modalités pédagogiques de mise en œuvre : élèves en petits groupes, chaque groupe reçoit une copie du puzzle initial, qu'il a le droit de découper. A disposition : papier, règle graduée, ciseaux, calculatrice.

ATTENTION : dans la situation inventée par Brousseau, la consigne est : chaque élève du groupe à la charge de fabriquer une des pièces du puzzle agrandi. Une fois toutes les pièces fabriquées, le groupe reconstitue le puzzle agrandi.

Mots clé[1] : phase didactique – phase adidactique ; dévolution ; institutionnalisation ; conflit socio-cognitif ; *feedback* du milieu ; adaptation au milieu ; variables didactiques ; situation (1) d'action (2) de formulation (3) de validation.

La théorie des situations didactique (Guy Brousseau et de nombreux successeurs depuis les années 1970) repose sur des théories du développement de l'enfant et de l'apprentissage (Piaget, Vigotsky) que nous n'étudierons pas ; son terrain privilégié est celui des mathématiques de l'école primaire et du début du secondaire. Elle est au départ pensée en lien avec la théorie mathématiques des jeux[2] : la construction par le chercheur ou l'enseignant d'une « situation » (d'un jeu avec ses règles particulières) permet de modéliser le comportement du ou des joueurs (ici : les élèves) ; la situation conduit à un apprentissage lorsque la connaissance visée consiste en la stratégie gagnante (ou la meilleure stratégie) dans ce jeu particulier.

Exemple de jeu : la course à 20.

[1] https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/guy-brousseau/#refnote04

[2] Qui n'est pas une théorie des jeux mathématiques ! Sur la théorie des jeux, par exemple : https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_jeux

On voit quelques traits fondamentaux dans la situation du puzzle :

- Un travail explicite sur l'erreur et une prise en compte des conceptions des élèves (il n'arrivent pas vierges de toutes connaissances et conceptions, il faut faire avec ce qu'ils sont). Ici : prégnance du modèle additif, idée que toute « augmentation » se traduit numériquement par une « addition ». Dans certains cas, la connaissance nouvelle se construit non pas en prolongement mais en conflit avec des connaissances anciennes (Bachelard). Le conflit socio-cognitif (expérience d'une contradiction, désaccord avec un milieu mathématique ou entre pairs) est un levier de conceptualisation.
  Nuançons : La théorie des situations repose donc sur une théorie discontinuiste de l'apprentissage, qui ne rend peut-être pas compte que de certains apprentissages.
- La situation est auto-validante (au moins auto-invalidante) : ce n'est pas l'enseignant qui vient dire à l'élève qu'il est content ou pas de sa réponse (l'élève n'ayant qu'à le croire sur parole, après tout, c'est lui le prof !) ; la situation permet à l'élève de se rendre compte *lui-même* de caractère valide ou invalide de sa procédure (lorsque l'élève agit il reçoit un *feedback* du milieu) ; si elle est invalide, il peut modifier son comportement (adaptation).
- Le moment de confrontation *autonome* des élèves avec le milieu dans le cadre de la tâche s'appelle la phase « a-didactique », au sens où elle n'est pas sous la conduite du maître (interaction didactique); ce sont les élèves qui sont *responsables* de leurs actions et qui en éprouvent les conséquences.
- Ici, la connaissance visée (la bonne procédure pour l'agrandissement est multiplicative – au sens large – et non additive) est la procédure efficace pour « gagner » le jeu, pour résoudre le problème.
- Chronologiquement, la phase adidactique est encadrée de deux phases didactiques : une phase de dévolution (avant, pour faire entrer les élèves dans le problème, leur apprendre les règles du « jeu », leur faire comprendre ce qu'est « gagner » le jeu) ; une phase d'institutionnalisation (après). La phase d'institutionnalisation est essentielle : dans la phase adidactique, la « connaissance » a émergé dans un contexte particulier, elle a été décrite avec les mots des élèves, voire réalisée dans les faits sans être mise en mots. La phase d'institutionnalisation met en mots, décontextualise (ici : la connaissance porte sur les agrandissements/réductions de figures et non sur les puzzles) et dépersonnalise. La connaissance institutionnalisée devient un savoir commun et public ; commun aux élèves de la classe et plus généralement au monde. Ce savoir devient un savoir de référence, sur lequel on pourra s'appuyer à l'avenir. En outre, des éléments conventionnels ne peuvent émerger de la phase adidactique, ils sont apportés en phase d'institutionnalisation : vocabulaire, notations.
- On distingue en général trois types de situations, selon ce qu'elles visent : situations d'action (on obtient une procédure, une méthode, un algorithme), situations de formulation (on constate un fait mathématique et on cherche les mots pour le dire, on formule une conjecture), situation de validation (on produit des éléments de preuve, sans passer toutefois obligatoirement dans la forme de la démonstration). Depuis Brousseau, la théorie a été raffinée (par exemple : situations de décision (Balacheff)).
- Un élément essentiel de la construction d'une situation repose dans l'identification des *variables didactiques* (tout paramètre rendant certaines actions possibles/impossibles, faciles/coûteuses, résolvant le problème ou ne le résolvant pas).
  Exemples de variables didactiques dans cette situation : les valeurs numériques des mesures de longueurs et du coefficient de proportionnalité (×2 n'a pas les mêmes propriétés que « diviser par 4 puis multiplier par 7 », qui n'a pas les mêmes propriétés que ×1,5 (qui risque d'aboutir à des procédures en partie additive) ; les instruments autorisés (que faire sans calculatrice ?).

L'identification de variables permet de construire des progressions, amenant les élèves à abandonner des procédures inefficaces au profit de procédures *expertes*.

Documents 2 : Quelles « activités d'introduction » dans les manuels courants ?

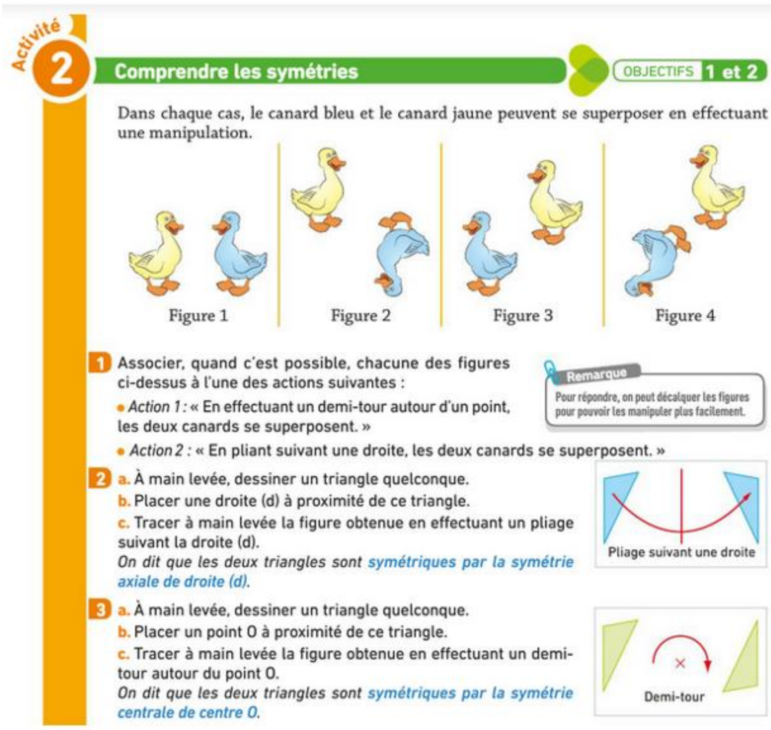
Document 2.1 :

Activité d'introduction à la symétrie centrale

Extraite du manuel Myriade 5e édition 2016 : Activité 2 page 162

Matériel :

- Papier Calque (morceaux découpés à l'avance distribués à chaque élève)
- Crayon à papier, équerre ou règle et compas



Activité 2 **Comprendre les symétries** OBJECTIFS 1 et 2

Dans chaque cas, le canard bleu et le canard jaune peuvent se superposer en effectuant une manipulation.

Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

1 Associer, quand c'est possible, chacune des figures ci-dessus à l'une des actions suivantes :

- *Action 1 :* « En effectuant un demi-tour autour d'un point, les deux canards se superposent. »
- *Action 2 :* « En pliant suivant une droite, les deux canards se superposent. »

Remarque : Pour répondre, on peut décalquer les figures pour pouvoir les manipuler plus facilement.

2 a. À main levée, dessiner un triangle quelconque.
b. Placer une droite (d) à proximité de ce triangle.
c. Tracer à main levée la figure obtenue en effectuant un pliage suivant la droite (d).
*On dit que les deux triangles sont **symétriques par la symétrie axiale de droite (d)**.*

Pliage suivant une droite

3 a. À main levée, dessiner un triangle quelconque.
b. Placer un point O à proximité de ce triangle.
c. Tracer à main levée la figure obtenue en effectuant un demi-tour autour du point O.
*On dit que les deux triangles sont **symétriques par la symétrie centrale de centre O**.*

Demi-tour

Cette activité d'introduction présente-t-elle certaines des propriétés d'une situation-problème ?

La question 1 peut donner lieu à une activité autonome des élèves. Elle est en partie auto-validante (au moins auto-invalidante).

L'objectif des questions 2 et 3 n'est pas clair pour moi. Peut-être le « livre du maître » donne des indications sur un questionnement oral susceptible de faire émerger des connaissances …

Quelle(s) connaissances vise-t-elle à faire rencontrer aux élèves ?

- Lorsqu'on obtient une figure à partir d'une autre par demi-tour autour d'un point, on dit que ces figures sont symétriques par rapport à ce point.
- Il existe deux symétries différentes, l'une par rapport à un axe, l'autre par rapport à un point.
- On peut réaliser concrètement ces symétries, l'une par pliage, l'autre par demi-tour (par exemple en faisant tourner le papier calque autour d'un point fixé).

- Ces symétries sont différentes : non seulement les procédures sont différentes (pliage ou demi-tour), mais si on part d'une figure, il semble que les symétriques dans un cas et dans l'autre sont différents (mais on n'a pas exploré tous les axes ou tous les centres possibles). Ne pas réussir n'est pas une preuve d'impossibilité !

Peut-on la modifier pour en faire une situation-problème ?

On peut imaginer une suite de situations conduisant à des formulations plus riches et plus précises ; pas forcément sur une seule séance.

Situation 1 : dans la figure 2, montrer que les deux canards ne peuvent pas se superposer par une symétrie axiale. Raisonnement par l'absurde et révision du lien entre symétrie axiale et médiatrice d'un segment. Passage de l'aspect global « figures symétriques » à l'aspect ponctuel « points symétriques l'un de l'autre ».

Institutionnaliser ce lien en cours. Exercices d'entraînement : construction de symétriques par rapport à un axe donné ; construction d'axe de symétrie ; démonstration de non symétrie axiale. Travail possible sous Geogebra.

Situation 2 : dans le cas où un centre de symétrie aura été repéré avec le papier calque, supprimer le papier calque et demander de retrouver le centre. On fait l'hypothèse que les actions révisées dans la situation 1 seront réinvesties. Ici on constate que les milieux des segments reliant des points symétriques sont tous confondus.

Situation 3 : construire le symétrique d'une figure par rapport à un point donné ; instruments autorisés : dans un groupe règle graduée ; dans l'autre groupe : règle non graduée et compas. Vérification au papier calque autorisée une fois la figure finie.

Institutionnalisation : deux caractérisations de la symétrie centrale (par le demi-tour, par les milieux communs)

Document 2.2 : Mathématiques 4$^{\text{ème}}$, Transmath, 2016, p.25.

Activité 1

Multiplication de deux nombres relatifs

Une classe de 4e assiste à la projection d'un documentaire sur les animaux marins. Ils entendent : « La lumière solaire pénètre jusqu'à la cote -500 m sous le niveau de la mer. Les cachalots peuvent descendre 5 fois plus bas que la lumière solaire. »

1. Calculer $-500 + (-500) + (-500) + (-500) + (-500)$ et en déduire $5 \times (-500)$.
Conclure sur la cote que peuvent atteindre les cachalots.

2. Ali se demande : « Mais alors comment calculer $1{,}2 \times (-4)$? »
On ne peut pas procéder de la même manière car 1,2 n'est pas un nombre entier.
On utilise ici le fait que $1{,}2 \times (-4) + 1{,}2 \times 4$ est égal à $1{,}2 \times (-4 + 4)$.
a. Calculer $1{,}2 \times (-4 + 4)$ et en déduire le résultat de $1{,}2 \times (-4) + 1{,}2 \times 4$.
b. Calculer $1{,}2 \times 4$ et en déduire $1{,}2 \times (-4)$.

3. Katia réagit alors : « D'accord, mais cela ne nous dit pas comment calculer $(-3) \times (-7)$. »
On utilise ici le fait que $(-3) \times (-7) + 3 \times (-7)$ est égal à $(-3 + 3) \times (-7)$.
a. Calculer $(-3 + 3) \times (-7)$ et en déduire le résultat de $(-3) \times (-7) + 3 \times (-7)$.
b. Calculer $3 \times (-7)$ et en déduire $(-3) \times (-7)$.

4. Calculer mentalement.
a. $8{,}5 \times (-2)$ **b.** $(-0{,}5) \times 9$ **c.** $(-2) \times (-8)$ **d.** $(-10) \times (-5{,}2)$ **e.** $(-1{,}5) \times (-4)$

L'activité conduit à des formulations (de règles de calcul) et de justification. L'élève est amené à produire, sur des exemples (qui n'ont sans doute pas encore valeur générique ici), les justifications de cours. Cette activité est conforme aux mathématiques, et au programme du cycle 4 (justification des propriétés de manière interne aux mathématiques, reposant sur le principe de permanence, exposée sur des exemples à valeur générique).

Ce n'est en rien une situation problème. Les questions et les étapes de résolution sont apportés par l'énoncé. C'est une activité guidée : découpage en trois étapes (avant un entraînement final), au sein desquelles les étapes sont indiquées. Aucun *feedback* du milieu (pas de milieu).

Document 3 : Toute connaissance nouvelle peut-elle être rencontrée dans une « situation-problème » ?

Source : A. Robert (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques* n°18 vol.2, p.139-190.

Lorsqu'il s'agit d'insérer une connaissance nouvelle dans le paysage mathématique de l'élève, Aline Robert propose de distinguer 4 cas :

- Extension sans accident : Passage de l'addition des entiers à l'addition des décimaux ; Passage du produit scalaire dans le plan à l'espace ; Equations cartésiennes de droites dans le plan repéré (passage de $y = ax + b$ à $ax + by + c = 0$)
- Extension avec accident : Passage des entiers aux décimaux : ordre, multiplication …
  Equations cartésiennes de droites dans le plan et dans l'espace ; Parallélisme des droites dans le plan et dans l'espace ; Opérateurs non-linéaires (à commencer par l'élévation au carré), à partir de la distributivité de × sur + (linéaire).

- RAP (Réponse à un Problème) : « notions qui peuvent être présentées aux élèves comme réponses de nouveaux problèmes précis, que les élèves peuvent comprendre mais qu'ils ne peuvent pas résoudre complètement »[3].
  Théorèmes de Pythagore et de Thalès
- FUG (notion Formalisatrice – Unificatrice – Généralisatrice) : ni extensions d'une notion particulière déjà rencontrée, ni susceptibles d'être formulées comme réponse à *un* problème ; ces notions sont issues d'un travail conscient des mathématiciens pour organiser les mathématiques savantes de manière transversale aux problèmes ou aux contextes.
  Exemple le plus travaillé : espace vectoriel en L1 (J.-L. Dorier)
  Exemples qui posent question : notion de fonction ? définition formelle de la notion de « fonction croissance » ? Notion formelle de limite ? Distributivité de × sur + ?

Les activités d'introduction se rapprochant de l'idéal des « situations problèmes » sont pertinentes pour les extensions avec accident. Pour les RAP, on sera plus sur des situations de rencontre avec un problème guidées par l'enseignant. Par définition, aucune « situation-problème » ne peut introduire une connaissance FUG, du fait des fonctions Unificatrices et Généralisatrice.

Ici le terme « connaissance » est pris au sens large : nouvelle notions (ex. cosinus d'un angle aigu), nouvelle technique (calcul littéral), nouveaux objets (ex. vecteurs), nouvelles propriétés (ex. théorème de Thalès) …

Partie III : « Exercices d'entraînement » et « Exercices de réinvestissement »

Source : Robert, A., Rogalski, M. (2002). « *Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe* », *Petit x, 60*, Irem de Grenoble.

En ligne sur : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/

Activités : tout ce que dit, fait, pense l'élève pendant l'activité se traduisant par une trace écrite orale. Mais une partie est invisible.

Tâches : tout ce qui déclenche une activité. Ici : un énoncé ou une question d'un énoncé

Analyser les tâches à partir des énoncés c'est prévoir les activités mathématiques potentielles des élèves, activités dont on suppose qu'elles auront des effets en termes d'apprentissages.

L'enseignant a une certaine marge de manœuvre :

– dans le choix des activités au moment de l'élaboration des énoncés et
– lors du déroulement en classe du travail de l'élève

Pourquoi analyser les tâches :

- Pour comprendre l'activité des élèves faire une analyse *a priori*
- Choisir des énoncés, les modifier à partir de critères clairement définis

[3] (Robert 1998, 163)

- Elaborer un barème
- Aide pour le carnet de bord

Outils pour analyser des tâches mathématiques dans des énoncés d'exercice

Rappel : Toutes ces analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné et une classe donnée.

Quelques questions à se poser concernant les énoncés d'exercices

- la forme des questions, la nature des indications, le découpage des énoncés
  - Est-ce une question fermée ou ouverte ?
    Du type : Que peut-on dire…. ?, vrai ou faux.
  - Est-ce un exercice d'application directe ?
    Ex : En appliquant le théorème de Thalès, calcul d'une longueur

- Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances : connaissances **disponibles** (sans indications explicite de la part de l'énoncé, de l'enseignant ou du contexte immédiat, l'élève reconnaît que face à ce problème, telle ou telle connaissance est sans doute le bon outil) ou seulement connaissances **mobilisables** (l'élève n'identifie l'outil pertinent que lorsqu'il lui est suggéré par l'énoncé, l'enseignant ou le contexte, par exemple « En utilisant le théorème de Pytahgore, montrer que … »).

Outils pour l'analyse de tâche :

1. Tâches simples, isolées (appliquer)
   Ex : en 3ème, chapitre «racine carrée » :
   Calcule $\sqrt{4}$ *. Ecrit sous la forme* $a\sqrt{b}$ *avec a et b des entiers positifs* $\sqrt{27}$
   Ex : En utilisant le théorème de Pythagore…

2. Tâches de reconnaissances des modalités d'application : reconnaître, adapter
   Ex : appliquer un théorème ou reconnaître des configurations ou appliquer une formule, résoudre un problème concret.

3. Introduire des objets intermédiaires :
   Ex : Nommer un point, tracer une diagonale, nommer un calcul partiel, prolonger une hauteur d'un triangle, ou dans l'espace ne pas se limiter au parallélogramme……
   Exemple : construire un disque d'aire égale à la somme des aires de deux disques donnés.

4. Changements de cadres[4] ou de registres[5] :

   Cadre *= une branche des mathématiques : ex : géométrie euclidienne, analyse….*
   Des exemples d'exercices avec changement de cadre sont donnés plus bas. Ces exercices sont rares, mais formateurs, en particulier parce qu'ils invitent à mettre les

[4] Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *7*(2).

[5] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

connaissance en fonctionnement au niveau « disponible » et pas seulement « mobilisable »

Registre *= système de représentation.*
Exemple : on peut travailler dans le cadre vectoriel en représentant les objets par des flèches dans le plan, par des écritures faisant référence à des points ($\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$), par des écritures ne faisant pas référence à des points ($\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$), par des couples de nombres réels (une base ayant été choisie) etc.
Le **traitement** au sein d'un registre dépend du registre :

$$0.20 + 0.25 = \dots \qquad 1/5 + 1/4 = \dots$$

Dans les deux cas on additionne bien les mêmes nombres, mais le fait que ces nombres sont codés de manière différente invite à utiliser des techniques différentes pour calculer la somme.
Il existe des tâches de **conversion** entre deux registres : on part d'un objet représenté dans un registre et on cherche à le représenter dans un autre registre.
Exemple : écrire une formule pour « le carré de la somme de A et du double de B »
Conversion (ou traduction) depuis le registre « langue naturelle », vers le registre du calcul littéral
Exemple : Représenter avec des flèches trois vecteurs vérifiant la relation $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$
Un même objet mathématique est souvent susceptible d'être représenté dans de nombreux registres : les didacticiens font l'hypothèse que les tâches de conversions entre registre sont un levier de conceptualisation et d'abstraction. En outre, tous les registres n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement des objets, il faut donc aussi apprendre à choisir de manière stratégique un registre de traitement

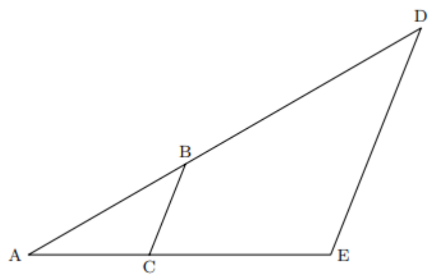
5. Introduction d'étapes
6. Utilisation des réponses aux questions précédentes d'un problème
7. Existence de choix ou non, qui aboutissent ou pas.

Document 3 : Analyser les tâches des 6 exercices suivants

Pour les exercices n°1, 2 et 3, on se place au niveaux $4^{\text{ème}}$-$3^{\text{ème}}$

Exercice 1

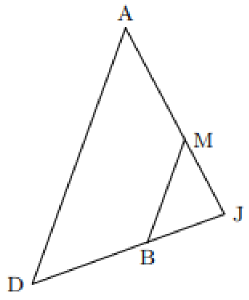
La figure est donnée ci-contre.
Sachant que :
a) AC = 2 cm, AE = 5 cm, AB = 3 cm ;
b) les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
Calculer AD.



Tâche simple et isolée.

Exercice 2
La figure ci-contre étant donnée :
a) les droites (AD) et (MB) sont parallèles ;
b) en cm, les mesures réelles sont : $JD = 3$; $JB = 1{,}8$; $AD = 4$.

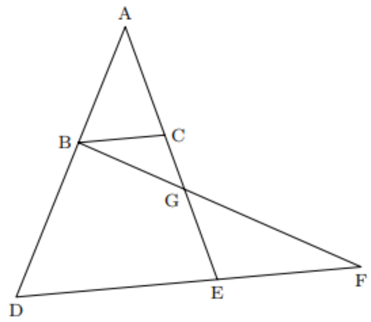
Calculer MB.



On reste en gros sur une tâche simple et isolée.

Un petit enjeu d'adaptation cependant : la figure n'est pas en position prototypique (somme « principal » usuellement à gauche ou en haut ; erreur prévisible : des élèves peu attentifs, ou en début de chapitre, essaieront d'écrire des égalités de rapport en partant du point A ou du point D).

Exercice 3



La figure ci-contre étant donnée, sachant que :
a) Les droites (BC) et (DF) sont parallèles ;
b) $AC = 12$; $CG = 16$; $GE = 10$; $EF = 15$;

calculer DE.

On doit : reconnaître deux « configurations de Thalès » (2), procéder en deux étapes (5), utiliser le résultat de la première étape dans la seconde (6).

Exercice 4 : (en Seconde)

Soit f une fonction définie sur **R**. On sait que les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sont $]3\,;+\infty[$ et que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $S = \{-1; 3\}$.

a. Dresser le tableau de signes de f.
b. Tracer une courbe possible pour une telle fonction f.

On est sur des tâches de conversion entre registres : uniquement ça pour la question (a) ; pour (b) il y a en outre des choix à faire, puisqu'une infinité de courbes est compatible avec les contraintes.

Exercice 5 : (en Seconde)

On considère la fonction définie sur **R** par $g(x) = 2x^2 - 4x + 8$

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a $2x^2 - 4x + 8 = 2\,(x-1)^2 + 6$
2. En déduire que g possède un minimum, dont on déterminera la valeur.

Pour la question 1 on a le choix de partir du membre de gauche (à factoriser, qui, en 2^{nde}, risque de ne pas aboutir) ou du membre de droite (à développer) (7).

Question 2 :

Il faut utiliser le résultat de la question 1 (6) et choisir quelle expression de f utiliser (on en connaît maintenant deux) (7). Bien sûr il faut choisir la forme canonique (membre de droite).

Il y a ensuite des choix de méthode (7), qui sont en 1 ou 2 étapes :

- Utiliser un argument de signe pour montrer que f est minorée par 6, puis montrer que $f(1) = 6$
- On peut montrer que $f(0) = f(2)$; pour des raisons de symétrie, la fonction du second degré admet donc son extremum en $x = 1$ (et là seulement). Plusieurs moyens pour montrer que c'est un maximum : utiliser des connaissances de cours sur le rôle du coefficient dominant ; voir que $f(0) = 8 > f(1)$, dont $f(1)$ n'est pas un maximum etc.
- Si cela a été étudié en cours, citer son cours sur l'usage de la forme canonique d'un trinôme du second degré $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$.

Exercice 6 : (en Spécialité Maths de Terminale)

Le plan étant muni d'un repère, on considère une courbe **C** et une droite **D**, données par des équations

Equation de **C** : $xy = 1$

Equation de **D** : $y = 2x - 1$

Etudier les positions relatives de **C** et **D**.

On doit introduire de nombreuses étapes (5), faire de nombreux choix (7), introduire des objets intermédiaires (vraisemblablement une fonction « différence », usuelle dans l'étude des positions relatives). L'énoncé articule d'emblée deux cadres (géométrique et numérique), il faudra jongler entre les deux. Selon la méthode de résolution choisie, il peut y avoir changement de cadre (passage du cadre de l'algèbre (équations et inéquations du second degré) au cadre de l'analyse (TVI).

Idée de solution n°1 (cadre algébrique) :

On se place sur **R***. La courbe **C** est au-dessus de la droite **D** si et seulement si l'inéquation $\frac{1}{x} > 2x - 1$.

Sur **R***, résolvons l'inéquation $\frac{1}{x} > 2x - 1$. Attention, il faudra distinguer deux cas (selon le signe de x).

Sur]-∞ ; 0[, l'inéquation équivaut à $1 < 2x^2 - x$, qui équivaut à $2x^2 - x - 1 > 0$. Discriminant 9, solution dans le domaine d'étude -1/2.

Sur]0 ; +∞[, l'inéquation équivaut à $1 > 2x^2 - x$, qui équivaut à $2x^2 - x - 1 < 0$. Discriminant 9, solution dans le domaine d'étude 1.

Bilan : **C** est au-dessus de **D** si et seulement si $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup\ ]0; 1]$

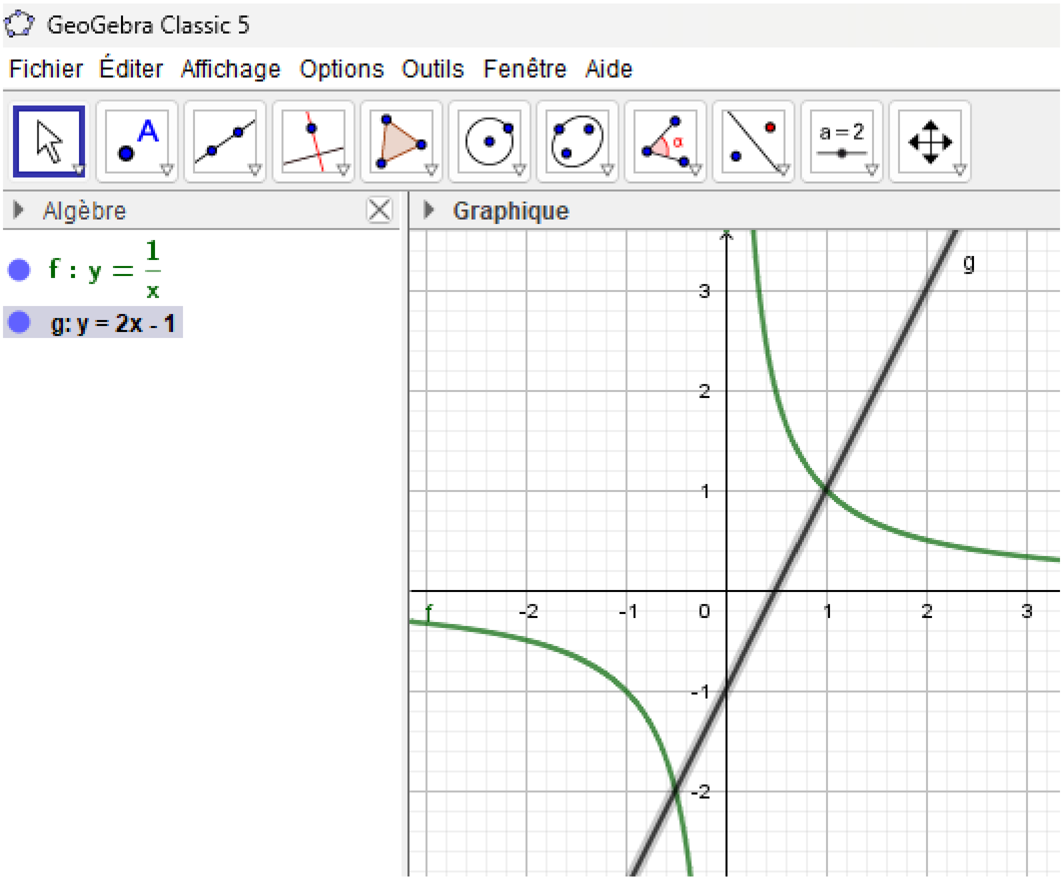
Idée de solution n°2 :

1ère étape : Etudions d'abord les points d'intersection des deux courbes et résolvant sur **R*** l'équation $\frac{1}{x} > 2x - 1$.

2ème étape : on s'intéresse au signe de la fonction différence δ, définie sur **R*** par l'expression $\frac{1}{x} - 2x + 1$ (solutions -1/2 et 1). Sur]-∞ ;0[cette fonction est continue, elle ne change donc pas de signe sur les intervalles où elle ne s'annule pas etc. On peut aussi trancher en regardant les limites en l'infini (terme dominant $2x$).

Idée de solution n°3 : étudier les zéros et le tableau de variation de la fonction δ ; en déduire le tableau de signes de δ.

Remarque : un travail sur calculatrice graphique permet soit une conjecture, soit un contrôle des réponses (une conjecture à main levée est possible et intéressante, même si elle ne donne pas les points d'intersection) En particulier, il invalide les réponses données par la méthode 2 dans lesquelles on oublie de tenir compte du signe de x.



Partie IV : Problèmes ouverts (ou « problèmes pour chercher »)

Exemple 1 :

« Aujourd'hui, chaque groupe va être propriétaire d'une basse-cour composée uniquement de poules et de lapins. Composition de la basse-cour pour le groupe 1 : 26 têtes et 86 pattes. »

Indiquer 6 (ou plus !) méthodes de résolution différentes de ce problème.

- Essais et erreurs non systématiques : essayons avec 10 poules et 10 lapins … ça ne marche pas, essayons avec 5 poules et 30 lapins …
- Essais et erreurs intégrant un raisonnement ou une forme de systématicité (de type dichotomie) :

  Si j'avais 10 poules, le nombre de lapin serait 16. Il y aurait alors 10x2 +16x4 = 84 pattes, ce n'est pas ça.

  Si j'avais 20 poules, …

- Fausse position : si j'avais 6 poules, j'aurais 20 lapins et 92 pattes. Chaque fois que je remplace un lapin par une poule (ce qui conserve le nombre de têtes) je retire deux pattes. Pour passer de 92 à 86 il faut retirer 3 fois deux pattes, donc 3 lapins. La solution est 6+3 = 9 poules et 20-3 = 17 lapins.
- Exploration systématique, par exemple au tableur :

poules	lapins	pattes
0	26	104
1	25	102
2	24	100
3	23	98
4	22	96
5	21	94
6	20	92
7	19	90
8	18	88
9	17	86
10	16	84
11	15	82
12	14	80

- Mise en équation et résolution d'un système (2,2)
- Peu vraisemblable : étude graphique (intersection de 2 droites)

En quelle(s) classe(s) cet énoncé est-il celui d'un problème ouvert et pourquoi ? Dans ce cas, quelles sont les compétences particulièrement travaillées ?

En quelles classes est-il un exercice d'entraînement et non un problème ouvert ?

Jusqu'en 3$^{\text{ème}}$ inclus c'est un problème ouvert : on vérifie les paramètres usuels caractérisant les problèmes ouverts

- les élèves n'ont pas de technique privilégiée étudiée préalablement (sinon ce serait un exercice d'entraînement ou de réinvestissement) et on ne vise pas la découverte d'une nouvelle technique à apprendre (ce serait une activité d'introduction).
- L'énoncé ne donne ni indication d'étapes, ni de méthode ou d'outils.
- L'énoncé ne donne pas la réponse.
- L'énoncé est assez facile à comprendre et il est aisé de s'engager dans le problème (ne serait-ce que par des essais-erreurs).
- Plusieurs méthodes de résolution sont possibles (ce n'est pas absolument nécessaire pour être un problème ouvert, mais c'est souvent le cas).

Bien entendu on tombe essentiellement sur la compétence « chercher ». Plus précisément :

- S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre- exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
- Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

A partir de la 2nde c'est un exercice d'entraînement, puisque la technique experte (résolution de système linéaire) est au programme : « Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes. » (c'est caché dans la partie sur les équations de droite).

Exemples 2 et 3 :

Exemple 2 : https://nrich.maths.org/325

Exemple 3 : https://www.youtube.com/watch?v=mH0QLSffq0c
et Dan Meyer Three Acts 3 Popcorn Picker - YouTube

A retenir sur l'exemple 2 :

- La simple situation de formulation d'une conjecture générale (sans aller jusqu'à sa démonstration) est déjà ouverte et ardue.
  Au collège, la production par les élèves d'écritures comme
  $(1+2)^2 = 1^3 + 2^3$
  $(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$
  $(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$
  …
  représente déjà un travail considérable (décomposition de figures de manière astucieuses, utilisation des puissances, formule de l'aire d'un carré et du volume d'un cube).
  On pourrait aller jusqu'à une formulation littérale : il semble que, pour tout entier naturel N on a $(1+2+3+ \ldots + N)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3$
  Une vérification sur tableur ou par un programme serait intéressante. Il faut bien sûr faire entendre que cette vérification n'est pas une preuve, le nombre de cas à considérer étant infini.
- En terminale, la démonstration par récurrence de l'égalité générale est plutôt un exercice d'entraînement.

A retenir sur l'exemple 3 :

- L'« amorce » en vidéo est très (trop ?) ouverte : on peut formuler différentes questions, selon deux paramètres :
  - Les dimensions spécifiques de la feuille comptent-elles ? Quelles sont-elles ?
  - Que compare-t-on : des volumes de cylindres ? des capacités de récipients cylindriques ? des masses de pop-corn ? un nombre de pop-corns ?
- Des traits originaux et intéressants :
  - Un questionnement sur les grandeurs pertinentes. On retrouve la compétence « modéliser », en particulier

    Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).
  - De nombreuses connaissances différentes sont à utiliser, et relèvent de plusieurs cadres (connaissance du cylindre, formules relatives aux aires et volumes, calcul algébrique).

- Une analyse en termes de tâches montrerait une grande complexité. Les connaissances sont mises en fonctionnement au **niveau mobilisable** et pas seulement disponible. ATTENTION : dans le problème ouvert sur les poules et les lapins, les procédures non-expertes reposaient sur peu de connaissances, mais ce n'est pas un critère pour les problèmes ouvert. Ici le problème est ouvert, mais sa résolution mobilise beaucoup de connaissances variées.

Rappel : esquisse de solution générale. Si on part d'un rectangle de côtés de longueurs A et B, avec A>B

- Volume V_g du cylindre de gauche (assis sur son grand côté) : le rayon R du disque de base est tel que $2\pi R_g = A$, donc $R_g = A/2\pi$. Le volume est donc $V_g = \pi\, R_g{}^2 \times B = \frac{A^2}{4\pi} \times B$
- Pour des raisons de symétrie, le volume du cylindre de droite est $V_d = \frac{B^2}{4\pi} \times A$

On a donc $\frac{V_g}{V_d} = \frac{A}{B} > 1$, le cylindre de gauche est de plus grand volume.

Partie V : Problèmes avec changement de cadre

Exemple 1 : Résoudre dans **R** l'équation $4x^3 - x^4 = 30$

Typique d'un exercice avec changement de cadre : l'exercice se présente dans le cadre de l'algèbre, ce qui doit « évoquer » des connaissances et des outils (factorisation, changement de variable …). En Terminale, la solution experte n'est pas disponible (formules générales de résolution des équations du 4ème degré).
En passant dans le cadre de l'analyse, on peut étudier les variations de la fonction définie sur **R** par $f(x) = 4x^3 - x^4$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x)$. La fonction est croissante de $-\infty$ à 3 puis décroissante. Le maximum est $f(3)$ c'est-à-dire 27. La valeur 30 n'est donc jamais atteinte.
On notera que cet exercice comporte beaucoup des traits d'un problème ouvert (pas d'indication de méthode, d'outil, d'étapes ; possibilité de commencer par une exploration numérique à la calculatrice pour se faire une première idée). L'objectif est de développer la *flexibilité cognitive* des élèves en les invitant à changer de cadre. Même si les élèves ne trouvent pas seul le changement de cadre, passer avec eux en revue les méthodes d'attaques envisagées dans le cadre algébrique est déjà utile.

Exemple 2 : Construire un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 40 cm².

Problème formulé dans le cadre géométrique, celui des grandeurs de la géométrie plane. Résolution dans le cadre algébrique, éventuellement étendu par un point de vue fonctionnel (maximum d'une fonction polynôme du second degré).

Exemple 3 :

On considère l'ensemble W des entiers de la forme p^2+q^2 avec p et q des entiers.

Est-ce que le produit de deux nombres de W appartient à toujours à W ?

Problème formulé dans le cadre de l'arithmétique et dans le registre du calcul littéral, ce qui évoque une boîte à outils : divisibilité, factorisation, nombres premiers, récurrence, congruences etc.
Solution possible dans le domaine complexe, où la factorisation de la somme de deux carrés devient possible : $p^2+q^2 = p^2 - i^2q^2 = (p+iq) \times (p-iq)$. Toute somme de deux carrés est de la forme $z\bar{z}$ (on peut aussi y voir le carré d'un module), et réciproquement. Or : $z\bar{z} \times z'\overline{z'} = zz' \times \overline{zz'}$ et les parties réelles et imaginaires de zz' sont aussi des entiers naturels sous les hypothèses de l'exercice.

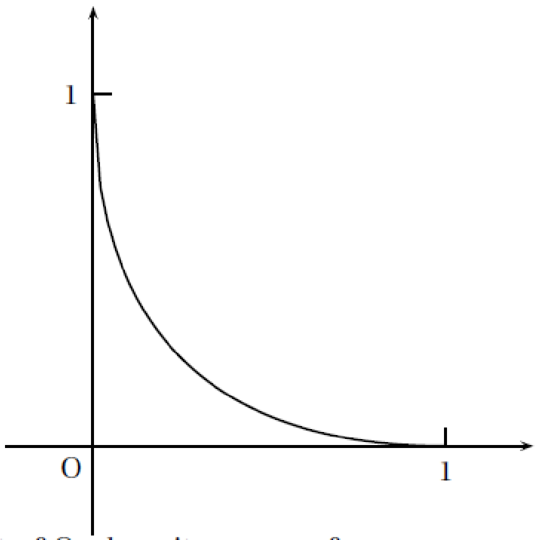
Exemple 4 :

Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\ 1]$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Cette fonction est dérivable sur $[0\,;1]$ et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. La courbe représentative Γ de la fonction f dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.

1. a. Montrer que le point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

b. Montrer que Γ est symétrique par rapport àà la droite d'équation $y = x$.



2. a. Si Γ était un arc de cercle, quel serait son centre ? Quel serait son rayon ?

b. La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?

Source : banque d'exercices pour la rénovation du baccalauréat général en filière scientifique, Inspection Générale de Mathématiques, 2003.

Remarque : curieusement, dans les programmes, le changement de cadre est mentionné dans la compétence « représenter »

- Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.

Partie VI : Exercices au format « Vrai / Faux »

Document 6.1 :

Source : Document d'accompagnement *Ressources pour la classe de Seconde – Fonctions*, DEGESCO, juillet 2009.

Voici le tableau de « signes » d'une fonction :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Répondre aux affirmations suivantes par : VRAI, FAUX, ou par ON NE PEUT PAS SAVOIR.

(a) $f(2) = 6$

(b) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions

(c) La fonction f est une fonction affine

(d) L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-3;5[$

(e) Le point $A(0;5)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

(f) Si $f(1) = -4$, alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est -4.

Document 6.2

Source : banque d'exercices Inspection Générale en vue de la rénovation du Baccalauréat (2003). Exercice destiné à au Bac. ES.

On donne ci-dessous les variations d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

x	$-\infty$		0		4		9		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Répondre, par VRAI ou FAUX, aux questions suivantes (une justification est demandée lorsque la réponse est FAUX, aucune justification n'est demandée lorsque la réponse est VRAI)

1. Pour tout réel x, $f(x) \geqslant -2$.
2. L'équation $f(x) = -3$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
3. L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $[4\,;\,9]$.
4. Pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.
5. $f'(1) < 0$.
6. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)} = +\infty$.

Document 6.3 :

Source : mémoire professionnel de Steven Lu (ESPE de Paris, 2015-2016, mémoire dirigé par R. Chorlay

<u>Exercice 3</u> Vrai ou Faux, justifier :

Dans toutes les questions, f désignera une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) Si f est constante, alors elle est croissante.
2) Si f est croissante, alors elle est constante.
3) Si f est croissante et décroissante, alors elle est constante.
4) Si f(0) = 1 et s'il existe un réel x > 0 tel que f(x) = 0, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
5) Si f(0) = 1 et s'il existe un réel x > 0 tel que f(x) = 0, alors f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
6) Si f est strictement croissante, alors elle est croissante.

Indépendamment du niveau de classe et des notions spécifiques en jeu, citer deux paramètres sur lesquels ces trois « vrai/faux » se distinguent.

- Le nombre d'alternatives : deux (V/F) ou trois (V/F/On ne peut pas savoir)
- Les demandes de justification, 3 possibilités : aucune (par exemple en question flash), justifier uniquement quand on répond « Faux », justifier toutes les réponses.

Parmi les items de ces trois « Vrai/Faux », en repérer certains qui donnent lieu à des tâches de production d'objets sous contraintes. Dans quelle situation les rencontre-t-on ?

Cette tâche riche et inhabituelle apparaît dans deux circonstances :

- Construction de contre-exemple pour prouver qu'une affirmation qui se veut universelle est fausse
- Construction d'exemple et de contre-exemples pour prouver « on ne peut pas savoir ». Document 5.1 questions b et f, document 5.3 question 3 etc.

En quoi les exercices au format « Vrai/Faux » se prêtent-ils bien au travail sur la logique ?

Il est facile de créer des séries d'items ne variant que par un paramètre montrant le rôle des aspects logiques :

- Implication, implication réciproque, équivalence
- Quantification universelle, existentielle, existentielle avec unicité
- « et » ou « ou »

Les exercices au format « Vrai/Faux » peuvent-ils porter sur des notions qui n'ont pas encore été vues en cours ?

Oui, ils permettent de formuler des conjectures. Par exemple, le document 6.2 peut permettre de faire formuler différentes versions du théorème des valeurs intermédiaires (et de problématiser la question de la continuité).